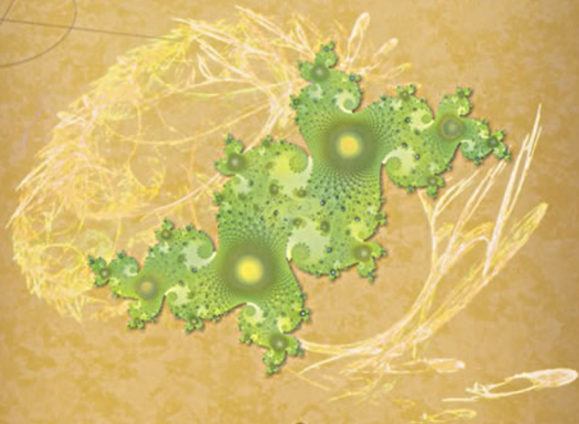
TURING 图灵数学·统计学丛书 15

WILEY





# Fractal Geometry
## Mathematical Foundations and Applications

# 分形几何
## 数学基础及其应用
### （第2版）

[英] Kenneth Falconer 著
曾文曲 译


人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

# 版权声明

# 译 者 简 介

曾文曲，广东工业大学数学系教授. 福建永春人，北京大学数学力学系本科毕业，北京师范大学概率论与数理统计专业硕士毕业. 1981—1993 年在沈阳东北工学院 (现东北大学) 数学系任讲师、副教授，其中 1990 年在法国巴黎第六大学概率统计实验室访问. 1993 年调入广东工业大学数学系，1995—2003 年任广东工业大学研究生处处长，曾多年担任广东省数学会常务理事，现任广东省工业与应用数学学会副理事长.

在大学主要从事教学和科研工作，研究马尔可夫过程和分形几何，多年来发表论文 40 余篇 (包括与别人合作)，主要出版物有以下几部：

(1)《分形理论与分形的计算机模拟》(东北大学出版社，1993 年初版，2001 年修订版，与王向阳等合作编著)；

(2)《分形、小波与图像压缩》(东北大学出版社，2002 年出版，与文有为合作编著)；

(3)《分形几何 —— 数学基础及其应用》(第 1 版)(译著，肯尼思 · 法尔科内原著，东北大学出版社，1991 年出版)；

(4)《分形几何中的技巧》(译著，肯尼思 · 法尔科内原著，东北大学出版社，1999 年出版).

# 推 荐 序

16 年前, 当《分形几何 —— 数学基础及其应用》第 1 版中译本在国内刚出版时, 国内了解分形理论及其应用的学者还很少. 而今天, 多数大学的数学系已经开设了 "分形几何" 课, 涉及复杂图形处理的相当多的科研领域也用到了分形这个工具.

分形理论及其应用已经在中国迅速地传播与发展. 除了因为曼德伯罗德 (B. Mandelbrot) 的创新思想已经得到广泛认同以外, 还有另外一件事功不可没, 那就是肯尼思 · 法尔科内著的《分形几何 —— 数学基础及其应用》一书及其中译本的出版! 十几年来, 很多人都是在这本书的引导之下, 进入了分形这个新的有趣领域. 据这本书的译者说, 这些年来, 经过他们售出或帮助购买的中译本就不下千册, 由此可见一斑. 读者对该书的需求量是非常大的, 作为一本数学方面的专著, 能有这么大的销量 (有关部门指定的教材除外) 是少见的.

为什么这本书这么受欢迎呢? 主要是因为分形这个学科方向十分吸引人. 它新颖、涉及面广且有深刻的内容和方法, 它有比较广泛的实际应用前景, 而且在纯粹数学中 (例如奇点理论) 也有深刻的应用. 这本书叙述深刻、全面、可读性强, 也是一个很重要的原因. 作者以他对分形思想的深刻理解为基础, 在书中提供了对分形数学本质的广泛而容易令人接受的阐述, 并相当全面地介绍了应用前景. 每个论题都包含了必要的背景资料, 在严格的理论论证基础上, 再通过例子及图形加以清晰地解释和说明. 其中既有先进计算机技术的支持, 也有相关的注记和较详尽的参考资料. 从而为读者提供了一个可以对理论及理论的进一步应用进行深入探讨的园地. 这本书的这些优点, 使之成为国内许多高校开设分形课的基本教材以及一些学者和技术人员在这方面的基本参考书.

但是, 毕竟这本书第 1 版已经出版了十几年, 分形理论也有了进一步的长足发展. 为了让读者了解最新的分形理论, 肯尼思 · 法尔科内在 2003 年适时地推出了该书的第 2 版. 在这个新版本中, 作者在第 1 版的基础上主要做了两方面的工作, 按作者的话来说是: "阐明了关于分形几何的一些新的进展, 同时为进一步深入阅读提出了相应的注记和建议. 其次, 把更多的注意力放在那些把本书作为教材的学生们的需要上, 增加一些细节帮助理解, 同时包含一些有助于进一步理解的练习." 实际上, 书中的改动还是比较大的, 每一章各节都多少有些修正和调整, 叙述方式也有些变化. 特别是, 第 17 章基本是重写, 第 14 章和第 18 章增加了不少近年来分形理论的新结果. 作者还为本书提供了 "课程建议", 这些努力对广大读者, 尤其是对那些将要学习分形的人, 无疑是个福音.

人民邮电出版社图灵公司获得了本书第 2 版中文版的出版授权, 委托曾文曲教授重译此书. 我十分赞赏图灵公司的努力, 也很高兴能再次看到曾文曲翻译肯尼思 · 法尔

科内的书.他在翻译中常与原书作者进行多方面的沟通, 而且他的数学功底深厚, 文笔流畅, 使得这一版中译本的翻译质量比以前更高, 这更有助于本书的读者理解书中的内容. 在此, 我祝愿本书对分形几何在中国的发展起更大的作用!

严士健

2006 年 11 月 11 日

于北京师范大学数学科学学院

# 课 程 建 议

对于标准的分形几何教程, 本书所包含的材料太多了. 根据所需要的侧重点, 可以合理地选择本书适当的章节, 作为本科生或研究生的教材.

作为数学系学生的课程, 可以选用如下章节.

(a) 数学基础

1.1　集合论基础;　1.2　函数和极限;　1.3　测度和质量分布.

(b) 计盒维数

3.1　计盒维数;　3.2　计盒维数的性质.

(c) 豪斯多夫测度和维数

2.1　豪斯多夫测度;　2.2　豪斯多夫维数; 2.3　豪斯多夫维数的计算;　4.1　计算维数的基本方法.

(d) 迭代函数系

9.1　迭代函数系;　9.2　自相似集的维数;　9.3　一些变化;　10.2　连分数例子.

(e) 函数的图

11.1　图的维数, 包括维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 函数和自仿射图.

(f) 动力系统

13.1　斥子与迭代函数系;　13.2　逻辑斯谛映射.

(g) 复变函数的迭代

14.1　Julia 集一般理论梗概;　14.2　Mandelbrot 集;　14.3　二次函数的 Julia 集.

# 第 1 版前言

经常有人问我这样的问题：什么是分形？什么是分形的维数？如何求得分形维数，它能告诉我们什么？或者数学是怎样应用到分形上的？我在本书中将尽力回答一些此类的问题.

本书主要是为在数学或其他学科领域中经常遇到分形的人，提供一个容易理解的与分形及维数有关的数学论述. 尽管本书基本上属于数学类图书，但书中也对分形这个课题进行了直观的探讨.

全书很自然地分成两部分. 第一部分是关于分形及分形几何的一般理论. 首先介绍了关于维数的各种不同的概念及计算维数的方法，然后利用研究古典图形 (如圆或椭圆) 的方法研究分形的几何性质. 比如在研究圆或椭圆中，一个圆的局部可以被一直线段近似；一个圆的射影或"影子"通常是一个椭圆；一个圆与一直线段相交在两个点上等等. 分形也具有类似的性质，通常情况下，维数起着关键的作用. 因此，书中还考虑了分形的局部结构、分形的投影和交等.

本书的第二部分介绍一些分形的例子，在其中可能应用了第一部分的理论，这些例子是从物理和数学的非常广泛的领域中提取出来的. 主题包括：自相似集和自仿射集、函数的图、数论和纯数学的例子、动力系统、Julia 集、随机分形以及一些物理上的应用.

书中给出了许多图和频繁阐述的例子，还有计算机绘制的各种各样的分形，这些信息可以让具有计算机编程能力的读者自己制作进一步所需要的图形.

希望本书可以成为研究人员的一本有用的参考书，因为它提供了作为分形理论基础的数学上的一些易于接受的新进展，并且展示了在特殊情况下如何应用它. 书中包含了与分形有关的广泛的数学思想，特别是在第二部分，提供了一些可以得到的结果而不是详细地探讨任何一个主题. 主题的选择在某种程度上取决于作者的偏好，肯定还有一些主要的应用没有包含在本书中. 一些材料可追溯到 20 世纪初，而另外一些材料又是非常新的.

每一章的结尾都提供了一些注记和参考文献，但绝不可能把全部的参考文献都列出来. 确实，如果把所涉及的各个主题的参考文献完全列出来，其规模将是庞大的. 但还是希望提供的参考文献能包含足够的信息，使欲从事这方面工作的读者从中进一步地了解这个主题.

本书可以作为研究生或者高年级本科生的分形数学教材. 为了帮助学生理解每一章的内容，在每章后面都有一些练习题. 较难的部分和证明用"*"号注明，可以跳过，应该不会影响有关问题的连贯性.

一直努力使书中的数学知识保持在数学和物理系研究生或勤奋的高年级本科

生能够理解的程度上，特别是把测度论思想控制在最低的限度上，使读者可以把集上的测度视为质量分布. 在可以接受测度论和它的一些直观性质的前提下，书中的论述就基本不需要更深入的测度理论.

为了避免结论互相混淆，所有结论都是精确叙述的. 有关论证的方法一般都是严格的，但对于一些较难或技巧性较高的证明，或者是给出证明的梗概，或者完全略去证明 (但是一些较难的证明在形成其他理论时并不是没有用，特别是在随机分形和具有大交集的集上). 合适的图可以帮助理解证明 (大部分是几何性质的证明). 书中也绘制出了一些图，读者可以发现，这些都有助于进一步绘制其他的图形.

第 1 章首先快速浏览了一些基本的数学概念和定义，例如，书中自始至终应用的集合论和函数论. 接着介绍了测度和质量分布，希望这些都适于读者阅读. 概率论的知识对理解随机分形及布朗运动这两章内容有用.

因为本书覆盖的主题很广，在概念的应用上完全一致是不可能的，有时不可避免地在本书的一致性上与标准用法之间做一些折中.

最近几年，随着计算机图形学的出现和分形作为各种物理现象的模型，分形作为一种艺术形式已经相当流行. 在某种程度上，缺乏或完全不懂数学知识，可能并不影响对分形的欣赏. 但是，充分理解应用到如此多样化目标上的数学，一定能提高我们的鉴赏力. 时常听到这样的赞叹："多么美丽的分形"！作者相信分形的美丽将在其数学中被进一步发现.

非常感谢在本书准备过程中提供帮助的人. Philip Drazin 和 Geoffrey Grimmett 对部分手稿做了有益的注记，Peter Shiarly 在计算机绘图和制作一些照片中给了有价值的帮助，Aidan Foss 制作了一些图. 我非常感谢 John Wiley and Sons 出版公司的 Charlotte Farmer, Jackie Cowling 和 Stuart Gale 对本书出版所做出的努力.

特别要感谢 David Marsh，他不但对手稿做了有用的注记和制作了许多计算机图片，还以最专业的方式录入了手稿.

最后，我还要感谢我的妻子 Isobel 的支持和鼓励，这些促使我继续阅读本书的各种手稿.

Kenneth J. Falconer

1989 年 4 月于 Bristol

# 第 2 版前言

自本书第 1 版出版至今已经 13 年了. 在这期间, 由于各种层次的研究者对分形的广泛兴趣, 使分形的数学理论和应用都有了巨大的发展. 本书的初衷是为从事数学和其他学科的、希望多了解分形数学的人写的. 这些年来, 随着兴趣的变化和数学教学的发展, 很多学校已经开设了一些关于分形几何的本科生和研究生课程, 而其中相当多是以本书的一些章节为基础的.

因此, 这个新版本有两个主要目的. 首先, 阐明分形几何的一些新进展, 同时为深入阅读提出了相应的注记和建议. 其次, 把更多的注意力放在那些把本书作为教材的学生们的需要上, 增加一些细节帮助理解, 同时包含一些有助于进一步理解的练习.

书中的一些部分已经重写, 特别是, 自本书第 1 版出版以来, 多重分形理论已经有了很大的进展, 因此 "多重分形测度" 这一章是完全重写了. 有关的注记和参考文献也进行了相应的更新. 整本书做了大量的小改动、修正和补充; 改变了一些符号和术语, 以和目前的标准用法相一致; 利用计算机技术, 用更精准的图像取代第 1 版中的许多图像. 节、等式和图像的编号和第 1 版保持一致 (如果有可能的话), 因此以前注明的参考文献对本书仍然有效.

练习添加在每一章的末尾, 习题的解答和有关的补充材料可以在因特网 http : //www.wileyeurope.com/fractal 上找到.

本书的续篇《分形几何中的技巧》已经于 1997 年出版, 其中阐述了在分形研究中的各种不同的技巧和思想. 如果读者希望学习本书之外的分形数学, 这个续篇是很有用的.

非常感谢那些对本书提出建设性建议的人. 特别是要非常感激 Carmen Fernandez,Gwyneth Stallard 和 Alex Cain 对这个新版本的帮助. 同时, 我十分感谢 John Wiley & Sons 出版公司工作人员对本书的继续的支持, 特别对负责第 2 版出版的 Rob Calver 和 Lucy Bryan 以及设计封面的 John O'Connor 和 Louise Page 表示感谢.

Kenneth J. Falconer

2003 年 1 月

St Andrews

# 绪 论

过去, 数学已广泛涉及可以用经典的微积分方法进行研究的集类和函数类; 而那些不够光滑和不够规则的集和函数, 却被认为是 "病态" 的, 不值得对它们进行研究, 因而无人理睬. 确实, 它们被当成个别的特例, 其中只有极少数被认为是可以利用一般理论来进行研究的.

近几年来, 这种态度发生了明显的变化. 人们已经意识到, 对 "不光滑对象" 不仅可以进行详细的数学描述, 而且也值得描述. 此外, 不规则集比经典的几何图形能更好地反映许多自然现象. 分形几何恰好为研究这类不规则集提供了一个总的框架.

我们首先简要地考察几个简单的分形例子, 并指出它们的一些特征.

去掉中间三分之一区间的康托尔集 (简称三分康托尔集) 是一种人们最了解, 同时也是最容易构造的分形; 然而, 它却显示出许多典型的分形特征. 这种集合是从单位区间出发, 通过一系列去掉部分子区间的过程构造出来的 (见图 0.1). 设 $E_0$ 表示闭区间 $[0,1]$ ($[a,b]$ 表示满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 $x$ 组成的集合), $E_1$ 表示除去 $E_0$ 的中间 1/3 之后得到的集, 即 $E_1$ 包含 [ 0, 1/3] 和 [2/3, 1 ] 两个区间; 分别去掉这两个区间的中间 1/3 就得到 $E_2$, 即 $E_2$ 包含 [ 0, 1/9], [ 2/9, 1/3], [ 2/3, 7/9], [8/9, 1] 四个区间. 按此方法继续进行下去, 分别去掉 $E_{k-1}$ 中各区间的中间 1/3 就得到 $E_k$, 即 $E_k$ 由 $2^k$ 个长度各为 $3^{-k}$ 的区间组成. 三分康托尔集 $F$ 是由属于所有 $E_k$ 的数组成的, 确切地说, $F = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} E_k$, $F$ 可以看成是当 $k$ 趋于无穷时集序列 $E_k$ 的极限. 显然, 不可能画出带有无穷小细节的 $F$ 自身, 所以 $F$ 的图实际上只是当 $k$ 充分大时, 对 $F$ 较好逼近的 $E_k$ 的一个图.

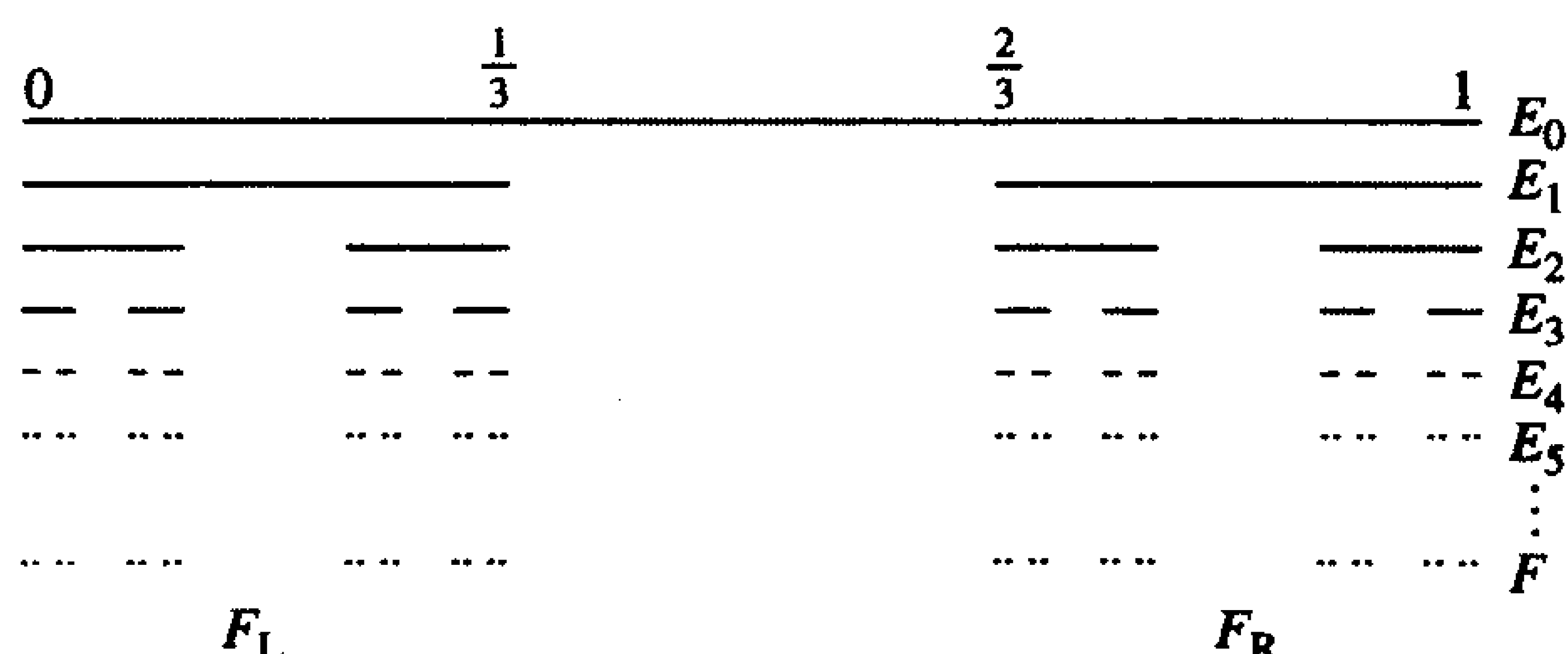



图 0.1　三分康托尔集 $F$ 的构造, 由反复地去掉区间的中间 1/3 而得到. 注意 $F$ 的左右部分 $F_L$ 和 $F_R$ 都是以系数 1/3 缩小 $F$ 所得到的相似图

乍一看, 在构造康托尔集 $F$ 的过程中, 已经去掉了 $[0,1]$ 区间中的那么多点, 似乎没有留下什么了. 事实上, $F$ 是一个无穷集 (并且的确是不可数的), 在它的每个点

的任一邻域中都包含集内的无穷多个数. 三分康托尔集正是由区间 $[0,1]$ 中可以展成下面的以 3 为底的幕级数形式的数组成的：

$$a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + a_3 3^{-3} + \cdots$$

其中, 对每个 $i$, $a_i = 0$ 或 2, 且 $a_i \neq 1$, 为看清这一点, 注意到, 从 $E_0$ 得到 $E_1$ 时, 去掉的是那些 $a_1 = 1$ 的数, 从 $E_1$ 得到 $E_2$, 去掉的是 $a_2 = 1$ 的数, 并以此类推.

下面列出三分康托尔集 $F$ 的一些性质, 我们以后将看到, 许多分形也有与之类似的性质.

(1) $F$ 是自相似的. 很明显, 分别在区间 $[0,1/3]$ 和 $[2/3,1]$ 内的 $F$ 的部分与 $F$ 是几何相似的, 相似比为 1/3; 进而分别在 $E_2$ 的 4 个区间内的 $F$ 的部分也与 $F$ 相似, 相似比为 1/9. 以此类推, 康托尔集包含许多不同比例的自身相似的样本.

(2) $F$ 有 "精细结构", 即它包含有任意小比例的细节, 越放大康托尔集的图, 间隙就越清楚地呈现在我们眼前.

(3) 虽然 $F$ 有错综复杂的细节结构, 但 $F$ 的实际定义却是非常简单明了的.

(4) $F$ 是由一个迭代过程得到的. 这个构造是由反复去掉区间中间的 1/3 得到的, 持续这个步骤所得到的 $E_k$ 是 $F$ 的越来越好的逼近.

(5) $F$ 的几何性质难以用传统的术语来描述, 它既不是满足某些简单几何条件的点的轨迹, 也不是任何简单方程的解集.

(6) $F$ 的局部几何性质也是很难描述的, 在它的任一点附近都有大量被各种不同间隔分开的其他点.

(7) 虽然 $F$ 在某种意义上是相当大的集 (是不可数无穷的), 然而它的大小不适于用通常的测度如长度来度量. 用任何合理定义的长度, $F$ 的长度总是为零.

第二个例子, von Koch 曲线, 这也是许多读者所熟悉的 (见图 0.2). 设 $E_0$ 是单位长度的直线段, $E_1$ 是由 $E_0$ 除去中间 1/3 的线段, 而代之以底边为被除去线段的等边三角形的另外两边所得到的集, 它包含四个线段; 把同样的过程应用到 $E_1$ 的每个直线段就构造出 $E_2$; 以此类推, $E_k$ 是把 $E_{k-1}$ 的每个直线段中间 1/3 用等边三角形的另外两边取代而得到的. 当 $k$ 充分大, 曲线 $E_k$ 和 $E_{k-1}$ 只在精细的细节上不同, 而当 $k \to \infty$, 折线序列趋于极限曲线 $F$, 称 $F$ 为 von Koch曲线.

von Koch 曲线在许多方面的性质与三分康托尔集列出的性质类似, 它由 4 个与总体相似的 "四分之一" 部分组成, 但比例系数是 1/3. 它在任何尺度下的不规则性反映了它的精细结构. 然而, 这个错综复杂的构造却源自于一个基本的简单结构. 虽然称 $F$ 为曲线是合理的, 但它是如此不规则, 以至于在传统的意义下它没有任何切线. 简单的计算表明 $E_k$ 的长度为 $(4/3)^k$; 令 $k$ 趋于无穷, 则 $F$ 的长度是无穷大的. 另一方面, $F$ 在平面内的面积为零, 所以它的长度和面积都没有提供对 $F$ 的大小很有效的描述.

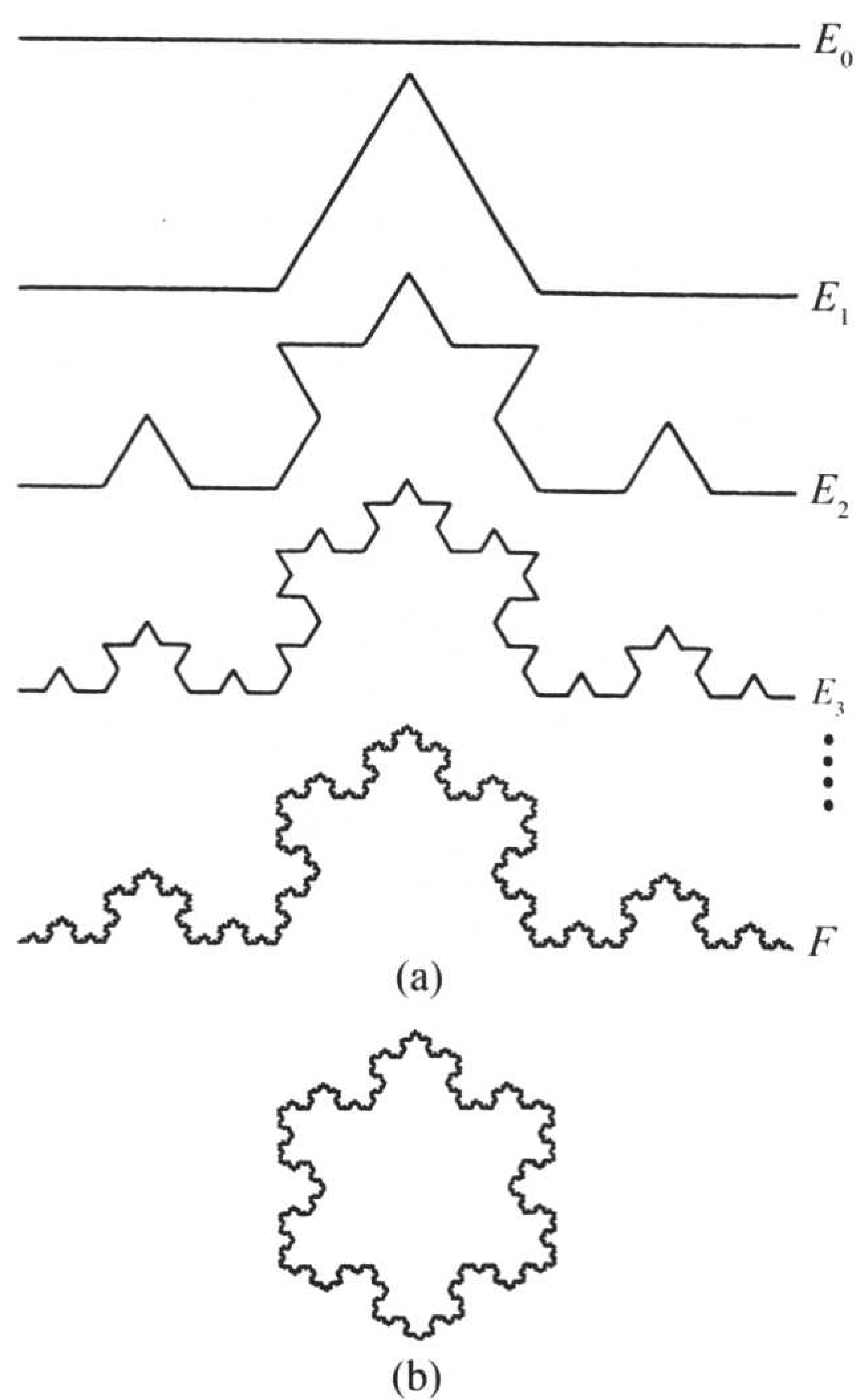



图 0.2　(a) von Koch 曲线 $F$ 的构造. 在每一步中, 每个区间的中间 1/3 都被一个等边三角形的另外两边取代.(b) 连接在一起的三段 von Koch 曲线构成一个雪花曲线

许多其他的集也可以由类似的迭代过程来构造, 例如 Sierpiński三角或垫是从一个初始的等边三角形反复去掉 (相反方向的) 小等边三角形得到的 (见图 0.3). (为

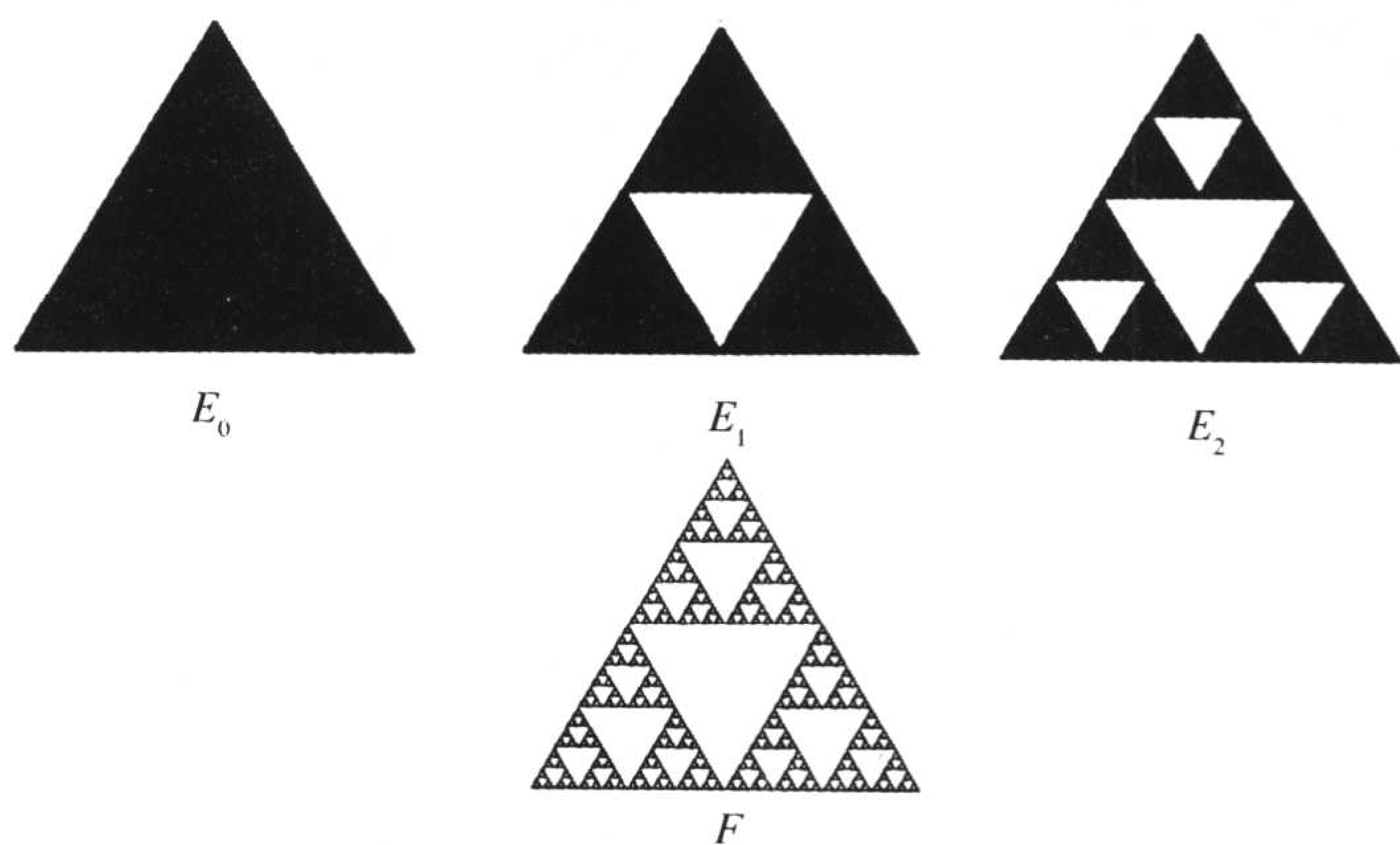



图 0.3　Sierpiński 三角的构造 ($\dim_{\mathrm{H}} F=\dim_{\mathrm{B}} F=\ln 3/\ln 2$)

了许多目的, 最好是把这个过程看成是反复用 3 个高为原高一半的三角形取代原来三角形的迭代过程.) 平面中类似于康托尔集的一个例子, 称为 "康托尔尘", 如图 0.4 所示. 构造它的每一步是把正方形等分成 16 个小正方形, 保留其中 4 个而把其余的去掉. (当然, 保留次序不同或个数不同的小正方形可以用来构造不同的集.) 显然, 这个例子同样也具有与康托尔集和von Koch曲线相类似的性质. 图 0.5 所示为在构造中用到两个不同相似比的例子.

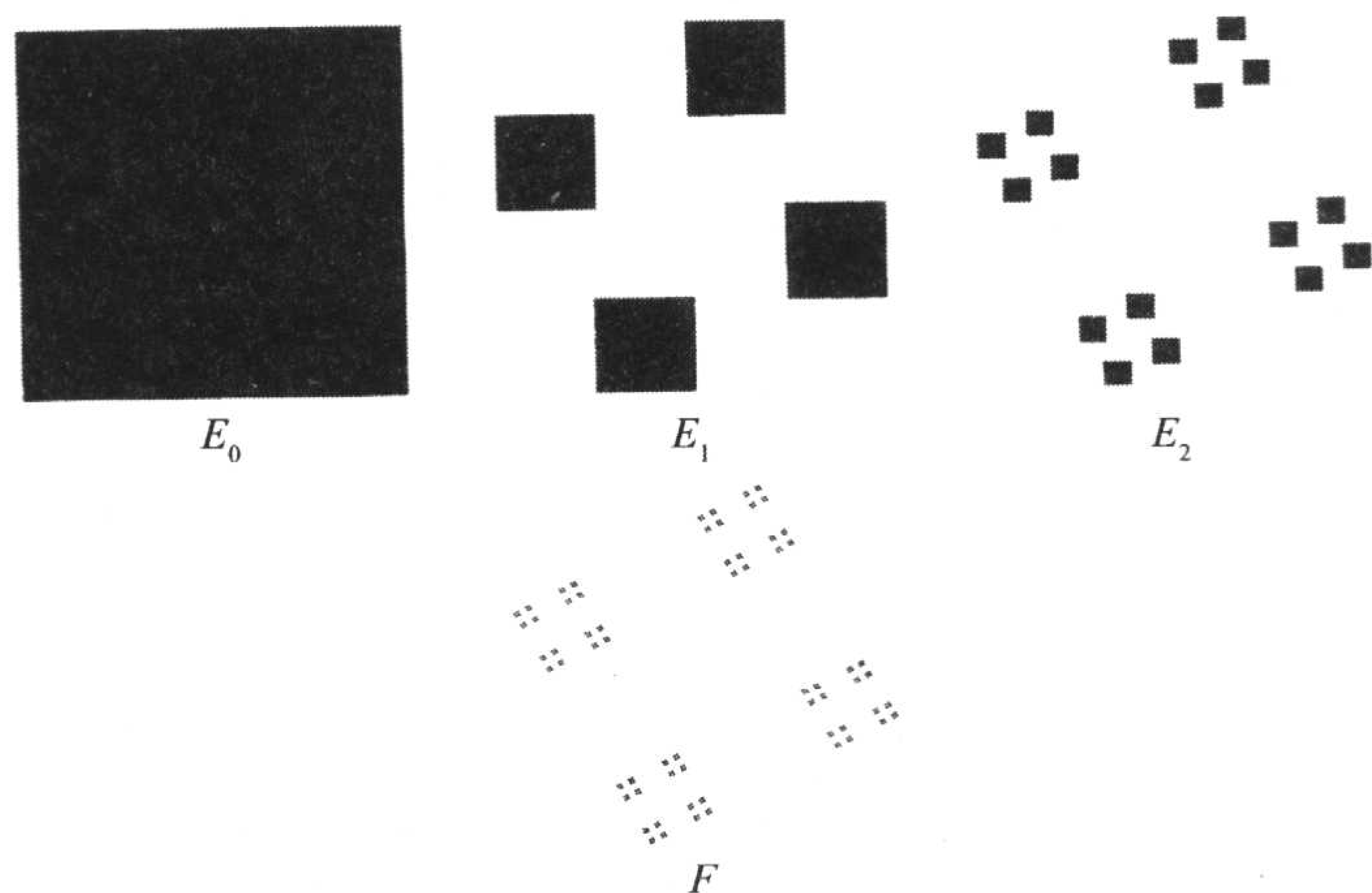



图 0.4 "康托尔尘" 的构造($\dim_{\rm H} F = \dim_{\rm B} F = 1$)

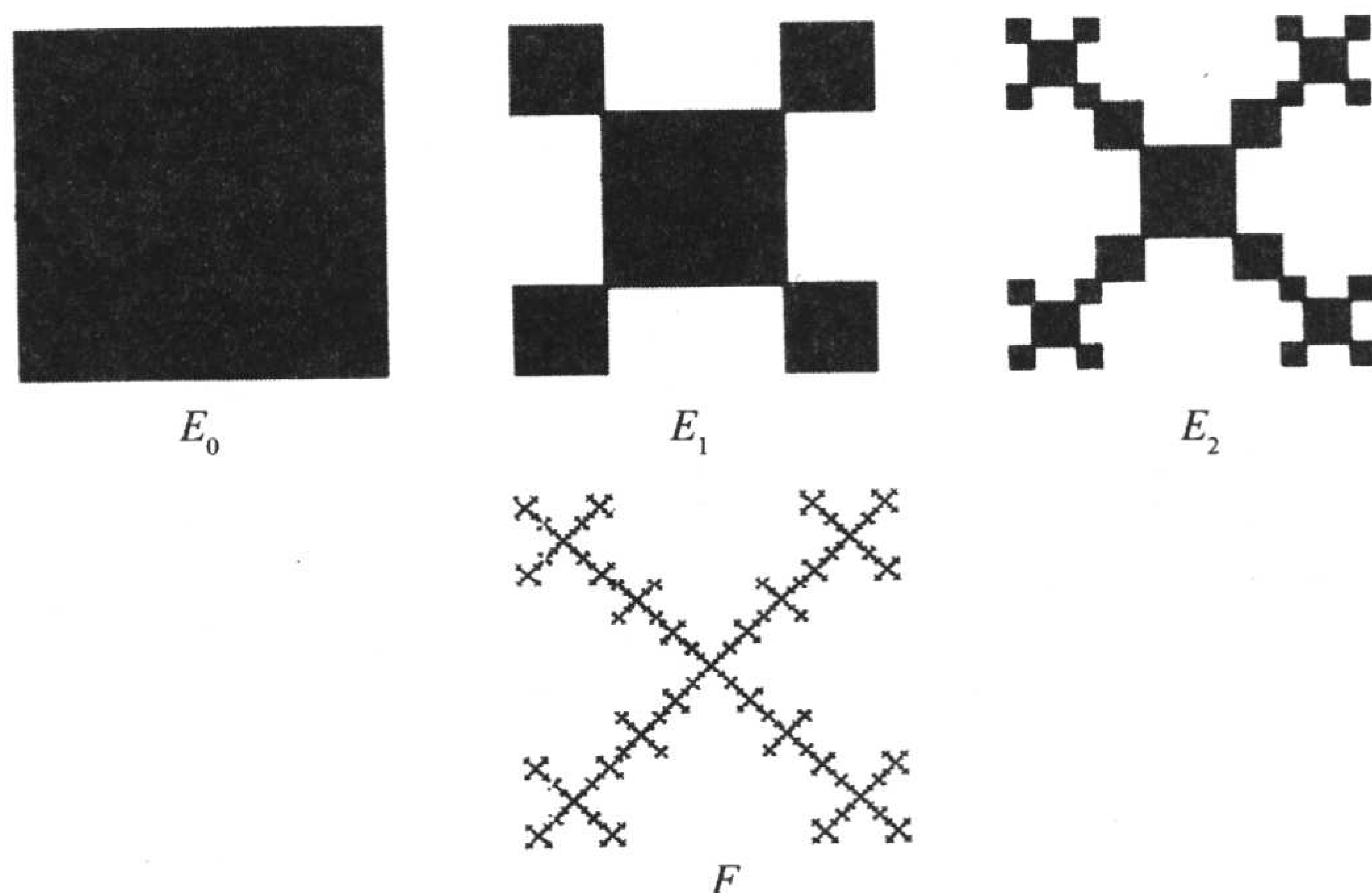



图 0.5 具有两个不同相似比的自相似分形的构造

还有许多其他的构造方式也可以得到具有这种类型性质的集, 其中有一些构造将在后面的部分详细讨论. 更错综复杂的 Julia 集如图 0.6 所示, 它是单变量二次

复变函数 $f(z)=z^2+c$ 的图像, 其中 $c$ 是适当的常数. 虽然这种集没有康托尔集和 von Koch曲线所具有的那种严格的自相似性, 但它具有 "拟自相似性", 即这个集的任意小的部分可以放大, 然后平滑地变形使之与这个集的某一较大的部分相一致.

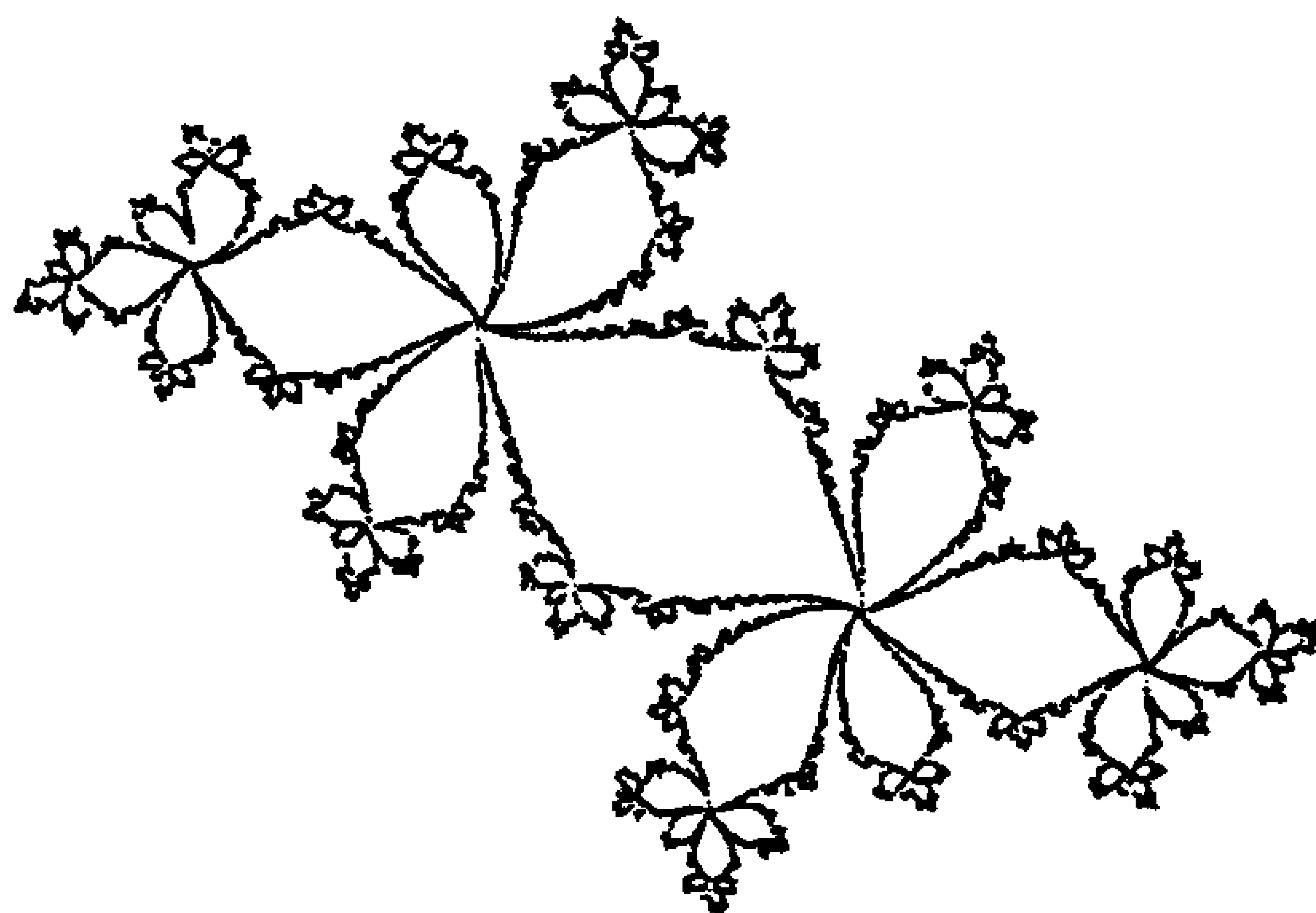


图 0.6　Julia 集

图 0.7 所示的是函数 $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-k/2}\sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k}t\right)$ 的图, 无穷项求和导致函数具有精细的结构, 而不像光滑的曲线那样可以用经典的微积分来研究.

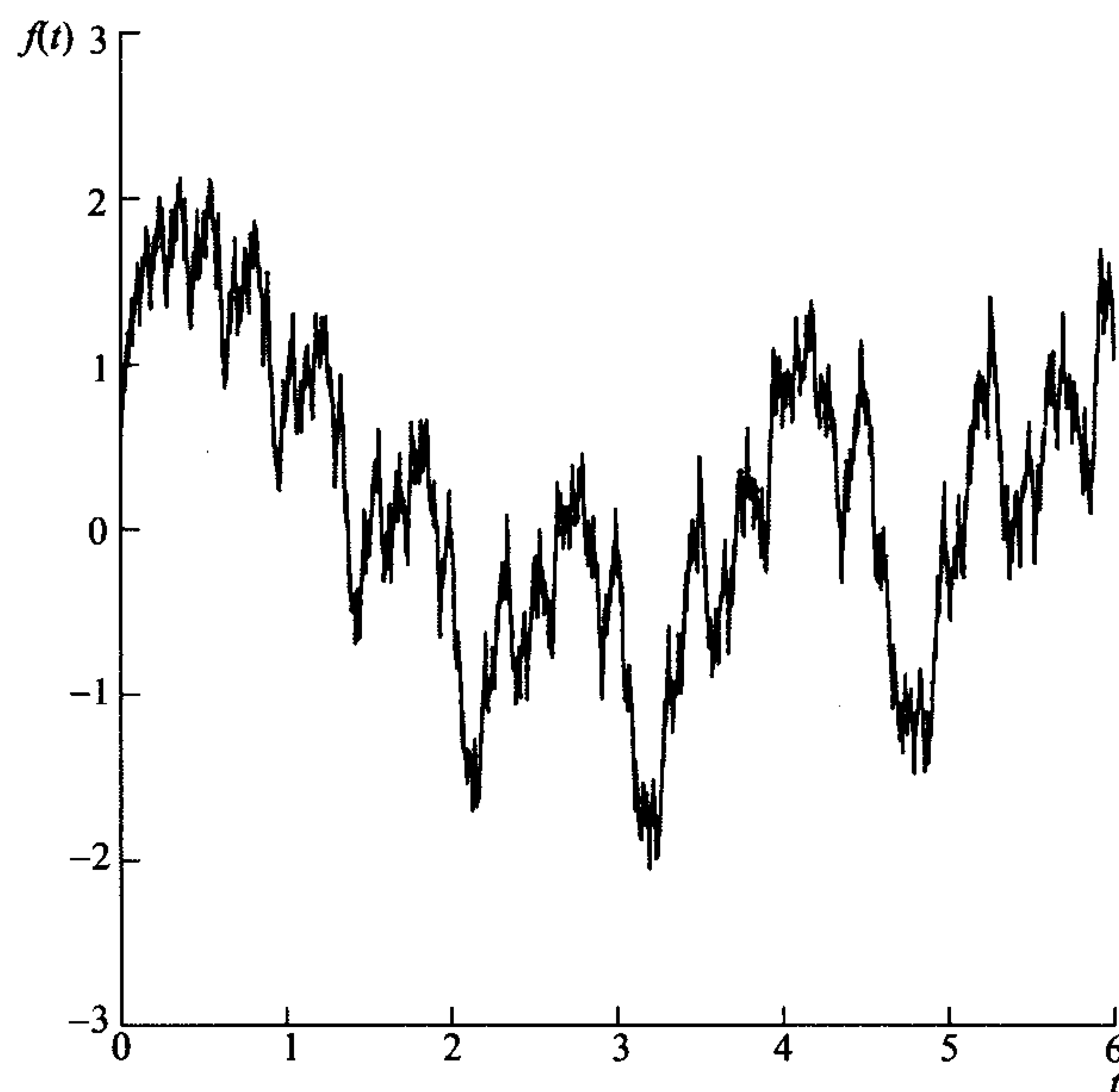



图 0.7　$f(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-k/2}\sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k}t\right)$ 的图

有些构造可以是“随机的”. 图 0.8 表示一个“随机 von Koch 曲线”, 在构造的每一步都是通过掷一枚硬币来决定一对新的直线段在曲线上的位置. 这个随机曲线确实具有精细的结构, 但von Koch曲线所具有的严格自相似性已被它所具有的“统计自相似性”取代.

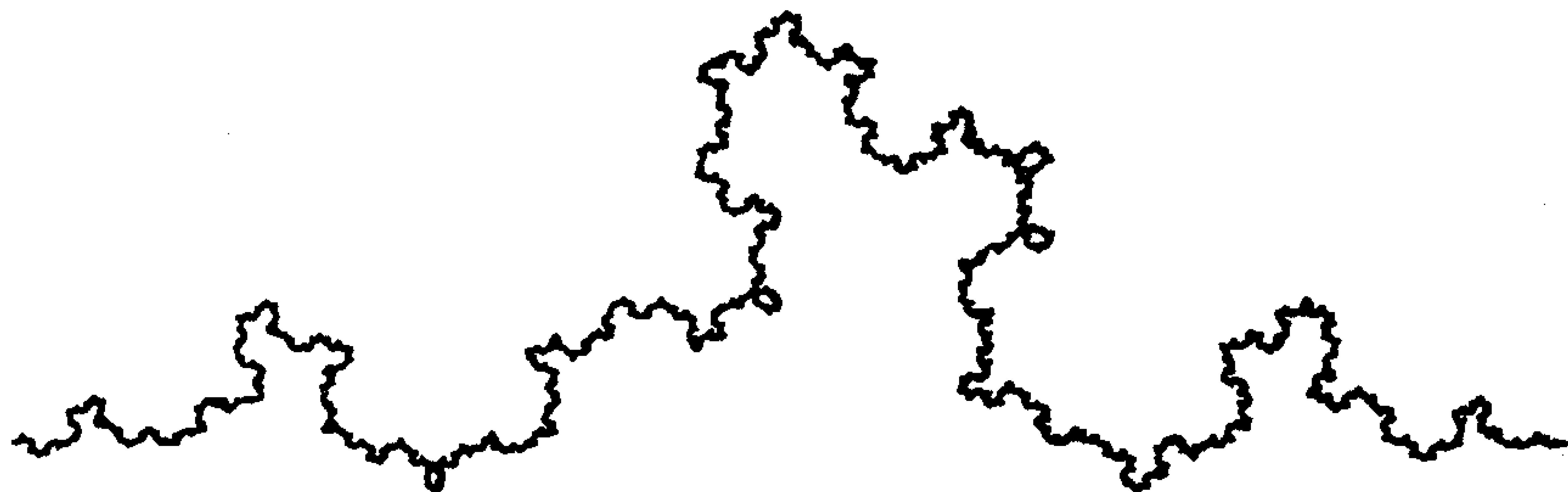


图 0.8 von Koch 曲线的随机版本

所有这些例子中的集, 普遍地称为*分形*(fractal)(单词 fractal 是由Mandelbrot在其论文中创造的新词, 来自拉丁文 fractus— 意为断裂, 用来描述一些非常不规则以至不适宜用经典几何研究的对象.) 类似康托尔集所具有的性质是分形的特性, 本书研究的对象正是具有这种性质的集. 确实, 任何能称为分形的集都有精细的结构, 即在任何尺度下都有精致的细节. 许多分形具有某种程度的自相似性, 它们由以某种方式与整体相似的部分组成. 有时这种相似的程度可以比严格的几何相似弱. 比如, 这种相似可以是近似的或统计的.

经典的几何和计算方法已经不适合用来研究分形, 我们需要另外的方法. 分形几何的主要工具是其许多形式的维数. 人们已经相当熟悉这样的思想, 一条 (光滑的) 曲线是一维的, 而一个曲面是二维的. 但不太清楚, 为了许多目的, 康托尔集被看成具有维数 $\ln 2/\ln 3 = 0.631\cdots$, von Koch曲线具有维数 $\ln 4/\ln 3 = 1.262\cdots$, 这个数与von Koch曲线大于一维 (具有无限的长度) 和小于二维 (具有零面积) 是相一致的.

下面的论述给出了这些维数意义 (很粗略) 的解释, 说明了维数是如何反映出比例性质和自相似性的. 如图 0.9 所示的一条直线段由与其相似的 4 个比例系数为 1/4 的直线段组成, 这个线段具有维数 $-\ln 4/\ln\frac{1}{4} = 1$; 然而, 一个正方形由 4 个与其相似的比例系数为 1/2 的正方形组成 (即边长为原来的一半), 其维数为 $-\ln 4/\ln\frac{1}{2} = 2$; 同样von Koch曲线是由 4 个与其相似的比例系数为 1/3 的相似形组成, 其维数为 $-\ln 4/\ln\frac{1}{3} = \ln 4/\ln 3$; 而康托尔集可以看成 4 个与其相似的相似比为 1/9 的部分组成, 其维数为 $-\ln 4/\ln\frac{1}{9}=\ln 2/\ln 3$. 一般地, 如果一个集由 $m$ 个与其相似的、相似比为 $r$ 的部分组成, 可以认为这个集具有维数 $-\ln m/\ln r$, 用这

样的方法得到的数字一般称为集的**相似维数**.

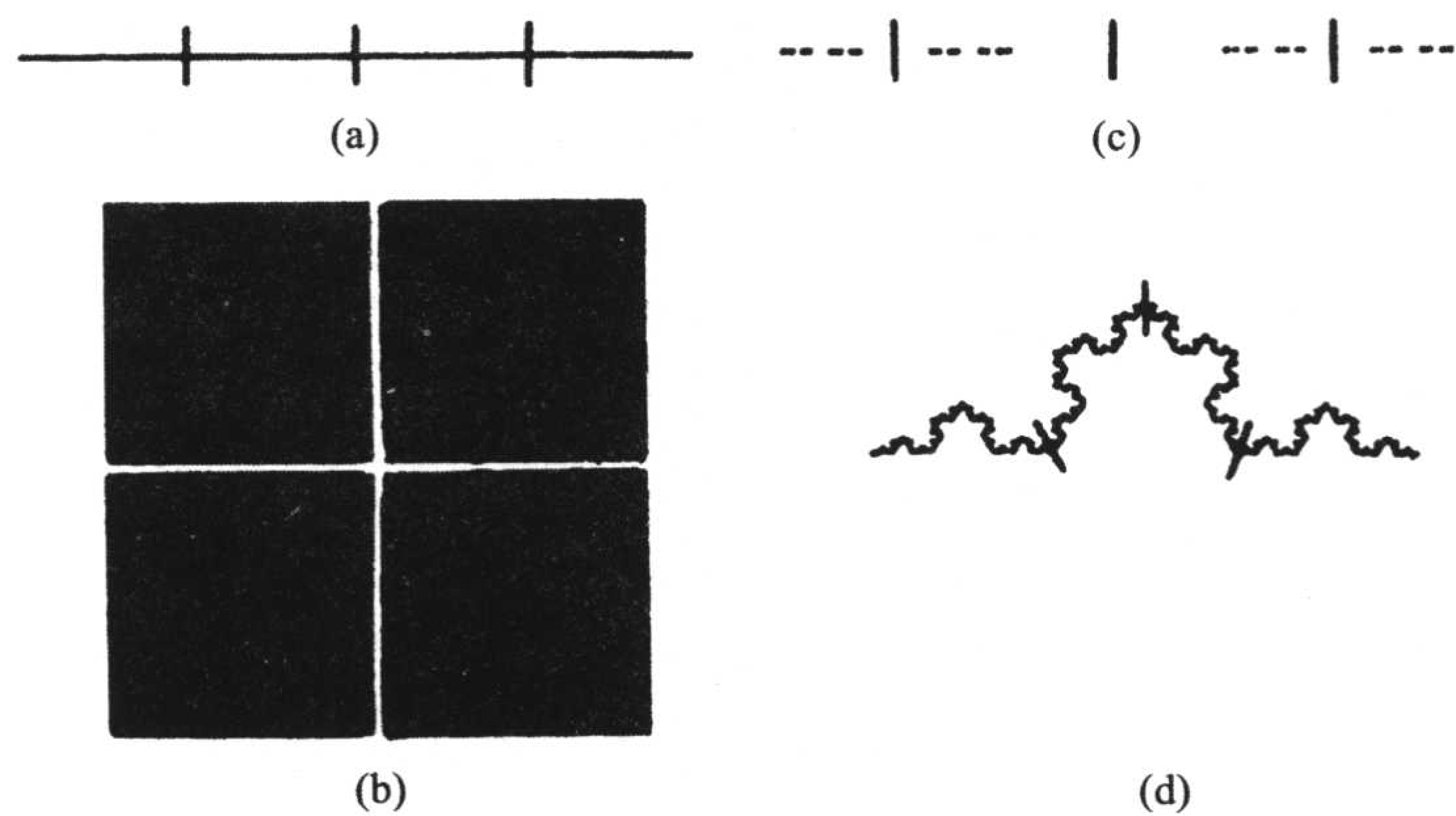


图 0.9　把某个集分成 4 部分, 部分按一定的比例与整体相似: (a) 对直线段是 1/4, (b) 对正方形是 1/2, (c) 对康托尔集是 1/9, (d) 对 von Koch 曲线是 1/3

遗憾的是相似维数只对严格自相似集这个小类有意义. 然而, 还存在有更广泛应用的维数的其他定义, 例如豪斯多夫维数和盒维数可以在任何集上定义并且可以证明在上面 4 个例子中正好与相似维数相等. 本书的前几章讨论豪斯多夫维数及其他维数的性质和定义, 同时还讲述计算维数的方法. 很粗略地看, 维数描述了一个集充满空间的程度. 它是在很小尺度下观测一个集时, 对这个集的不规则性的极好度量. 维数包含相应集合的几何性质的许多信息.

应该指出, 定义集合的维数有许多方法, 有些令人满意, 而另一些就差一点. 不同的定义可以有相当不同的性质, 并且对同一个集可以得出不同的维数值, 认识到这一点是重要的. 不一致的使用有时会产生相当大的混乱. 特别地, 一见到"分形维数"这个概念, 一种值得注意的想法就出现在我脑中 (正如其他数学家想的一样). 有些作者硬给它加上一些精确的定义, 我就曾见过在同一篇文章中, 对它相互矛盾的解释. 读者应该在任何讨论和应用中都时刻警惕所用的定义.

在Mandelbrot最初的论述中, 他将分形定义为其豪斯多夫维数严格大于拓扑维数的集合 (集合的**拓扑维数**总是整数, 当它是全不连通时维数为 0, 而当它的任意小的邻域都具有维数为 0 的边界时, 它的维数为 1, 并以此类推). 这个定义不合理, 因为它把一些明显应当是分形的集排除了. 人们还提出各种不同的定义, 但是似乎都有类似的缺点.

我认为, 对"分形"的定义可以采用与生物中对"生命"定义的同样处理方法. 生物中对"生命"并没有严格和明确的定义, 但却可以列出一系列生物的特性, 比如繁殖能力、运动能力及对周围环境的相对独立的存在能力等, 大部分生物都有上述

的特性, 虽然有一些生物例外. 同样, 对分形来说, 似乎最好把它看成具有如下性质的集合, 而不去寻找精确的定义, 因为这种定义肯定几乎总要排除掉一些有趣的情形. 从数学家的观点来看, 这样处理不是什么坏事. 很难避免不用既适用于 “分形” 又适用于 “非分形” 的方式来阐述维数的修改, 然而我们对 “非分形” 的性质兴趣较小, 它们一般很显然的且可以由其他较容易的方法得到.

称集 $F$ 是分形, 即认为它具有下面典型的性质:

(1) $F$ 具有精细结构, 即有任意小尺度的细节;

(2) $F$ 是如此的不规则, 以至它的整体和局部都不能用传统的几何语言来描述;

(3) $F$ 通常有某种自相似的形式, 可能是近似的或是统计的;

(4) 一般地, $F$ 的 “分形维数”(以某种方式定义) 大于它的拓朴维数;

(5) 在大多数令人感兴趣的情形下, $F$ 以非常简单的方法定义, 可能由迭代产生.

如何描述各种不同种类的分形物体的几何性质呢? 传统的几何为我们提供了思路. 在本书的第一部分, 我们研究了分形中一些与熟悉的几何性质相类似的性质. 空间中一个圆在平面上的垂直射影或称为 “影子” 一般是一个椭圆. 分形的射影定理阐述了分形 “影子” 的性质. 为了许多目的, 切线提供了对圆的很好的局部逼近, 虽然分形在任何方向上都没有切线, 但经常可以对分形的局部结构给予大量的描述. 平面中 “一般位置” 的两个圆或者相交于两点, 或者没有公共点 (把相切的情形视为例外). 利用维数, 对分形的交也可做出类似的阐述. 一个圆沿着垂直于它所在平面的方向运动扫描出一个圆柱, 这个圆柱的性质是与原来的圆紧密相关的. 对分形也可能有类似的结构, 这确实更一般化了.

人们对传统的几何有着内在的兴趣, 同时也把它广泛地应用在数学的其他领域. 如圆和抛物线作为某些微分方程的解曲线, 而对这些曲线的几何性质的认识能帮助我们理解相应的微分方程. 同样, 分形几何的一般理论也能应用到有分形发生的许多数学分支. 书中的第二部分给出了这种应用的各种例子.

从历史上看, 人们对几何的兴趣是受到它在自然中应用的刺激. 椭圆所起的重要作用是因为它是行星运动轨道的形状, 同样, 球的重要性也是因它像地球的形状. 椭圆和球的几何性质可以应用到这些物理模型中. 当然, 轨道不是严格椭圆的, 地球实际上也不是圆球形, 但为了许多目的, 比如预测行星的运动或研究地球的引力场, 这样的近似或许是非常理想的.

分形中也有类似的情形, 看一下最近的物理文献就可以发现, 各种不同的自然物体都用分形来描述, 云彩的边界、地表面的形状、海岸线和流体的湍流等, 这些例子没有一个是真正的分形, 用充分小的尺度观测时, 它们的分形特征就消失了. 然而在一定的尺度范围内, 它们表现出许多类似分形的性质, 而在这样的尺度下, 它们通常可以被看成是分形.Mandelbrot在最初的著作中, 强调指出了自然界的分形与我们

通常描述的数学中的 "分形集" 的区别, 但这个区别似乎有些不明显. 实际上, 自然界中没有真正的分形 (也没有真正的直线和圆).

如果分形几何的数学问题确实是值得研究的, 则它一定能应用在物理问题中. 在这个方向上已取得并正取得很多进展, 本书的最后一部分给出了一些例子. 尽管有一些自然现象已经应用分形数学进行解释 (布朗运动是一个很好的例子), 但是大部分的应用都倾向于解释而非预测性的. 尽管更多的数学应用于分形, 但分形研究中应用的数学都不是很新. 为了分形研究的进展, 应当优先发展和应用合适的数学方法.

## 注记和参考文献

与本书其他部分只包含纯粹的数学不同, 绪论中包含一些作者个人的观点和一家之见, 这不是其他研究分形的学者们共有的, 请读者注意.

有关分形的基础论文是 Mandelbrot (1982) 科学的、哲学的并带有插图的论著 (由 1975 年的原始版本发展而成), 它能被各种层次的人理解, 文中包含了多样性的自然的数学例子. 这本著作是许多已经做出的分形研究成果的源泉.

已经出版了许多有关分形各方面内容的书, 这些都列举在各相应章的末尾. 这里给出的只是从大量的文献中选出的一些. 有关分形的基本论述包括以下这些书: Schroeder(1991), Moon(1992), Kaye(1994), Addison(1997), 以及 Lesmoir-Gordon, Rood and Edney(2000). Peitgen, Jürgens and Saupe(1992) 包含了极其丰富的图像和例子, Framem and Mandelbrot(2002) 则提出了在数学与科学教育中的分形原则.

Edgar(1990,1998), Peitgen, Jürgens and Saupe(1992) 以及 Le Méhauté(1991) 阐述了对分形的基本数学处理方法, Falconer(1985a), Mattila(1995), Federer(1996) 以及 Morgan(2000) 重点讨论了几何测度论, Roger(1998) 则论述了豪斯多夫测度的一般理论, Wicks(1991) 是从非标准分析的角度讨论了豪斯多夫测度. 侧重于计算机技术的则包括 Peitgen 和 Saupe(1988), Devaney and Keen(1989), Hoggar(1992) 以及 Pickover(1998) 这些书. 本书的续篇, Falconer(1997)—— 则包含了更多的研究分形的新的数学技巧.

更多的关注可以在分形数学会议的会议文集里找到, 比如分别由 Cherbit(1991), Evertsz, Peitgen 和 Voss(1995) 以及 Novak(1998, 2000) 编辑的论文集. 由 Bandt, Graf 和 Zähle(1995, 2000) 编选的文集包含了分形与概率的内容, Lévy Véhel, Lutton 和 Tricot(1997) 编辑的文集论述了分形在工程上的应用. Mandelbrot 的 "精选" (1997,1999,2002) 提供了大量的带有评论的论文, 这些文章是对分形数学及科学的发展和目前状况的非常吸引人的深入的洞察.Edgar(1993) 编选的文集则把分形数

学的经典论文收集到一起.

在很多杂志上都有分形的文章, 特别是《分形》杂志的论文, 它们涉及不同领域里的、范围广阔的分形理论与应用.

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

# 精选大师名作 打造专业品牌

TURING 图灵教育

图灵数学统计学系列丛书（含影印版和中文版）致力于引进国外优秀数学统计学教材。入选图书有的是国际各大名校竞相采用的顶级教材，久为国内学界瞩目；有的属于计算数学和金融数学等教学、科研和应用的热点领域，填补了国内教材的空缺；更有众多在国际学术界享有盛誉的大师名作，有些著作原版已经印行达40次以上，至今仍畅销不衰。丛书从选材、引进、翻译到出版，得到了齐民友、路见可、胡迪鹤、叶中行、陆金甫、龚光鲁等国内数学统计学界老中青三代专家的鼎立支持。



书　名：应用随机过程：概率模型导论（英文版·第9版）
原书名：Introduction to Probability Models
作　者：[美] Sheldon M. Ross
书　号：978-7-115-16023-2
定　价：89.00元
出版时间：2007年6月



书　名：应用数值线性代数
原书名：Applied Numerical Linear Algebra
作　者：[美] James W. Demmel
译　者：王国荣
书　号：978-7-115-15511-5/O1·6
定　价：49.00元
出版时间：2007年5月



书　名：线性代数及其应用（第3版修订版）
原书名：Linear Algebra and Its Applications,
作　者：[美] David C. Lay
译　者：沈复兴 傅莺莺 莫单玉 等
书　号：978-7-115-15994-6
定　价：69.00元
出版时间：2007年7月



书　名：运筹学导论：初级篇（英文版·第8版）
原书名：Operations Research: An Introduction
作　者：[美] Hamdy A. Taha
书　号：978-7-115-16066-9
定　价：59.00元
出版时间：2007年6月
中文版也将于2007年底出版



书　名：运筹学导论：高级篇（英文版·第8版）
原书名：Operations Research: An Introduction
作　者：[美] Hamdy A. Taha
书　号：978-7-115-16065-2
定　价：59.00元
出版时间：2007年6月
中文版也将于2008年出版

## 无限精彩，纷至沓来

图灵原版数学·统计学系列　图灵数学·统计学丛书　高等院校数学·统计学教材系列

书　名：图论导引
原书名：Introduction to Graph Theory
作　者：[美] Gary Chartrand, Ping Zhang
译　者：范益政 汪毅 龚世才 朱明
估　价：49.00元
出版时间：2007年7月

书　名：随机过程初级教程(第2版)
原书名：A First Course in Stochastic Processes
作　者：[美] Samuel Karlin, Howard M.Taylor
译　者：庄兴无 陈宗洵 陈庆华
估　价：59.00元
出版时间：2007年8月

书　名：随机过程初级教程(英文版·第2版)
原书名：A First Course in Stochastic Processes
作　者：[美] Samuel Karlin, Howard M.Taylor
估　价：69.00元
出版时间：2007年9月

书　名：多复变导论(英文版·第3版修订版)
原书名：An Introduction to Complex Analysis in Several Variables
作　者：[美] Lars Hormander
估　价：35.00元
出版时间：2007年9月

---

书　名：概率论基础教程（英文版·第7版）
原书名：A First Course in Probability
作　者：[美] Sheldon M. Ross
估　价：69.00元
出版时间：2007年9月

书　名：概率论与测度论(英文版·第2版)
原书名：Probability & Measure Theory
作　者：[美]Robert B. Ash, Catherine A. Doleans-Dade
估　价：59.00元
出版时间：2007年9月

书　名：微分流形与黎曼几何引论（英文版·第2版修订版）
原书名：An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry
作　者：[美] William M. Boothby
估　价：59.00元
出版时间：2007年9月

书　名：数论导引（第5版）
原书名：An Introduction to the Theory of Numbers
作　者：[英] G. H. Hardy, E. M. Wright
译　者：张明尧（华东理工大学）
估　价：49.00元
出版时间：2007年8月

---

书　名：应用随机过程:概率模型导论(第9版)
原书名：Introduction to Probability Models
作　者：[美] Sheldon M. Ross
译　者：龚光鲁（清华大学）
估　价：69.00元
出版时间：2007年8月

书　名：近世代数概论(英文版·第5版)
原书名：A Survey of Modern Algebra
作　者：[美](Garrett Birkhoff, Sauders Mac Lane
估　价：59.00元
出版时间：2007年8月
中文版也将于2008年出版

书　名：概率论及其应用 (第2卷)
原书名：An Introduction to Probability Theory and Its Applications
作　者：[美] 威廉·费勒
译　者：郑元禄
估　价：69.00元
出版时间：2007年9月

书　名：分形几何—数学基础及其应用(第2版)
原书名：Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications
作　者：[美] Kenneth Falconer
译　者：曾文曲
估　价：39.00元
出版时间：2007年9月

---

书　名：微分方程、动力系统和混沌导引
原书名：Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos
作　者：[美] Morris W. Hirsch,Stephen Smale, Robert L. Devaney
译　者：甘少波
估　价：49.00元
出版时间：2007年10月

书　名：金融工程原理
原书名：Principles of Financial Engineering
作　者：[美] Salih N. Neftci
译　者：陈典发
估　价：59.00元
出版时间：2007年10月

书　名：SPSS统计初步 (第2版)
原书名：Discovering Statistics Using SPSS
作　者：[英]Andy Field
译　者：林海波等
估　价：59.00元
出版时间：2007年10月

书　名：泛函分析
原书名：Functional Analysis
作　者：Peter D. Lax（美国国家科学院院士）
译　者：蔿力明 等
估　价：59.00元
出版时间：2007年10月

---

书　名：微分观点看拓扑（双语版）
原书名：Topology from the Differentiable Viewpoint
作　者：[美] John Willard Milnor
译　者：熊金城（华南师范大学）
估　价：29.00元
出版时间：2008年6月

书　名：实验设计与分析（第6版）
原书名：Design and Analysis of Experiments
作　者：[美] Douglas C. Montgomery
译　者：汪仁官 傅珏生 等
估　价：69.00元
出版时间：2007年10月

书　名：复分析：可视化方法
原书名：Visual Complex Analysis
作　者：[美] Tristan Needham
译　者：齐民友
估　价：59.00元
出版时间：2007年10月

书　名：微积分入门Ⅰ：一元微积分
原书名：解析入門Ⅰ
作　者：[日]小平邦彦
译　者：裴东河 等
估　价：25.00元
出版时间：2007年12月
微积分入门Ⅱ：多元微积分 也随后出版

---

书　名：统计计算
原书名：Computational Statistics
作　者：Geof H. Givens, Jennifer A. Hoeting
译　者：王兆军等（南开大学）
估　价：45.00元
出版时间：2008年7月

书　名：损失模型:从数据到决策(第2版)
原书名：Loss Models: From Data To Decisions, Second Edition
作　者：[美] Stuart A. Klugman 等
译　者：吴岚 等（北京大学）
估　价：69.00元
出版时间：2008年6月

书　名：多元统计分析导论(第3版)
原书名：An Introduction to Multivariate Statistical Analysis
作　者：[美] T. W. Anderson
译　者：张润楚 等（南开大学）
估　价：69.00元
出版时间：2008年7月

书　名：数值分析
原书名：Numerical Analysis
作　者：[美] Timothy Sauer
译　者：吴兆金 等（南京大学）
估　价：55.00元
出版时间：2008年8月

---

户　名：北京图灵文化发展有限公司　开户行：工商银行北京翠微路支行金四季分理处　账　号：0200296209200003993
地　址：北京市海淀区西四环北路140号京鼎原商务楼405室　邮　编：100097 人民邮电出版社 图灵公司市场部
电　话：010-88592340，88593802　传　真：010-88593803　E-mail：contact@turingbook.com　网址：http://www.turingbook.com

# 目 录

# 第一部分

# 基　　础

# 第 1 章　数学基础

本章将复述在本书中用到的一些基本数学概念和符号：1.1 节和 1.2 节分别简明地介绍了集合论和函数论, 对这些内容不熟悉的读者可以参考更详细的数学分析教材; 测度和质量分布在分形理论上起着重要的作用, 1.3 节给出一种适合于需要的方法, 通过让读者相信某个测度的存在能够避免许多与测度理论相联系的技巧上的困难; 1.4 节给出了有关概率论的一些注记, 理解这些对于学习第 15 章和第 16 章是必要的.

## 1.1　集合论基础

本节回忆集合论和点集拓扑理论的一些基本概念.

本书一般只在 $n$维欧氏空间$\mathbf{R}^n$ 中讨论问题, 这里 $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ 为实数集合或 "实直线"; $\mathbf{R}^2$ 为 (欧几里得) 平面. $\mathbf{R}^n$ 中的点通常用小写字母来表示, 如 $x, y$ 等, 有时也用坐标形式表示, 如 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$. $\mathbf{R}^n$ 上的加法运算和数乘运算以通常的方式定义, 即 $x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n), \lambda x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$, 这里 $\lambda$ 是实数. $\mathbf{R}^n$ 上的欧几里得距离或度量为通常的欧几里得距离, 即：$\mathbf{R}^n$ 中的两点 $x, y$ 之间的距离为 $|x - y| = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2)^{1/2}$. 特别地, 对 $x, y, z \in \mathbf{R}^n$, 有三角不等式 $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ 和反向三角不等式 $|x - y| \geqslant ||x| - |y||$, 及度量三角不等式 $|x - y| \leqslant |x - z| + |z - y|$.

集合一般指 $\mathbf{R}^n$ 中的子集, 用大写字母来表示, 如 $E, F, U$ 等. 通常, $x \in E$ 表示点 $x$ 属于集合 $E$, 而 $E \subset F$ 表示集合 $E$ 为集合 $F$ 的子集, 记 $\left\{x : \text{条件}\right\}$ 表示由满足 "条件" 的 $x$ 组成的集合. 经常出现的集合用特殊的符号来表示：空集, 即不包括任何元素的集合, 记为 $\varnothing$; 由全体整数组成的集合记为 $\mathbf{Z}$; 由全体有理数组成的集合记为 $\mathbf{Q}$. 用上标 "+" 表示集合中的正元素, 于是 $\mathbf{R}^+$ 表示正实数集, $\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集. 有时, 由全体复数组成的集合记为 $\mathbf{C}$, 由于复数 $x_1 + ix_2$ 与平面上的点 $(x_1, x_2)$ 相对应, 所以很多情况下把 $\mathbf{C}$ 看成与平面 $\mathbf{R}^2$ 是同构的.

中心在点 $x$, 半径为 $r$ 的闭球定义为 $B(x, r) = \{y : |x - y| \leqslant r\}$; 类似地, 开球定义为 $B^0(x, r) = \{y : |y - x| < r\}$. 于是闭球包含作为边界的球面, 而开球则不包含球面. 当然 $\mathbf{R}^2$ 中的球是一个圆盘, 而 $\mathbf{R}^1$ 中的球是一个区间. 如果 $a < b$, 记 $[a, b]$ 表示闭区间$\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$; 而 $(a, b)$ 表示开区间$\{x : a < x < b\}$; 同样地, $[a, b)$ 表示半开区间 $\{x : a \leqslant x < b\}$ 等等.

集合 $\{y = (y_1, \cdots y_n) : |y_i - x_i| \leqslant r, i = 1, \cdots, n\}$ 表示中心在点 $x = (x_1, \cdots x_n)$, 边长为 $2r$ 的坐标立方体. ($\mathbf{R}^2$ 中的坐标立方体为正方形, $\mathbf{R}^1$ 中的坐标立方体为一区间. )

有时我们用 $A_\delta$ 表示集合 $A$ 的 $\delta$邻域, 或称 $A$ 的 $\delta$平行体, 即 $A_\delta$ 表示与 $A$ 中点的距离不大于 $\delta$ 的点的集合, 即 $A_\delta = \{x :$ 存在 $A$ 中的点 $y$, 使$|x - y| \leqslant \delta\}$(见图 1.1).

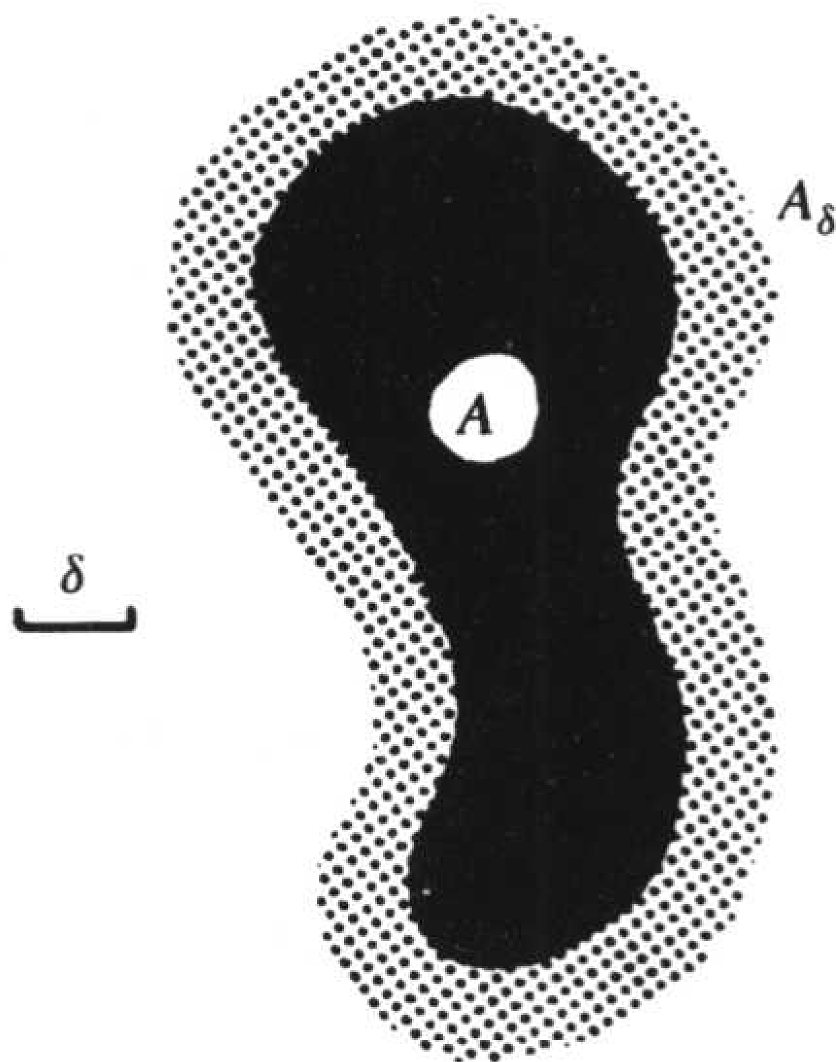



图 1.1 集 $A$ 和它的 $\delta$ 邻域 $A_\delta$

由属于集 $A$ 或者集 $B$ 的点组成的集合称为集 $A$ 与集 $B$ 的并集, 记为 $A \bigcup B$; 由既属于集 $A$ 又属于集 $B$ 的点组成的集合称为集 $A$ 与集 $B$ 的交集, 记为 $A \bigcap B$. 更一般地, $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ 表示任一集合类 $\{A_\alpha\}$的并集, 即由至少属于 $A_\alpha$ 中之一的点组成的集合; 而 $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ 表示集合类 $\{A_\alpha\}$的交集, 即由属于所有 $A_\alpha$ 的点组成的集合. 一集类称为不相交的, 假如集类中的任意两集合的交集为空集. 由属于集 $A$ 但不属于集 $B$ 的点组成的集合称为集 $A$ 与集 $B$ 的差集, 记为 $A \backslash B$. 集 $\mathbf{R}^n \backslash A$ 称为集 $A$ 的余集.

所有有序对 $\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ 组成的集合称为集 $A$ 与集 $B$ 的乘积(笛卡儿) 集, 记为 $A \times B$, 若 $A \subset \mathbf{R}^n$, $B \subset \mathbf{R}^m$, 则 $A \times B \subset \mathbf{R}^{n+m}$.

若 $A$ 和 $B$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的子集, $\lambda$ 为实数, 定义集合的向量和为 $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$, 数乘为 $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$.

一个无穷集合 $A$ 称为可数的, 假定它的元素可以列成 $x_1, x_2, \cdots$ 的形式, 集 $A$ 的每一元素出现在列中的指定位置上; 否则称集 $A$ 为不可数的. 集 $\mathbf{Z}$ 与集 $\mathbf{Q}$ 都是可数的, 但 $\mathbf{R}$ 是不可数的. 注意: 可数个可数集仍是可数的.

若 $A$ 为任意非空的实数集合, 则集 $A$ 的上确界$\sup A$ 是使得对所有的 $x \in A$ 都有 $x \leqslant m$ 成立的最小数 $m$; 若这样的数 $m$ 不存在, 则其上确界为 $\infty$. 同样地, 集 $A$ 的下确界$\inf A$ 是使得对所有的 $x \in A$ 都有 $x \geqslant m$ 成立的最大数 $m$; 若这样的数不

存在，则其下确界为 $-\infty$. 集合的上确界与下确界直观地被认为是集合的最大值与最小值，但要注意到上确界与下确界不一定是集合中的元素，比如 sup(0,1)=1，但是 $1 \notin (0,1)$. 用 $\sup_{x\in B}()$ 表示括号内的数集的上确界，这个数是由 $x$ 取遍 $B$ 中所有值而得到的.

$\mathbf{R}^n$ 中 (非空) 子集 $A$ 的直径$|A|$ 定义为 $A$ 中任意两点间的最大距离，即 $|A| = \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$. 在 $\mathbf{R}^n$ 中半径为 $r$ 的球的直径为 $2r$，边长为 $\delta$ 的立方体的直径为 $\delta\sqrt{n}$. 集 $A$ 称为*有界的*，假如它有有限的直径，或者等价地它可以包含于某个 (充分大的) 球内.

序列的收敛与通常定义一样. 我们称当 $k \to \infty$，$\mathbf{R}^n$ 中的序列 $\{x_k\}$*收敛于* $\mathbf{R}^n$ 中的一点 $x$ 是指若任给 $\varepsilon > 0$，存在数 $K$，使得当 $k > K$ 时，$|x_k - x| < \varepsilon$，也就是 $|x_k - x|$ 趋于 0. 数值 $x$ 称为该序列的*极限*，记为 $x_k \to x(k \to \infty)$，或者 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

把上面描述的有关球的 "开" 与 "闭" 的思想应用到更一般的集合上. 直观地，若一个集包含它的边界便称其为闭的，若它不包含其边界的任何点则称其为开的. 更严格地讲，$\mathbf{R}^n$ 的子集 $A$ 称为*开的*，如果对 $A$ 中所有的点 $x$，都有以 $x$ 点为中心具有正半径的球 $B(x,r)$ 含于集 $A$ 中. 称集 $A$ 为闭的，如果集 $A$ 中的任一收敛序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\mathbf{R}^n$ 上的点 $x$，而 $x$ 在 $A$ 中 (见图 1.2). 集 $\varnothing$ 与 $\mathbf{R}^n$ 被认为既是开的又是闭的.

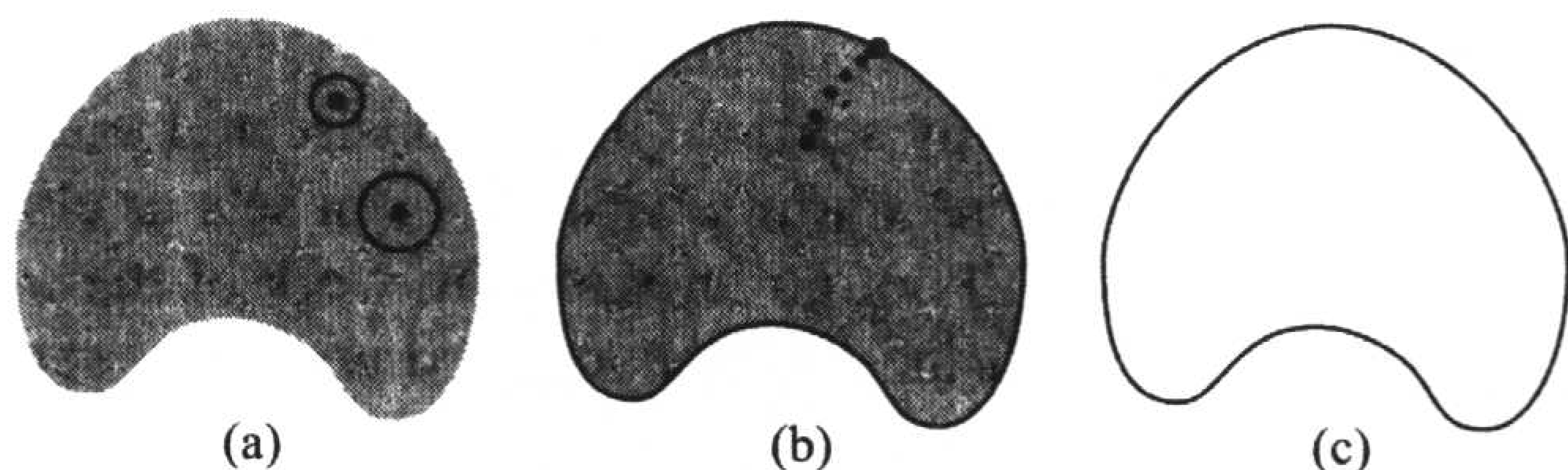



图 1.2 (a) 开集 —— 存在包含于集内的以集中任一点为球心的球; (b) 闭集 —— 集内任何收敛的点列的极限点都在集内; (c) (a) 或 (b) 中集的边界

可以证明集 $A$ 为开的其充要条件是它的余集为闭的. 任意多个开集的并为开集，任意有限个开集的交为开集; 任意多个闭集的交集为闭集，任意有限个闭集的并集为闭集 (见练习 1.6).

集 $A$ 称为点 $x$ 的*邻域*，假如存在以点 $x$ 为中心的某个 (小) 球 $B(x,r)$ 包含于 $A$ 中.

所有包含集 $A$ 的闭集的交集称为 $A$ 的*闭包*，记为 $\overline{A}$; 所有包含于集 $A$ 中的开集的并集称为 $A$ 的*内部*，记为 $\mathrm{int}(A)$. $A$ 的闭包是包含 $A$ 的最小闭集; $A$ 的内部是包含于 $A$ 的最大开集. $A$ 的*边界*$\partial A = \overline{A}\backslash\mathrm{int}(A)$，因此 $x \in \partial A$ 当且仅当对任意 $r > 0$，球 $B(x,r)$ 既与 $A$ 相交，也与 $A$ 的余集相交.

集 $B$ 称为集 $A$ 的*稠子集*, 假如 $B \subset A \subset \overline{B}$, 即对于集 $A$ 的每一点都有集 $B$ 中的点与其任意接近.

集 $A$ 称为*紧的*, 假如对任意覆盖 $A$(即并集包含 $A$) 的开集类中都存在有限个开集仍覆盖 $A$. 在数学上紧性是一个非常有用的性质, 它能使满足一定条件的无穷多集合归并为有限多个. 然而, 就本书而言, 把 $\mathbf{R}^n$ 中的紧子集看成是有界闭集即可.

任意紧集类的交集仍为紧的, 可以证明, 如果 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ 为一不增的紧集序列, 则交集 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 是非空的, 见练习 1.7. 同时, 如果对于某个开集 $V$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 包含于 $V$ 中, 则存在某个 $k$, 使有限交集 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$ 也包含于 $V$ 中.

$\mathbf{R}^n$ 的子集 $A$ 称为*连通的*, 假如不存在两个开集 $U$ 与 $V$, 使得 $U \bigcup V$ 包含 $A$, 而 $A \bigcap U$ 与 $A \bigcap V$ 非空且不相交. 直观地, 如果集 $A$ 只由一 "整块" 组成, 则认为它是连通的. 包含点 $x$ 的最大连通集称为点 $x$ 的*连通部分*, 集 $A$ 称为*全不连通的*, 假如它的每一点的连通部分仅含这一点. 对于集 $A$ 中的任意两点 $x$ 与 $y$, 如果存在不相交的开集 $U$ 与 $V$, 使得 $x \in U, y \in V$, 且 $A \subset U \bigcup V$, 显然集 $A$ 是全不连通的.

还必须进一步提到一种集类, 然而不直接给出它的精确定义, 对本书读者不会有太大的妨碍. 这就是*博雷尔集类*, 即 $\mathbf{R}^n$ 中满足下列性质的最小集类.

(a) 每一个开集和每一个闭集都是博雷尔集.

(b) 任意有限个博雷尔集的交或并, 任意可数个博雷尔集的交或并都是博雷尔集.

实际上, 在本书中人们感兴趣的任何 $\mathbf{R}^n$ 的子集都是博雷尔集. 所以由任意可数个开集或闭集的并或交所构造的集仍为博雷尔集. 如果我们假定书中所遇见的集都是博雷尔集, 读者在学习本书所论述的这些内容时是不会有多少偏差的.

## 1.2 函数和极限

设 $X, Y$ 为任意集. 从 $X$ 到 $Y$ 的一个*映射*、*函数*或者*变换*$f$, 是指对于 $X$ 中的每一点 $x$, 都有 $Y$ 中一点 $f(x)$ 与之对应的一种规则或公式. 用 $f: X \to Y$ 表示这种情形, $X$ 称为 $f$ 的*定义域*, $Y$ 称为 $f$ 的*值域*. 如果 $A$ 是 $X$ 中的任一子集, 则我们记 $f(A)$ 表示 $A$ 的映像$\{f(x): x \in A\}$. 如果 $B$ 为 $Y$ 的任一子集, 则 $f^{-1}(B)$ 表示 $B$ 的*逆映像*或 $B$ 的*原像*, 也就是集合 $\{x \in X: f(x) \in B\}$, 注意到, 一个单点的原像能够包含多个点.

函数 $f: X \to Y$ 称为*单射*或*一一函数*, 如果 $x \neq y$, 则 $f(x) \neq f(y)$; 即 $X$ 中不同元素的映像是 $Y$ 中的不同元素. 函数 $f$ 称为*满射*或*映上函数*, 假如对 $Y$ 中的每一元素 $y$, 都有 $X$ 中的元素 $x$, 使得 $f(x) = y$; 即 $Y$ 中的每一元素都是 $X$ 中某元素

的像. 若一个函数 $f$ 既是单射又是满射, 则称其为 $X,Y$ 之间的**双射**或**一一对应关系**. 若 $f:X\to Y$ 为一双射, 则可以定义**反函数**$f^{-1}:Y\to X$, $f^{-1}(y)$ 表示 $X$ 中使得 $f(x)=y$ 的唯一的元素 $x$. 所以, 此时对 $x\in X$ 有 $f^{-1}(f(x))=x$; 对 $y\in Y$ 有 $f(f^{-1}(y))=y$.

函数 $f:X\to Y$ 与函数 $g:Y\to Z$ 的**复合函数**定义为函数 $g\circ f:X\to Z$, 满足 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, 显然这个定义可以推广到任意有限个函数复合的情形.

从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的某些函数具有特殊的几何意义, 在这个意义上它们通常被称为变换, 用大写字母表示, 意义如图 1.3 所示. 变换 $S:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 称为**全等变换**或**保距变换**, 假如它保持距离不变, 即对 $x,y\in\mathbf{R}^n, |S(x)-S(y)|=|x-y|$. 全等变换也保持角度不变, 把集变换到一个几何全等集. 特殊情况包括**平移**, 即具有形式 $S(x)=x+a$ 的变换, 在这个变换中, 所有的点都移动了一个与 $a$ 平行的向量; 还有中心在 $a$ 的**旋转**$S$, 满足 $|S(x)-a|=|x-a|$(为方便起见, 可认为恒等变换 $I(x)=x$ 为一旋转变换). **反射**是将点映射到关于某个 $(n-1)$ 维超平面对称的镜像点. 全等变换可由旋转与平移的复合而得到, 即不包括反射, 它也称为**刚体运动**或**直接全等**. 变换 $S:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 称为**相似变换**, 假如存在常数 $c$, 使得 $|S(x)-S(y)|=c|x-y|$, $x,y\in\mathbf{R}^n$. 相似变换把集变换成一个几何相似的集, 它们的相似比是因子 $c$.

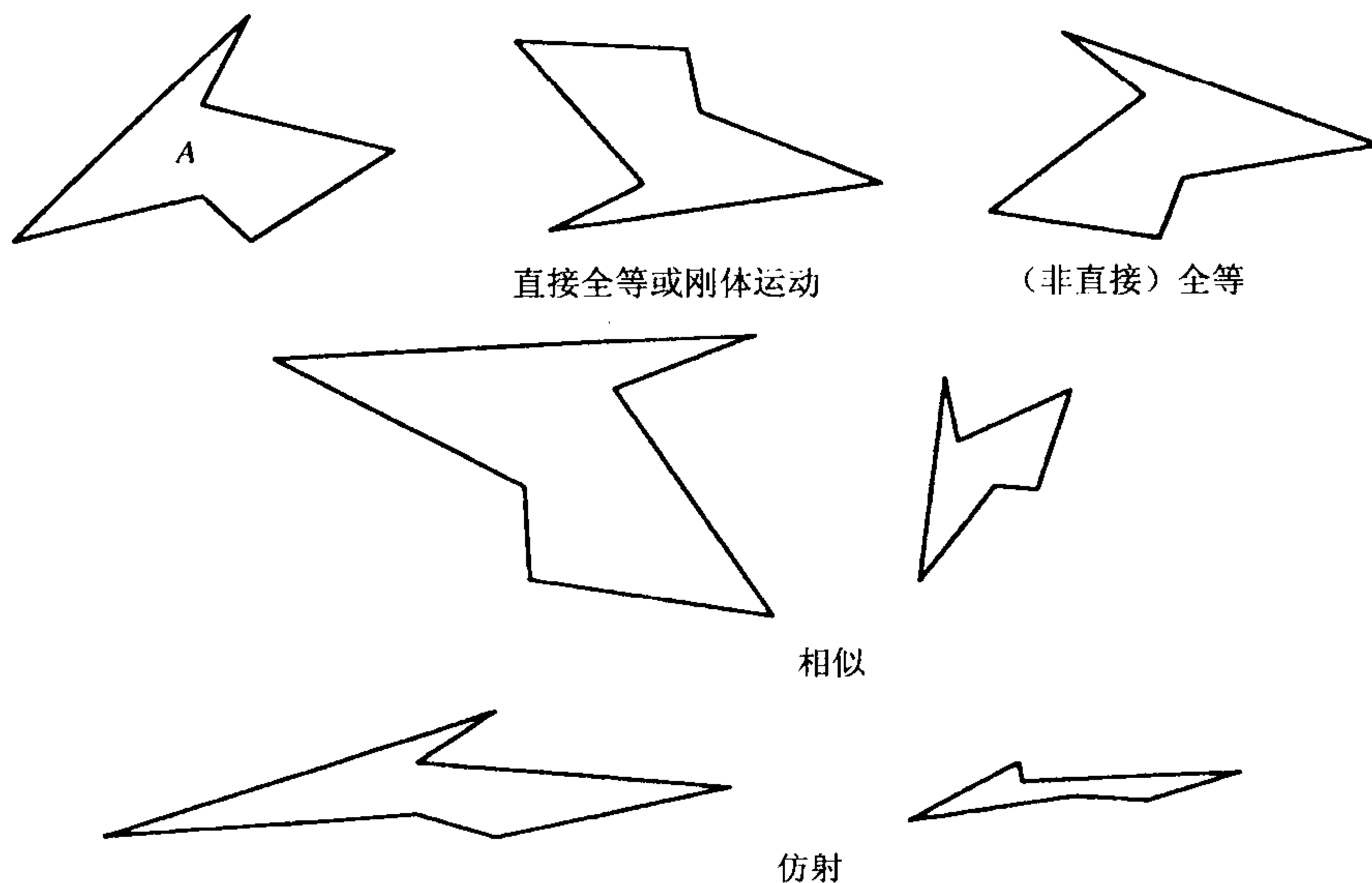



图 1.3 对集 $A$ 各种变换的作用

变换 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 称为**线性的**, 假如它满足 $T(x+y)=T(x)+T(y)$ 及

$T(\lambda x) = \lambda T(x), x, y \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}$. 线性变换可以按通常的方法用相应的矩阵表示. 线性变换 $T$ 称为非奇异的, 假如 $T(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 时成立. 若 $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 具有形式 $S(x) = T(x) + a$, 这里 $T$ 为非奇异线性变换, $a$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中一点; 则 $S$ 称为仿射变换或仿射. 仿射可以认为是裁剪变换; 它在不同方向可以有不同的压缩或扩张. 然而, 如果 $T$ 是正交的, 则 $S$ 是全等的; 当 $T$ 是数乘的或者是一个正交变换, 则 $T$ 是相似的.

需要指出的是, 这类变换在映射的复合下构成群. 例如, 两个平移的复合仍为一平移, 恒等变换可看为是零平移, 平移的逆变换也是平移. 最后, 对所有平移 $S, T, U$ 有结合律: $S \circ (T \circ U) = (S \circ T) \circ U$. 全等变换、刚体运动、相似变换及仿射变换也分别具有类似于群的性质.

函数 $f : X \to Y$ 称为指数为 $\alpha$ 的 Hölder 函数, 如果存在某个常数 $c \geqslant 0$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c\,|x - y|^{\alpha} \quad (x, y \in X).$$

当 $\alpha = 1$ 时, 称为利普希茨函数, 即:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c\,|x - y| \quad (x, y \in X),$$

如果对 $0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$,

$$c_1\,|x - y| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant c_2\,|x - y| \quad (x, y \in X)$$

这时 $f$ 和 $f^{-1} : f(X) \to X$ 都是利普希茨函数, 则称函数 $f$ 为双利普希茨函数.

下面复习函数极限与连续等基本概念: 设 $X$ 与 $Y$ 分别是 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^m$ 的子集, 又设 $f : X \to Y$ 为一函数, $a$ 为 $\overline{X}$ 中的点, 称当 $x$ 趋于 $a$ 时, $f(x)$ 有极限$y$(或趋于或收敛于$y$), 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x \in X$, 当 $|x - a| < \delta$ 时, $|f(x) - y| < \varepsilon$. 并表示成, 当 $x \to a$, $f(x) \to y$ 或 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y$. 对函数 $f : X \to \mathbf{R}$, 称当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 趋于无穷 (记为 $f(x) \to \infty$), 如果对任意给定的 $M$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - a| < \delta$ 时, $f(x) > M$; 可以类似地给出 $f(x) \to -\infty$ 的定义.

现在设 $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$. 我们经常对当 $x$ 是很小的正值时, 所对应的函数值的变化很感兴趣: 注意如果 $f(x)$ 随 $x$ 的减少而递增, 则 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 存在, 它或是一有限极限或是 $+\infty$; 如果 $f(x)$ 随 $x$ 的减少而递减, 则极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 存在, 它或是有限的或是 $-\infty$. 当然, 对于很小的 $x$, $f(x)$ 可以剧烈波动, 则 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 根本不存在. 一般用下极限和上极限来描述这些波动. 定义下极限为

$$\underline{\lim}_{x \to 0} f(x) \equiv \lim_{r \to 0} (\inf\{f(x) : 0 < x < r\}).$$

因为 $\inf\{f(x):0<x<r\}$ 或者是对所有正数 $r$ 都为 $-\infty$, 或随 $r$ 递减而增加, 所以 $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x)$ 总是存在的. 类似地, 定义上极限为

$$\overline{\lim_{x\to 0}} f(x) \equiv \lim_{r\to 0}(\sup\{f(x):0<x<r\}).$$

对任何函数 $f$, 下极限和上极限都存在 (为实数或 $-\infty$ 或 $+\infty$), 并且表现出了 $x$ 趋近于 0 时 $f$ 值波动的情形 (见图 1.4). 显然, $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) \leqslant \overline{\lim}_{x\to 0} f(x)$; 如果下极限和上极限相等, 则 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 存在且等于这个共同值. 注意如果 $x>0$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$ , 则有 $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) \leqslant \underline{\lim}_{x\to 0} g(x)$ 和 $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x) \leqslant \overline{\lim}_{x\to 0} g(x)$ . 对函数 $f:X\to \mathbf{R}$, 当 $x\to a$ 时, 可以类似地定义其下极限和上极限, 这里 $X$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集, 且 $a\in \overline{X}$.

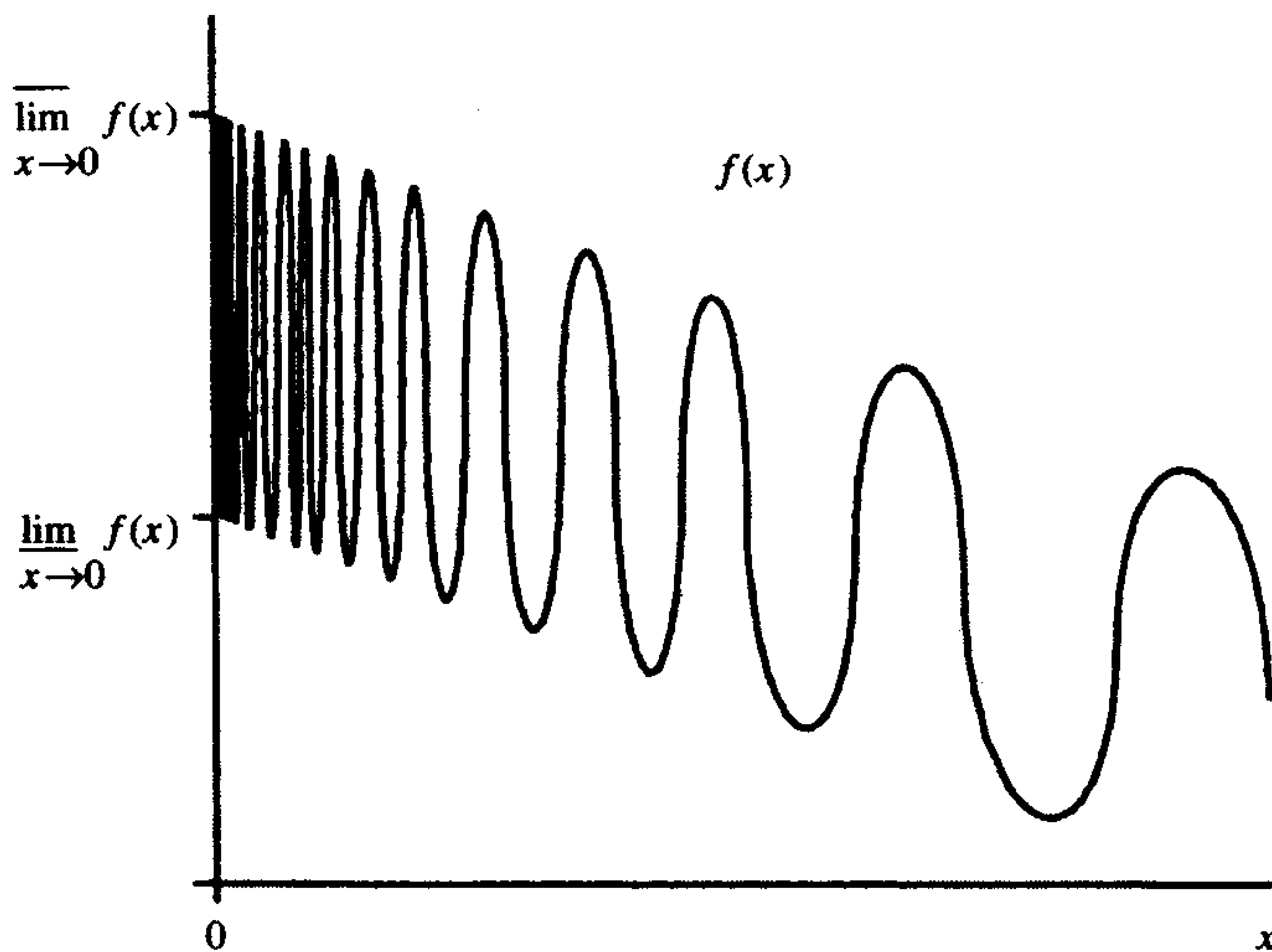



图 1.4 函数的上极限和下极限

经常需要在 $x$ 的值很小时比较两个函数 $f,g:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, 这里可以用 $f(x)\sim g(x)$ 表示 $f(x)/g(x)\to 1 (x\to 0)$. 还用到 $f(x)\sim x^s$ 的形式, 意思是, 当 $x$ 很小时, $f$ 近似服从指数为 $s$ 的幂定律. 用记号 $f(x)\simeq g(x)$ 很不严格地表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在某种意义下近似相等, 在特殊的情形中需要特别的说明.

称函数 $f:X\to Y$ 在 $X$ 中的 $a$ 点连续, 如果当 $x\to a$ 时, $f(x)\to f(a)$; 称 $f$ 在 $X$上连续, 如果它在 $X$ 中的所有点都连续. 特别要指出的是, 利普希茨函数和 Hölder 函数都是 连续函数. 若 $f:X\to Y$ 是具有连续逆映射 $f^{-1}:Y\to X$ 的连续双射, 则称 $f$ 为同胚映射, $X$ 与 $Y$ 称为同胚集. $\mathbf{R}^n$ 上的全等变换、相似变换、仿射变换都是同胚映射的例子.

称函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在 $x$ 点可微且有导数$f'(x)$, 如果

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

特别地, 中值定理成立, 即如果 $a<b$, $f$ 在 $[a,b]$ 上可微, 则存在 $c$, $a<c<b$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

(直观地, $f$ 的图中的任意弦平行于过某一内点的 $f$ 的切线). 称函数 $f$ 为连续可微, 如果 $f'(x)$ 在 $x$ 点连续.

更一般地, 若 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, 称 $f$ 在 $x$ 点可微且具有导数即线性映射 $f'(x):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, 如果

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-f'(x)h|}{|h|}=0.$$

有时, 我们对函数序列 $f_k:X\to Y$ 的收敛感兴趣, 这里 $X$ 与 $Y$ 是欧几里得空间中的子集. 称函数序列 $f_k$ 逐点收敛于函数 $f:X\to Y$, 如果对于 $X$ 中的每一 $x$, 当 $k\to\infty$ 时, $f_k(x)\to f(x)$. 称收敛是一致的, 如果当 $k\to\infty$ 时, $\sup_{x\in X}|f_k(x)-f(x)|\to 0$. 一致收敛是比逐点收敛更强的性质, 它在 $X$ 中的每一点接近极限点的速率都是一致的. 若函数 $f_k$ 是连续的且一致收敛于 $f$, 则 $f$ 是连续的.

最后, 我们要说明对数总是取以 $e$ 为底的自然对数. 回想一下, 我们知道: 对于 $a,b>0$, 有 $\ln ab=\ln a+\ln b$; 对于实数 $c$, 有 $\ln a^c=c\ln a$. 经常用到等式 $a^c=b^{c\ln a/\ln b}$. 由于对数函数是指数函数的反函数, 所以, 对于 $x>0$, 有 $e^{\ln x}=x$, 以及对 $y\in\mathbf{R}$, 有 $\ln e^y=y$.

## 1.3 测度和质量分布

了解了测度知识, 才可能深入研究分形数学. 许多人被测度理论的名字所吓倒, 实际上也不必要, 因为大部分的分形应用只是需要很少一点的测度理论基本概念. 而且这些概念与基础物理中经常遇见的质量负载或电荷分布是相类似的.

本书中仅需涉及到 $\mathbf{R}^n$ 子集的测度. 测度基本上只是赋予集合数值"大小"的一种方式; 如果集是以合理的方式分解为有限或可数个部分, 则整体的数值应该是所有各部分数值之和.

称 $\mu$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的测度, 如果对于 $\mathbf{R}^n$ 中的每一子集, $\mu$ 赋予一个非负数, 也可能为 $\infty$, 使:

(a) $\mu(\varnothing)=0$; (1.1)

(b) $\mu(A) \leqslant \mu(B)$, 若 $A \subset B$; (1.2)

(c) 如果 $A_1, A_2, \cdots$ 为一可数 (或有限) 集序列, 则

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \tag{1.3}$$

如果 $A_i$ 为互不相交的博雷尔集, 则式 (1.3) 取等号, 即:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{1.4}$$

称 $\mu(A)$ 为集 $A$ 的测度, 并将 $\mu(A)$ 看做以某种方式测量 $A$ 所得的数值. 条件 (a) 说明空集具有零测度, 条件 (b) 说明 "较大的集具有较大的测度", 条件 (c) 说明如果一个集合为可数个集合 (可互相重叠) 之并, 则所有各部分的测度之和至少等于整体的测度; 如果集可以分解为可数个互不相交的博雷尔集的并, 则所有各部分测度之和等于整体的测度.

**技术注记** 对于将遇到的测度, 式 (1.4) 对比博雷尔集更广的一类集也普遍成立, 特别地, 对博雷尔集的所有连续映像集也是如此. 然而, 由于某种原因, 在这里一般不能要求式 (1.4) 对每一可数互不相交集类 $A_i$ 也成立. 熟悉测度论的读者知道: 通常将 "使博雷尔集是其可测集的 $\mathbf{R}^n$ 上的外测度" 定义为 $\mathbf{R}^n$ 上的测度. 然而, 为了避免频繁地提及 "可测集", 还是把 $\mu(A)$ 定义在所有的集 $A$ 上更方便一些, 因为我们通常对博雷尔集的测度感兴趣, 所以选取博雷尔集而非较大的集类使式 (1.4) 成立便足够了. 若 $\mu$ 对博雷尔集定义且满足式 (1.1)~(1.4), 则可以按条件式 (1.1)~(1.3) 把 $\mu$ 拓广成所有集上的外测度, 所以这里的定义与通常的定义是一致的.

如果 $A \supset B$, 则 $A$ 可以表示成不交并 $A = B \bigcup (A \backslash B)$, 所以从式 (1.4) 立即得到, 若 $A, B$ 为博雷尔集, 则

$$\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B). \tag{1.5}$$

类似地, 若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ 为一递增的博雷尔集序列, 则

$$\lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big). \tag{1.6}$$

为了看清这一点, 注意到 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \bigcup (A_2 \backslash A_1) \bigcup (A_3 \backslash A_2) \bigcup \cdots$ 是不交并, 所以

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) &= \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).\end{aligned}$$

更一般地, 若 $\delta > 0, A_\delta$ 是随 $\delta$ 递减而增大的博雷尔集, 即当 $0 < \delta < \delta'$ 时, 有 $A'_\delta \subset A_\delta$, 则

$$\lim_{\delta\to 0} \mu(A_\delta) = \mu\Big(\bigcup_{\delta>0} A_\delta\Big). \tag{1.7}$$

测度的支撑是指测度所集中的集. 精确地讲, 测度 $\mu$ 的支撑, 记为 spt $\mu$, 是指满足 $\mu(\mathbf{R}^n \backslash X) = 0$ 的最小闭集 $X$. 测度的支撑总是闭的, $x$ 在支撑中的充要条件是: 对于所有正有理数 $r$, 都有 $\mu(B(x,r)) > 0$. 称 $\mu$ 为集 $A$ 上的测度, 假如 $A$ 包含 $\mu$ 的支撑.

通常将在 $\mathbf{R}^n$ 的有界子集上满足 $0 < \mu(\mathbf{R}^n) < \infty$ 的测度 $\mu$ 称为质量分布, 可以认为 $\mu(A)$ 为集 $A$ 的质量. 经常直观地认为, 取一有限质量而按某种方式分配到整个集 $X$ 上, 可得到 $X$ 上的一个质量分布; 有关测度的条件也将满足.

下面给出一些测度和质量分布的例子. 这里一般都略去了关于满足上述性质测度存在的证明. 证明这样的测度的存在性要涉及许多较深的测度理论, 就应用看来它们的存在性显然是合理的, 是可以相信的.

**例 1.1 计点测度** 对 $\mathbf{R}^n$ 中的每一子集 $A$, 若 $A$ 为有限的, $\mu(A)$ 就表示 $A$ 中点的数目, 否则 $\mu(A)$ 取 $\infty$, 则 $\mu$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的测度.

**例 1.2 点质量** 设 $a$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一点, 若 $A$ 包含 $a$, 则 $\mu(A)$ 取 1, 否则取 0, 则 $\mu$ 是一质量分布, 可以把它看成是集中于 $a$ 的点质量.

**例 1.3 R上的勒贝格测度** 勒贝格测度 $\mathcal{L}^1$ 将 “长度” 的概念扩展到 $\mathbf{R}$ 上的包括博雷尔集在内的大的子集类上: 对于开和闭区间, 有 $\mathcal{L}^1(a,b) = \mathcal{L}^1[a,b] = b-a$; 若 $A = \bigcup_i [a_i, b_i]$ 为一有限或可数互不相交区间的并, 则 $\mathcal{L}^1(A) = \sum (b_i - a_i)$ 是 A 的长度, 即为各区间长度之和. 这就能够在任意集 $A$ 上定义相应的勒贝格测度$\mathcal{L}^1$ 为:

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]\Big\},$$

即取 $A$ 的可数个区间覆盖, 且尽可能地取最小的区间长度总和. 不难看出在这个定义下, 式 (1.1)~(1.3) 是成立的; 但要说明式 (1.4) 对不交博雷尔集 $A_i$ 成立是比较困

难的, 这里我们回避了这个问题. [事实上, 式 (1.4) 对比博雷尔集大的一类集"勒贝格可测集"都成立, 但对 $\mathbf{R}$ 的所有子集并不成立.]$\mathbf{R}$ 上的勒贝格测度一般被认为是"长度", 当希望强调其意义时, 经常记 $\mathcal{L}^1(A)$ 为 length(A).

**例 1.4 $\mathbf{R}^n$ 上的勒贝格测度** 若 $A=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n : a_i\leqslant x_i\leqslant b_i\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的"坐标平行体", 则 $A$ 的 $n$ 维体积为:

$$\mathrm{vol}^n(A)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n).$$

(当然, $\mathrm{vol}^1$ 为长度, 如例 1.3; $\mathrm{vol}^2$ 为面积; 而 $\mathrm{vol}^3$ 为通常的 3 维体积). $n$维勒贝格测度可以被认为是 $n$ 维体积在一较大集类上的拓广. 如例 1.3, 由定义

$$\mathcal{L}^n(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{vol}^n(A_i) : A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right\}$$

得到 $\mathbf{R}^n$ 上一测度, 这里下确界是取遍 $A$ 的所有坐标平行体覆盖 $A_i$. 若 $A$ 为坐标平行体, 则有 $\mathcal{L}^n(A)=\mathrm{vol}^n(A)$. 事实上, 对其体积可以由通常测量办法得到的集, 这个等式都成立. 同样, 为了直观一些, 有时用 area$(A)$ 取代 $\mathcal{L}^2(A)$, 用 $\mathrm{vol}^3(A)$ 取代 $\mathcal{L}^3(A)$, 而用 $\mathrm{vol}^n(A)$ 取代 $\mathcal{L}^n(A)$.

有时, 需要定义 $\mathbf{R}^n$ 中的 $k$ 维平面 $X$ 的"$k$ 维"体积, 这可以把 $X$ 看成与 $\mathbf{R}^k$ 一样, 而对 $X$ 的子集使用 $\mathcal{L}^k$ 自然地完成.

**例 1.5 直线段上的均匀质量分布** 设 $L$ 为平面中单位长的直线段, 定义 $\mu(A)=\mathcal{L}^1(L\bigcap A)$, 即 $A$ 与 $L$ 交集的"长度". 因为若 $A\bigcap L=\varnothing$, 则 $\mu(A)=0$, 所以 $\mu$ 是支撑为 $L$ 的质量分布. 可以认为 $\mu$ 是由单位质量均匀地分布在直线段 $L$ 上所得的质量分布.

**例 1.6 测度的限制** 设 $\mu$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的测度, 而 $E$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的博雷尔子集. 定义 $\mathbf{R}^n$ 上一测度 $\nu$, 称其为 $\mu$ 在 $E$ 上的限制, 假如对任意集 $A$ 有 $\nu(A)=\mu(E\bigcap A)$. 则 $\nu$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的支撑包含在 $\overline{E}$ 中的测度.

本书所涉及的最重要的测度是 $\mathbf{R}^n$ 子集上的 $s$ 维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^s$, 这里 $0\leqslant s\leqslant n$. 这些测度将在 2.1 节介绍, 它们是勒贝格测度在维数不一定是整数时的推广.

下面的方法通常用来在 $\mathbf{R}^n$ 的一子集上构造一质量分布. 在有界博雷尔集 $E$ 的各部分之间重复地进行质量分配. 设 $\mathcal{E}_0$ 由单个集 $E$ 组成. 对 $k=1,2,\cdots$, 设 $\mathcal{E}_k$ 为 $E$ 的不交博雷尔子集序列, 它使得 $\mathcal{E}_k$ 中每一集 $U$ 包含在 $\mathcal{E}_{k-1}$ 的某一集之中, 而且包含有限个 $\mathcal{E}_{k+1}$ 中的集. 假定 $\mathcal{E}_k$ 中集的最大直径当 $k\to\infty$ 时趋于 0, 通过重复分配, 定义 $E$ 上一质量分布 (见图 1.5). 设 $\mu(E)$ 满足 $0<\mu(E)<\infty$, 通过 $\sum_{i=1}^{m}\mu(U_i)=\mu(E)$ 定义 $\mu(U_i)$ 使质量在 $\mathcal{E}_1$ 中的 $U_1,\cdots,U_m$ 集之间分配. 类似地, 继续将质量分配到 $\mathcal{E}_2$ 中的集上, 使得如果 $U_1,\cdots,U_m$ 是 $\mathcal{E}_2$ 中包含于 $\mathcal{E}_1$ 中某个集

$U$ 的所有的集, 则有 $\sum_{i=1}^{m}\mu(U_i)=\mu(U)$. 一般地, 对于 $\mathcal{E}_k$ 中每个集 $U$, 分配质量使之满足:

$$\sum_{i}\mu(U_i)=\mu(U) \tag{1.8}$$

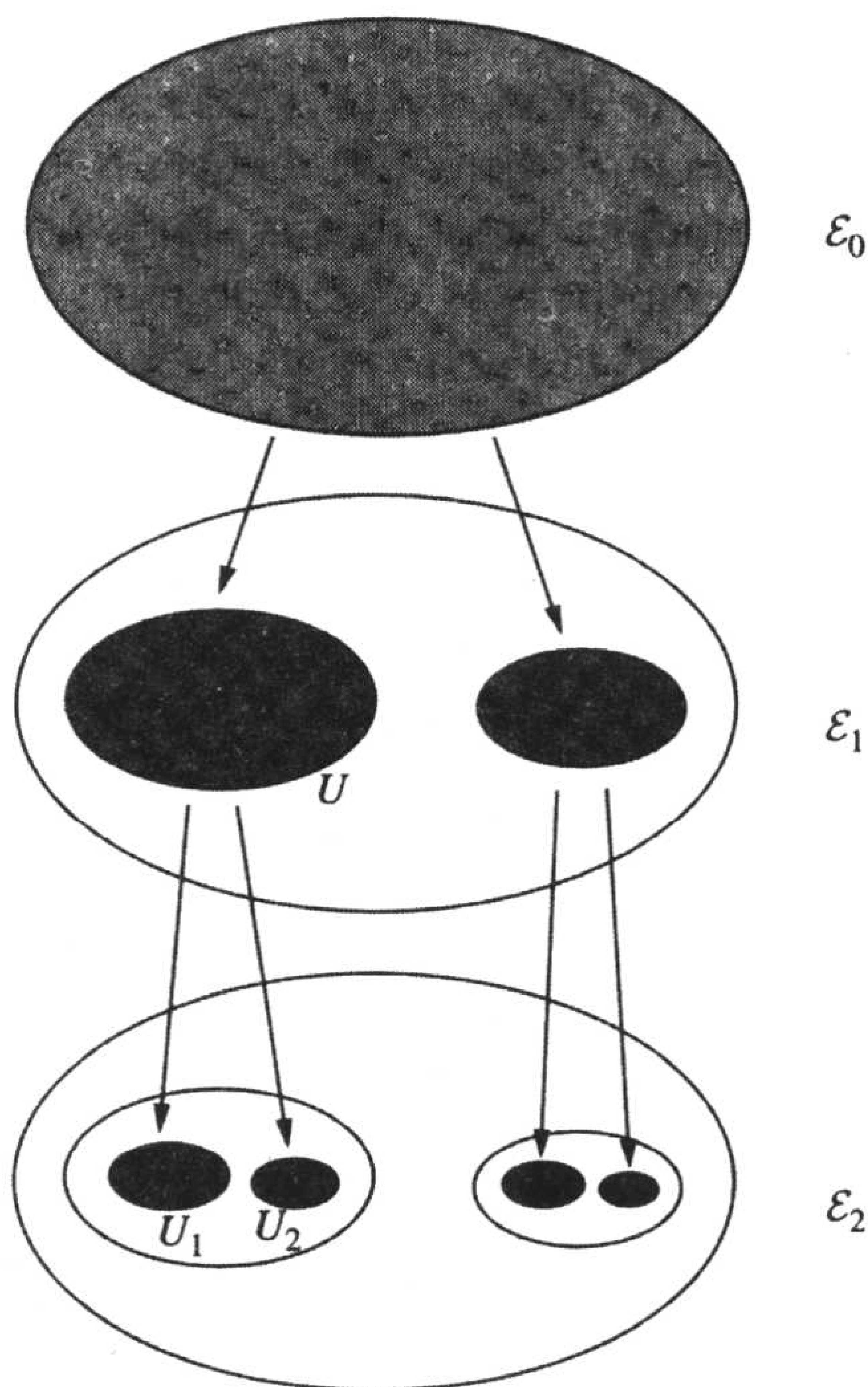



图 1.5　通过重复分配的方法构造质量分布 $\mu$ 的步骤. 把 $\mathcal{E}_k$ 集上的质量分配到 $\mathcal{E}_{k+1}$ 的集之间, 例如 $\mu(U)=\mu(U_1)+\mu(U_2)$

这里 $\{U_i\}$ 是 $\mathcal{E}_{k+1}$ 中包含于 $U$ 的不交集序列的全体, 对于每一 $k$, 设 $E_k$ 为 $\mathcal{E}_k$ 中集的并集, 对任一个满足 $A\bigcap E_k=\varnothing$ 的集 $A$, 定义 $\mu(A)=0$ .

用 $\mathcal{E}$ 表示由属于任一个 $\mathcal{E}_k$ 的集以及所有具有 $\mathbf{R}^n\backslash E_k$ 形式的集组成的集类, 则上面的方法对于 $\mathcal{E}$ 中每一集 $A$ 定义了一质量 $\mu(A)$. 并且下面的说法也似乎是合理的, 即通过 $\mathcal{E}$ 中集的组合, 能决定 $E$ 上任何 (博雷尔) 集 $A$ 的质量 $\mu(A)$, 所以质量分布 $\mu$ 是充分确定的. 确实, 情况也正是如此, 正如下面的命题所叙述的那样.

**命题 1.7**　设 $\mu$ 定义在上面的集类 $\mathcal{E}$ 上, 则 $\mu$ 的定义可以扩展到 $\mathbf{R}^n$ 的所有子集上, 使得 $\mu$ 为一测度. 若 $A$ 为博雷尔集, 则 $\mu(A)$ 的值惟一确定. $\mu$ 的支撑包含于 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bar{E}_k$ 之中.

**证明注记** 若 $A$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任何子集, 令

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_i \mu(U_i) : A \subset \bigcup_i U_i 且 U_i \in \mathcal{E}\right\} \tag{1.9}$$

[由于这里的集 $U_i$ 都在 $\mathcal{E}$ 中并且覆盖 $A$; 对这样的集的 $\mu(U_i)$ 已经有了定义, 因此可取 $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(U_i)$ 的最小值.] 若 $A$ 为 $\mathcal{E}$ 中的集, 不难看出, 式 (1.9) 简化为构造过程中确定的质量 $\mu(A)$ . $\mu$ 满足测度的所有条件, 以及 $\mu$ 在 $\mathcal{E}$ 中集的值决定了任一博雷尔集的值的完整证明是相当复杂的, 这里不必了解它. 因为 $\mu(\mathbf{R}^n \backslash E_k) = 0$, 若 $A$ 为一开集且对某一 $k$ 与 $E_k$ 不相交, 则有 $\mu(A) = 0$, 所以对所有 $k$, $\mu$ 的支撑在 $\bar{E}_k$ 中. □

**例 1.8** 设 $\mathcal{E}_k$ 是形式为 $[r2^{-k}, (r+1)2^{-k}]$, 长度为 $2^{-k}$ 的 "二进制区间" 组成的集类, 这里 $0 \leqslant r \leqslant 2^k - 1$. 如果在前面的构造中取 $\mu[r2^{-k}, (r+1)2^{-k}] = 2^{-k}$, 则 $\mu$ 是 [0,1] 上的勒贝格测度.

**计算注记** 显然, 如果 $I$ 为 $\mathcal{E}_k$ 中长度为 $2^{-k}$ 的区间, $I_1, I_2$ 为 $I$ 在 $\mathcal{E}_{k+1}$ 中长度为 $2^{-k-1}$ 的两个子区间, 则有 $\mu(I) = \mu(I_1) + \mu(I_2)$, 即式 (1.8). 根据命题 1. 7, $\mu$ 可以推广成 [0,1] 上的质量分布. 对 $\mathcal{E}$ 中的 $I$, 有 $\mu(I) = \text{length}(I)$, 可以证明这意味着在任何集上, $\mu$ 与勒贝格测度一致. □

如果使某性质不成立的集的 $\mu$ 测度为零, 则称这个性质对几乎所有$x$ 成立或者几乎处处成立 (对测度 $\mu$). 例如, 可以说对于勒贝格测度几乎所有的实数是无理数. 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数的, 比如说可以列成 $x_1, x_2, \cdots$, 使 $\mathcal{L}^1(\mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^1\{x_i\} = 0$.

虽然一般情况下, 人们总是对测度自身的性质感兴趣, 但有时需要计算函数对测度的积分. 函数的可积性会涉及一些技巧上的困难, 但采用下面的结果就可以克服这种困难: 定义于 $\mathbf{R}^n$ 中博雷尔子集 $D$ 上的函数 $f: D \to \mathbf{R}$, 对所有实数 $a$, 集合 $f^{-1}(-\infty, a] = \{x \in D : f(x) \leqslant a\}$ 为博雷尔集. 相当大的函数类满足这个条件, 包括所有连续函数 ($f^{-1}(-\infty, a]$ 是闭的, 所以为博雷尔集). 在本书中假定所有可积的函数都满足这个条件, 在实际中可能遇到的函数也肯定是满足这个条件的.

为了定义积分, 首先假定 $f: D \to \mathbf{R}$ 为简单函数, 即它仅仅能取有限多个值 $a_1, \cdots, a_k$. 对非负简单函数 $f$ 定义对测度 $\mu$ 的积分为

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu\{x : f(x) = a_i\}.$$

更一般的函数的积分通过简单函数的逼近来定义. 若 $f: D \to \mathbf{R}$ 为非负函数, 则定义它的积分为

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int g \, \mathrm{d}\mu : g \text{ 为简单函数}, 0 \leqslant g \leqslant f\right\}.$$

为了完成积分定义, 如果 $f$ 取正值也取负值, 令 $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$, 所以 $f = f_+ - f_-$. 如果 $\int f_+ \mathrm{d}\mu$ 与 $\int f_- \mathrm{d}\mu$ 都有限, 则定义

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int f_+ \mathrm{d}\mu - \int f_- \mathrm{d}\mu$$

对于积分, 所有普通的性质都成立, 比如

$$\int (f+g) \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu + \int g \ \mathrm{d}\mu$$

和

$$\int \lambda f \ \mathrm{d}\mu = \lambda \int f \ \mathrm{d}\mu,$$

$\lambda$ 为比例常数. 积分也有单调收敛定理, 即如果 $f_k : D \to \mathbf{R}$ 是一不降的非负函数序列且收敛 (逐点) 于 $f$, 则

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu.$$

如果 $A$ 是 $D$ 的博雷尔子集, 在集 $A$ 上定义积分

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int f \chi_A \mathrm{d}\mu,$$

这里 $\chi_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为 "示性函数", 即如果 $x$ 在 $A$ 中, 则 $\chi_A(x) = 1$, 否则 $\chi_A(x) = 0$.

注意到, 若 $f(x) \geqslant 0$ 且 $\int f \mathrm{d}\mu = 0$, 则对于测度 $\mu$, $f(x) = 0$ 几乎处处成立.

通常, 积分有多种表示形式, 如 $\int f \mathrm{d}\mu$, $\int f$ 或者 $\int f(x) \mathrm{d}\mu(x)$, 它随需要的着重点不同而定. 当 $\mu$ 为 $n$ 维勒贝格测度 $\mathcal{L}^n$, 通常用 $\int f \mathrm{d}x$ 或 $\int f(x) \mathrm{d}x$ 代表 $\int f \mathrm{d}\mathcal{L}^n$.

有两个场合将要用到 Egoroff 定理. 设 $D$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的博雷尔子集, $\mu$ 为测度且 $\mu(D) < \infty$. 设 $f_1, f_2, \cdots$ 和 $f$ 为从 $D$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数, 使得对 $D$ 中的每一 $x$ 都有 $f_k(x) \to f(x)$. Egoroff 定理指出, 对任意的 $\delta > 0$, 存在 $D$ 中的博雷尔子集 $E$, 使得 $\mu(D \backslash E) < \delta$, 且序列 $\{f_k\}$ 在 $E$ 上一致收敛到 $f$, 即当 $k \to \infty$ 时, $\sup\limits_{x\in E} |f_k(x) - f(x)| \to 0$. 对于书中将涉及的测度, 可以证明总是能取集 $E$ 为紧的.

## 1.4　有关概率论的注记

为了理解本书后部分一些章节的内容, 需要一些概率论的基础知识. 这里给出所需概念的简单评述.

概率论首先涉及实验或试验的概念, 即对所有实际目的, 结果不能预先确定的一个行为. 这个试验在数学上用概率空间来描述, 它有三个组成部分: 试验的所有可能结果的集, 使试验的结果可能发生的所有事件, 这些事件可能性的估计. 例如,

掷一个骰子, 可能的结果是 {1,2,3,4,5,6} , 可能发生的事件包括 "投出一个 3", "投出一个偶数", "投出 4 点以上". 对于 "正常的骰子", 有理由估计六种结果的可能性是相等的.

一个试验的所有可能结果的集称为**样本空间**, 记为 $\Omega$. 与实验结果相联系的有趣问题总可以用 $\Omega$ 中的一组子集来表示. 在上面的例子中, "是不是投出一个奇数?" 也可以问成 "结果是不是在子集 {1,3,5} 中?". 用这样的方法把一个依赖于试验结果的事件与 $\Omega$ 的一个子集联系起来. 在概率论中, 自然地认为并集 $A\bigcup B$ 表示 " $A$ 或者 $B$ 发生", 交集 $A\bigcap B$ 表示 "$A$ 与 $B$ 同时发生", 余集 $\Omega\backslash A$ 表示 "$A$ 不发生", 这里 $A$, $B$ 为任意事件. 一般地, $\Omega$ 中令人特别感兴趣的子集构成的子集类 $\mathcal{F}$ 称为事件集. 在掷骰子的例子中, $\mathcal{F}$ 通常取 $\Omega$ 的所有子集构成的集类; 但在较复杂的情形下, 相对较小的子集类可能更合适些. 通常, $\mathcal{F}$ 满足一定的条件, 例如, 如果对一个事件的发生感兴趣, 也会对这事件的不发生同样感兴趣, 所以若 $A$ 在 $\mathcal{F}$ 中, 一般总是希望余集 $\Omega\backslash A$ 在 $\mathcal{F}$ 中. 称由样本空间中的子集构成的 (非空) 子集类为事件空间, 如果它满足:

$$\Omega\backslash A \in \mathcal{F}, \text{ 只要 } A \in \mathcal{F} \tag{1.10}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \qquad \text{只要} \quad A_i \in \mathcal{F} \quad (1 \leqslant i < \infty). \tag{1.11}$$

从这些条件得到 $\varnothing$ 和 $\Omega$ 都在 $\mathcal{F}$ 中, 并且只要 $A$, $B$ 和 $A_i$ 都在 $\mathcal{F}$ 中, 则 $A\backslash B$ 和 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 都属于 $\mathcal{F}$. 对我们的应用而言, 一般不明确指出 $\mathcal{F}$, 这避开了论证相应的事件空间的存在性的技术困难.

其次, 用事件 $A$ 发生的概率或可能性 $\mathrm{P}(A)$ 将概率与事件联系起来. 称 $\mathrm{P}$ 为**概率**或**概率测度**, 如果 $\mathrm{P}$ 使 $\mathcal{F}$ 中每个事件 $A$ 对应一个数值 $\mathrm{P}(A)$, 并使下面的条件成立:

$$0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1 \text{ 对任意的 } \quad A \in \mathcal{F}, \tag{1.12}$$

$$\mathrm{P}(\varnothing) = 0 \text{ 和 } \mathrm{P}(\Omega) = 1, \tag{1.13}$$

若 $A_1, A_2 \cdots$ 为 $\mathcal{F}$ 中不交事件, 则

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i). \tag{1.14}$$

任何概率的定义都要满足这些条件, 这似乎是很自然的.

如果 $\mathcal{F}$ 是由 $\Omega$ 的子集构成的事件空间, $\mathrm{P}$ 是定义于 $\mathcal{F}$ 的集上的概率, 则称三位一体的 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 为**概率空间**.

对于掷骰子试验, 可以使 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, 事件空间是由 $\Omega$ 中所有子集构成的, $\mathrm{P}(A)$ 等于 1/6 乘以 $A$ 中元素的个数. 这里说的是每个结果发生的可能性相等的 "正常骰子" 的情形.

在很多情况下, $\Omega$ 是个无限集. 例如 $\Omega=[0,1]$, 从 [0, 1] 中任取一个随机数, 该随机数属于集 $A$ 的概率 $\mathrm{P}(A)$, 则 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{length}(A)$. 这里事件空间就是 [0, 1] 的博雷尔子集.

称之为概率测度并不是什么巧合, 概率的定义与式 (1.1)~(1.4) 中的测度定义是相类似的. 如果以 $\Omega$ 对应到 $\mathbf{R}^n$, 以事件空间对应到博雷尔集, 则概率和测度基本上就是一样的了.

在书中后部分的应用中, 特别对实际上必然发生的事件 (在相当大的样本空间中) 感兴趣. 如果 $\mathrm{P}(A)=1$, 称事件 $A$*以概率 1发生*或*几乎必然发生*.

有时, 事先能对一试验结果掌握部分信息; 例如, 知道投出的骰子上的点数为偶数. 在这基础上重新估计不同事件的概率: 若 $A$ 和 $B$ 在 $\mathcal{F}$ 中且 $\mathrm{P}(B)>0$, 则在 $B$ 给定的条件下 $A$ 的*条件概率*, 记为 $\mathrm{P}(A|B)>0$, 定义为

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\bigcap B)}{\mathrm{P}(B)}. \tag{1.15}$$

这可以认为是已知事件 $B$ 发生条件下 $A$ 发生的概率, 正如所期望的, $\mathrm{P}(B|B)=1$. 容易看出 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P}')$ 为一概率空间, 这里 $\mathrm{P}'(A)=\mathrm{P}(A|B)$. 概率中也有分部公式: 即若 $B_1,B_2,\cdots$ 为不交事件, 且 $\bigcup\limits_i B_i=\Omega$, $\mathrm{P}(B_i)>0$, 则对事件 $A$ 有

$$\mathrm{P}(A)=\sum_i \mathrm{P}(A|B_i)\mathrm{P}(B_i) \tag{1.16}$$

在 "正常的骰子" 试验中, 若 $B_1$ 是 "投出偶数" 事件, $B_2$ 是 "投出奇数" 事件, $A$ 是 "投出最小为 4" 事件, 则

$$\mathrm{P}(A|B_1)=\mathrm{P}(\text{投出 4 或 6})/\mathrm{P}(\text{投出 2,4 或 6})=\frac{2}{6}\Big/\frac{3}{6}=\frac{2}{3},$$

$$\mathrm{P}(A|B_2)=\mathrm{P}(\text{投出 5})/\mathrm{P}(\text{投出 1,3 或 5})=\frac{1}{6}\Big/\frac{3}{6}=\frac{1}{3},$$

由此容易验证式 (1.16) 的正确性.

称两个事件是独立的, 如果一个事件的发生不影响另一事件发生的概率, 即如果 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$ 和 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$. 由式 (1.15), 给出概率空间中两事件*独立*的定义, 如果

$$\mathrm{P}(A\bigcap B)=\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B), \tag{1.17}$$

则称 $A$ 与 $B$ 为相互独立的. 更一般的, 任何事件类称为*独立的*, 假如对每一有限子

集类 $\{A_k : k \in J\}$ 有

$$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{k\in J} A_k\Big) = \prod_{k\in J} \mathrm{P}(A_k). \tag{1.18}$$

在掷骰子的例子中, 容易看出 "掷出最小是 5" 与 "掷出是偶数" 是两个相互独立的事件, 但 "投出最小是 4" 与 "投出偶数" 是不独立的.

随机变量及其期望 (或平均或均值) 的概念对概率论是最基本的. 随机变量 $X$ 本质上是样本空间上的实值函数. 在掷骰子试验中, $X$ 可以代替骰子上的数. 另外它完全可以表示对 "掷出特殊数" 的记分, 比如可以设:

$$X(\omega) = 0, \text{若 } \omega = 1,2,3 \text{ 或} 4; X(5) = 1; X(6) = 2.$$

试验的结果决定了随机变量的值. 随机变量的期望是根据每一个结果的可能性大小对所取的值的加权平均.

随机变量的确切定义需要更细致一些. 称 $X$ 为概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上的随机变量, 如果 $X$: $\Omega \to \mathbf{R}$ 是一个函数, 使得对每一实数 $a$, $X^{-1}((-\infty,a])$ 为 $\mathcal{F}$ 中的一个事件. 换言之, 由 $\Omega$ 中满足 $X(\omega) \leqslant a$ 的 $\omega$ 组成的集在事件空间中. 这个条件等价于对任何博雷尔集 $E$ 都有 $X^{-1}(E)$ 在 $\mathcal{F}$ 中. 特别地, 对任何这样的集 $E$, 随机变量 $X$ 在 $E$ 中取值的概率, 即 $\mathrm{P}(\{\omega : X(\omega) \in E\})$ 有定义. 可以证明由每一实数 $a$ 所对应的 $\mathrm{P}(\{\omega : X(\omega) \leqslant a\})$ 的值决定了所有博雷尔集 $E$ 的 $\mathrm{P}(\{\omega : X(\omega) \in E\})$ 的值. 注意到 $\mathrm{P}(\{\omega : X(\omega) \in E\})$ 通常简单地表示为 $\mathrm{P}(X \in E)$.

不难看出, 如果 $X$ 与 $Y$ 都是 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上的随机变量, $\lambda$ 是一实数, 则 $X+Y, X-Y, XY$ 与 $\lambda X$ 都是随机变量 (它们以自然的方式定义, 例如对每一 $\omega \in \Omega$,$(X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$). 而且, 对每一 $\omega$ 如果 $X_1 X_2 \cdots$ 为一不降的有界随机变量序列, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} X_k$ 也是一随机变量.

随机变量族 $\{X_k\}$ 称为*独立的*, 如果对任何博雷尔集 $E_k$, 事件 $\{(X \in E_k)\}$ 在式 (1.18) 的意义下是独立的, 即对每一有限的指标集 $J$, 有

$$\mathrm{P}(X_k \in E_k, k \in J) = \prod_{k\in J} \mathrm{P}(X_k \in E_k).$$

直观地, 如果 $Y$ 取任何特殊值的概率不受 $X$ 取值的影响, 则 $X$ 与 $Y$ 是相互独立的. 考虑连续两次投掷骰子的概率空间, 相应的样本空间是 $\{(x,y) : x,y = 1,2,\cdots,6\}$, 并且对每一对出现的值 $(x,y)$ 对应的概率测度 P 由 $\mathrm{P}\{(x,y)\} = 1/36$ 来定义. 如果 $X$ 与 $Y$ 是由两次连续投掷的骰子上的数决定的随机变量, 则由一次掷出的结果不影响下一次所掷的结果, 所以 $X$ 与 $Y$ 是独立的. 但是 $X$ 与 $X+Y$ 是非独立的, 这是因为第一次掷出的数越大, 两次投掷数之和就可能越大.

随机变量的期望的正式定义与函数积分的定义类似; 的确, 期望实际上是随机变量相对于概率测度的积分. 设 $X$ 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上的随机变量. 首先假定对于所有的 $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 0$, 且 $X$ 仅取有限个值 $x_1, \cdots, x_k$; 称这样的随机变量为简单随机变量. 定义 $X$ 的期望或均值或平均 $\mathrm{E}(X)$ 为

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathrm{P}(X = x_i). \tag{1.19}$$

用简单随机变量逼近的办法来定义任一随机变量的期望. 所以, 对非负随机变量 $X$ 定义

$\mathrm{E}(X) = \sup\{\mathrm{E}(Y):\ Y$ 为简单随机变量, $0 \leqslant Y(\omega) \leqslant X(\omega), \omega \in \Omega\}$.

最后, 若 $X$ 取正的也取负的值, 设 $X_+ = \max\{X, 0\}, X_- = \max\{-X, 0\}$, 所以 $X = X_+ - X_-$. 如果同时有 $\mathrm{E}(X_+) < \infty$ 和 $\mathrm{E}(X_-) < \infty$, 则定义

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_+) - \mathrm{E}(X_-).$$

表示投掷正常骰子所得数的随机变量 $X$ 是简单随机变量, 因为 $X(\omega)$ 仅取值 $1, \cdots, 6$, 所以

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i \times \frac{1}{6} = 3\frac{1}{2}.$$

期望有一些与积分类似的基本性质: 若 $X_1, X_2, \cdots$ 为随机变量, 则

$$\mathrm{E}(X_1 + X_2) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2),$$

更一般地

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}(X_i).$$

若 $\lambda$ 是常数,

$$\mathrm{E}(\lambda X) = \lambda \mathrm{E}(X),$$

如果 $X_1, X_2, \cdots$ 为不降的非负随机变量序列, 且 $X = \lim\limits_{k\to\infty} X_K$ 为 (有限) 的随机变量, 则

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}(X_k) = \mathrm{E}(X).$$

如果 $X_1, X_2$ 是独立的, 也有

$$\mathrm{E}(X_1 X_2) = \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2).$$

所以如果 $X_k$ 为在一系列投掷正常骰子中第 $k$ 次掷出的结果, 则前 $k$ 次所掷出数之和的期望为

$$\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_k) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_k) = 3\frac{1}{2} \times k.$$

给定一事件 $B$,$\mathrm{P}(B)>0$, 类似地定义 $X$ 的条件期望$\mathrm{E}(X|B)$, 首先用

$$\mathrm{E}(X|B)=\sum_{i=1}^{k}x_i\mathrm{P}(X=x_i|B) \tag{1.20}$$

替代式 (1.19). 可得到与式 (1.16) 类似的分部公式

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i}E(X|B_i)\mathrm{P}(B_i). \tag{1.21}$$

这里 $B_1,B_2,\cdots$ 为不交事件, 且 $\bigcup_i B_i=\Omega,\mathrm{P}(B_i)>0$.

描述随机变量在样本空间上波动变化的指标通常是很有用的. 所以我们介绍随机变量 $x$ 的*方差*. 由简单计算

$$\mathrm{var}(X)=\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))^2)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2.$$

用期望的性质, 对任何实数 $\lambda$ 可得

$$\mathrm{var}(\lambda X)=\lambda^2\mathrm{var}(X)$$

如果 $X$ 与 $Y$ 是相互独立的, 则

$$\mathrm{var}(X+Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y).$$

如果一个随机变量的概率分布由一个积分给出, 即

$$\mathrm{P}(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\mathrm{d}u \tag{1.22}$$

则函数 $f$ 称为 X 的*概率密度函数*. 从期望的定义可以看出

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}uf(u)\mathrm{d}u$$

和
$$\mathrm{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}u^2f(u)\mathrm{d}u$$

由此可以计算
$$\mathrm{var}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2.$$

注意到密度函数给出了随机变量的分布并没有涉及到具体概率空间, 这对许多目的来说, 是没有什么关系的. 可以通过密度函数来表示 $X$ 属于任何博雷尔集 $E$ 的概率:

$$\mathrm{P}(X\in E)=\int_E f(u)\mathrm{d}u.$$

称随机变量 $X$ 服从区间 $(a,b)$ 上的均匀分布, 如果

$$\mathrm{P}(X \leqslant x) = \frac{1}{b-a}\int_a^x \mathrm{d}u \quad (a<x<b) \tag{1.23}$$

所以 $X$ 落在 $[a,b]$ 子区间内的概率与该区间的长度成正比. 这种情形下, 有 $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}(a+b)$ 和 $\mathrm{var}(X) = \frac{1}{12}(a-b)^2$.

称随机变量 $X$ 服从均值为 $m$、方差为 $\sigma^2$ 的正态或高斯分布, 如果

$$\mathrm{P}(X \leqslant x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-1}\int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}u. \tag{1.24}$$

通过积分可以验证 $\mathrm{E}(X) = m$ 及 $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$. 若 $X_1$ 与 $X_2$ 是均值分别为 $m_1, m_2$, 方差分别为 $\sigma_1^2, \sigma_2^2$, 相互独立的具有正态分布的随机变量, 则 $X_1 + X_2$ 是均值为 $m_1 + m_2$, 方差为 $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ 的具有正态分布的随机变量. 对于任意非负实数 $\lambda, \lambda X_1$ 是均值为 $\lambda m_1$, 方差为 $\lambda^2\sigma^2$ 的正态随机变量.

如果投掷一正常骰子相当多的次数, 则可以期望掷出数的平均值非常接近 $3\frac{1}{2}$, 即每一次投掷结果的期望或均值. 而且, 投掷的次数越多, 所得的平均值就越接近均值. 这个 "平均定律" 精确地讲就是强大数定律.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 为概率空间, $X_1, X_2, \cdots$ 为独立的且有相同分布 (即对任何集 E 及所有 $i, \mathrm{P}(X_i \in E)$ 是相同的) 的随机变量, 其期望为 $m$, 方差为 $\sigma^2$, 且假设都有限. 对每一 $k$ 构造随机变量 $S_k = X_1 + \cdots + X_k$, 所以随机变量 $S_k/k$ 为前 $k$ 次试验的平均. 强大数定律是指以概率 1 成立

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}S_k = m. \tag{1.25}$$

对于 $k$ 充分大时, 随机变量 $S_k$ 的分布, 也能讨论许多问题: 可以证明 $S_k$ 的分布渐近于期望为 $km$、方差为 $k\sigma^2$ 的正态分布. 这是中心极限定理的内容, 即对任意实数 $x$, 当 $k \to \infty$ 时,

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_k - km}{\sigma\sqrt{k}} \leqslant x\right) \to \int_{-\infty}^x (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)\mathrm{d}u. \tag{1.26}$$

现在, 正态分布的一个重要性质变得清楚了, 它是大量的独立同分布随机变量和的分布的极限形式.

可以将这些结论应用到由无穷多次掷骰子组成的试验. 设 $\Omega$ 是由所有无穷序列 $\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) : \omega_i = 1, 2, \cdots 6\}$ 组成的集 (认为 $\omega_k$ 是第 $k$ 次投掷的结果). 可以定义事件空间 $\mathcal{F}$ 及概率空间 P. 为此, 对任意给定的 $k$ 及序列 $\omega_1, \cdots, \omega_k (\omega_i = 1, 2, \cdots 6)$, 事件 "前 $k$ 次投出的是 $\omega_1, \cdots, \omega_k$" 是在 $\mathcal{F}$ 中, 且概率为 $(1/6)^{-k}$. 设 $X_k$

是由第 $k$ 次投掷结果决定的随机变量, 所以 $X_k(\omega)=\omega_k$. 不难看出 $X_k$ 是独立同分布的, 且均值为 $m=3\frac{1}{2}$, 方差为 $2\frac{11}{12}$. 强大数定理告诉我们, 当 $k$ 趋于无穷时, 前 $k$ 次投掷时的均值 $\frac{1}{k}(S_k)$ 以概率 1 趋于 $3\frac{1}{2}$. 中心极限定理告诉我们, 当 $k$ 趋于无穷时, 和 $S_k$ 的分布渐近于均值为 $3\frac{1}{2}\times k$, 方差为 $2\frac{11}{12}\times k$ 的正态分布. 所以如果我们重复投掷 $k$ 个骰子相当多次的试验, 则 $k$ 个骰子出现的点数的和所服从的分布, 将在式 (1.26) 的意义下渐近于正态分布.

## 1.5 注记和参考文献

对于本章所简要介绍的内容, 其难易程度没有超出许多大学课程教授的范围. 几乎任何一本关于数学分析的书, 如 Rudin(1964) 和 Apostol(1974), 都包含集与函数的基本理论的内容. 对测度和概率全面而细致的介绍可参见 Kingman Taylor(1966), Billingsley (1995) 和 Edgar(1998) 等. 对于概率论, 参见 Grimmett and Stirzaker(1992) 会对你有所帮助.

### 练 习

下面的练习没有过分强调一些本章中所提到的事实.

**1.1** 对 $x,y,z\in\mathbf{R}^n$, 验证 (1) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$, (2)$|x-y|\geqslant||x|-|y||$, (3) $|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|$.

**1.2** 用 $\delta$ 平行体的定义证明 $A_{\delta+\delta'}=(A_\delta)_{\delta'}$.

**1.3** 证明 (非空) 集合有界的充分必要条件是它包含在某个以原点为中心的球 B(0, r) 之中.

**1.4** 确定下面的集合哪个是开的, 哪个是闭的, 并指出每个集的内部与闭包.

(1) 非空有限集 $A$ , (2) 区间 (0, 1), (3) 区间 [0,1], (4) 区间 [0,1),

(5) 集合 $\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\right\}$.

**1.5** 证明图 0.1 的三分康托尔集是紧的和全不连通的; 它的内部、闭包以及边界各是什么?

**1.6** 证明 $\mathbf{R}^n$ 中任意个开子集的并为开的, 有限个开集的交为开的. 证明 $\mathbf{R}^n$ 的子集为闭的充要条件是它的余集为开的, 并由此导出对于闭集并与交的相应的结果.

**1.7** 证明若 $A_1\supset A_2\supset\cdots$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的非空不增的紧子集序列, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为非空的紧集.

**1.8** 证明半开区间 $\{x\in\mathbf{R}:0\leqslant x<1\}$ 为 $\mathbf{R}$ 的博雷尔子集.

**1.9** 设 $F$ 为 $[0,1]$ 中十进制表达式中含有无穷多个数字 5 的数组成的集合, 证明 $F$ 为博雷尔集.

**1.10** 证明：平面中的坐标变换：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c\cos\theta & -c\sin\theta \\ c\sin\theta & c\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

是相似比为 $c$ 的相似变换, 绘出此变换的几何图像.

**1.11** 求 $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x)$ 与 $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x)$ 这里 $f(x)$ 为 (1) $\sin x$, (2) $\sin(1/x)$, (3) $x^2 + (3 + x)\sin(1/x)$.

**1.12** 设 $f, g : [0,1] \to \mathbf{R}$ 为利普希茨函数, 证明：定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x) + g(x)$ 及 $f(x) \cdot g(x)$ 也是利普希茨函数.

**1.13** 设 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为可微函数, 对所有 $x$, 都有 $|f'(x)| \leqslant c$. 利用中值定理证明：$f$ 为利普希茨函数.

**1.14** 证明每个利普希茨函数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 都是连续的.

**1.15** 设函数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 由 $f(x) = x^2 + x$ 给出, 求

(1) $f^{-1}(2)$, (2) $f^{-1}(-2)$, (3) $f^{-1}([2,6])$ .

**1.16** 证明：$f(x) = x^2$ 在区间 [0,2] 上是利普希茨的; 在区间 [1,2] 是双利普希茨的; 而在 $\mathbf{R}$ 上则不是利普希茨的.

**1.17** 证明：如果 $E$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集, 函数 $f : E \to \mathbf{R}^n$ 是连续的, 则 $f(E)$ 是紧的.

**1.18** 设 $A_1, A_2, \cdots$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的不增的博雷尔子集序列, 并设 $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, 若 $\mu$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的测度, 且 $\mu(A_1) < \infty$, 利用式 (1.6) 证明：当 $k \to \infty$ 时, $\mu(A_k) \to \mu(A)$.

**1.19** 证明：集中在 $a$ 的点质量是测度 (参见例 1.2) .

**1.20** 说明如何在三分康托尔集上定义一个质量分布, 使它尽可能均匀, 参见图 0.1 .

**1.21** 验证勒贝格测度满足条件 (1.1), (1.2) 和 (1.3).

**1.22** 设 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ 为连续函数, 对 $\mathbf{R}^2$ 中的子集 $A$ 定义 $\mu(A) = \mathcal{L}\{x : (x, f(x)) \in A\}$, 这里 $\mathcal{L}$ 为勒贝格测度. 证明：$\mu$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上支撑为 $f$ 的图的质量分布.

**1.23** 设 $D$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的博雷尔子集, $\mu$ 为 $D$ 上的测度且 $\mu(D) < \infty$. 设 $f_k : D \to \mathbf{R}$ 为一函数序列, 它使得对 $D$ 中所有 $x$ , 有 $f_k(x) \to f(x)$. 证明 Egoroff 定理：对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $D$ 的博雷尔子集 $A$, 使得 $\mu(D \backslash A) < \varepsilon$, 且对 $A$ 中的 $x$,$f_k(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

**1.24** 证明：若 $\mu$ 为 $D$ 上的测度, $f : D \to \mathbf{R}$ 满足对 $D$ 中所有 $x$, 有 $f(x) \geqslant 0$, 且 $\int_D f \, \mathrm{d}\mu = 0$, 则相对于 $\mu$ 几乎所有 $x$, 有 $f(x) = 0$.

**1.25** 设 $X$ 为随机变量, 证明：

$$\mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2 = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 (\text{这个数等于 } X \text{ 的方差}).$$

**1.26** 证明：若 $X$ 在区间 $[a, b]$ 上服从均匀分布 (见 (1.23)), 则

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}(a + b) \text{ 和 } \mathrm{var}(X) = (b - a)^2/12.$$

**1.27** 设 $A_1, A_2, \cdots$ 为某一概率空间中的独立事件序列, 满足对所有 $k$,$\mathrm{P}(A_k) = p$, 这里 $0 < p < 1$. 设 $N_k$ 为随机变量, $N_k(\omega)$ 表示 $1 \leqslant i \leqslant k$ 且 $\omega \in A_i$ 的 $i$ 的个数. 用强大数定

律证明, 当 $k \to \infty$ 时, 以概率 1, $N_k/K \to p$. 由此推导出一独立试验序列中的事件的发生频率收敛于事件发生的概率.

**1.28** 设正常骰子被投掷 6000 次, 用中心极限定理估计至少投出 1050 个 6 点的概率 (在估计得到的积分时要用到数值方法).

# 第 2 章　豪斯多夫测度和维数

维数是分形几何的中心概念. 粗略看来, 维数表明一个集合几乎占据的空间有多大. 在经常使用的多种多样的“分形维数”中, 最古老的也可能是最重要的一种, 是以卡拉泰奥多里 (Caratheodory) 构造为基础的豪斯多夫维数. 豪斯多夫维数具有对任何集都有定义的优点, 由于它建立在相对比较容易处理的测度概念的基础上, 因此在数学上也是较方便的. 它的主要缺点是在很多情形下, 用计算的方法很难计算或估计它的值. 然而, 要理解分形的数学机理, 熟悉豪斯多夫测度和维数是必不可少的.

## 2.1　豪斯多夫测度

回忆一下, 如果 $U$ 为 $n$ 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中非空子集, $U$ 的*直径*定义为 $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$, 即 $U$ 内任何两点距离的最大值. 如果 $\{U_i\}$ 是可数 (或有限) 个直径不超过 $\delta$ 的集构成的覆盖 $F$ 的集类: 即 $F \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$, 且对任意 $i$, 都有 $0 \leqslant |U_i| \leqslant \delta$, 则称 $\{U_i\}$ 为 $F$ 的一个 *$\delta$覆盖*.

设 $F$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的子集, $s$ 为一非负数, 对任意 $\delta > 0$, 定义

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ 是 } F \text{ 的 } \delta \text{ 覆盖}\right\}. \tag{2.1}$$

即考察所有直径不超过 $\delta$ 的 $F$ 的覆盖, 并试图使这些直径的 $s$ 次幂的和达到最小 (见图 2.1). 当 $\delta$ 减少时, 式 (2.1) 中能覆盖 $F$ 的集类是减少的, 所以下确界 $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ 相应增加, 且当 $\delta \to 0$ 时趋于一极限. 记为

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(F). \tag{2.2}$$

对 $\mathbf{R}^n$ 中的任何子集 $F$, 这个极限都存在, 但极限值可以是 (并且通常是)0 或 $\infty$, 称 $\mathcal{H}^s(F)$ 为集 $F$ 的 *$s$维豪斯多夫测度*.

通过一定的努力可以说明 $\mathcal{H}^s$ 为一测度, 见 1.3 节. 特别地, $\mathcal{H}^s(\varnothing) = 0$; 如果 $E$ 包含于 $F$ 内, 则 $\mathcal{H}^s(E) \leqslant \mathcal{H}^s(F)$; 如果 $\{F_i\}$ 是任意可数个集序列, 则

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i). \tag{2.3}$$




图 2.1 集 $F$ 和 $F$ 的两个可能的 $\delta$ 覆盖. 取遍所有这样的 $\delta$覆盖$\{U_i\}$而得的$\sum |U_i|^s$的下确界给出$\mathcal{H}^s_\delta(F)$

当 $\{F_i\}$ 是不交的博雷尔集序列时, 要证明上式中等号成立是相当困难的.

豪斯多夫测度推广了长度、面积和体积等常见的概念. 可以证明 $\mathbf{R}^n$ 中任何子集的 $n$ 维豪斯多夫测度与 $n$ 维勒贝格测度, 即通常的 $n$ 维体积, 相差一常数倍. 更精确地, 若 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中博雷尔子集, 则

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1}\mathrm{vol}^n(F), \tag{2.4}$$

其中常数 $c_n$ 是直径为 1 的 $n$ 维球的体积, 所以当 $n$ 是偶数时, $c_n = \pi^{n/2}/2^n(n/2)!$ 而当 $n$ 是奇数时, $c_n = \pi^{(n-1)/2}((n-1)/2)!/n!$. 类似地, 对于 $\mathbf{R}^n$ 中 "好的" 低维子集, $\mathcal{H}^0(F)$ 是 $F$ 中点的数目; $\mathcal{H}^1(F)$ 给出了光滑曲线 $F$ 的长度; 若 $F$ 为光滑曲面, 则 $\mathcal{H}^2(F) = 4/\pi \times \mathrm{area}(F)$; 而 $\mathcal{H}^3(F) = (6/\pi) \times \mathrm{vol}(F)$; 若 $F$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中光滑 $m$ 维子流形 (即经典意义下的 $m$ 维曲面), 则 $\mathcal{H}^m(F) = c_m^{-1} \times \mathrm{vol}^m(F)$.

长度、面积和体积的比例性质是众所周知的. 当比例为原来的 $\lambda$ 倍时, 曲线的长度为原长度的 $\lambda$ 倍, 平面区域的面积则是原面积的 $\lambda^2$ 倍, 而 3 维物体的体积是原体积的 $\lambda^3$ 倍. 可以推测, $s$ 维豪斯多夫测度应当是原来的 $\lambda^s$ 倍 (见图 2.2), 这个比例性质是分形理论的基础.

**比例性质 2.1** 设 $S$ 是相似比为 $\lambda > 0$ 的相似变换, 如果 $F \subset \mathbf{R}^n$, 则

$$\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F). \tag{2.5}$$

**证明** 若 $\{U_i\}$ 为 $F$ 的一个 $\delta$ 覆盖, 则 $\{S(U_i)\}$ 为 $S(F)$ 的一个 $\lambda\delta$ 覆盖. 所以

$$\sum |S(U_i)|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s,$$

故取下确界有

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^{s}(S(F)) \leqslant \lambda^{s}\mathcal{H}_{\delta}^{s}(F).$$

令 $\delta \to 0$ 即得 $\mathcal{H}^{s}(S(F)) \leqslant \lambda^{s}\mathcal{H}^{s}(F)$. 用 $S^{-1}$ 替代 $S$, 上式的 $\lambda$ 成了 $1/\lambda$, 则集 $F$ 由 $S(F)$ 得到了需要的反向不等式. □

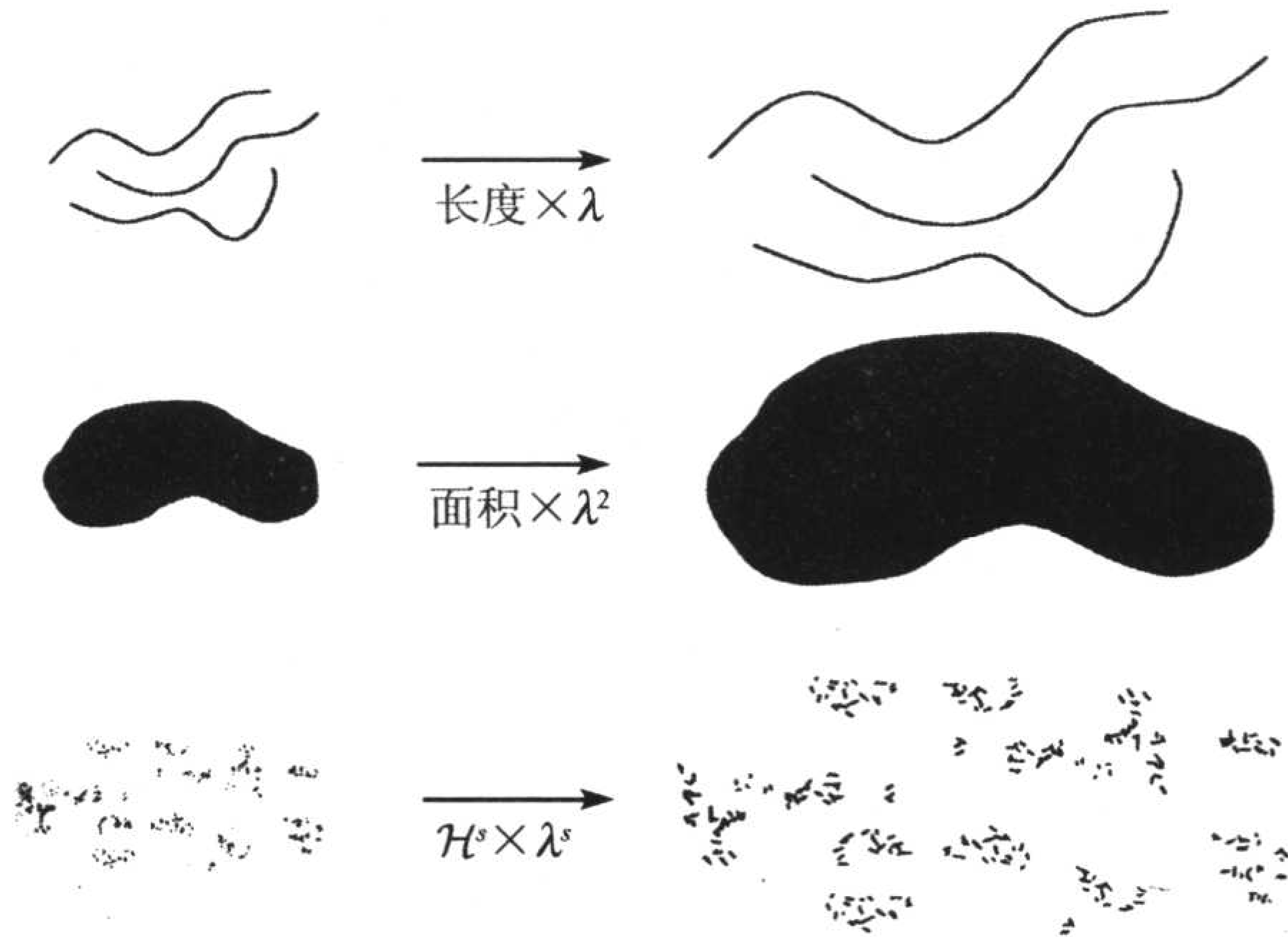



图 2.2　用比例 $\lambda$ 放大集合, 长度放大 $\lambda$ 倍, 面积放大 $\lambda^2$ 倍, $s$ 维豪斯多夫测度放大 $\lambda^s$ 倍

对一般变换作用下集合的豪斯多夫测度, 类似的讨论给出了下面的基本估计.

**命题 2.2**　设 $F \subset \mathbf{R}^n, f: F \to \mathbf{R}^m$ 为一映射, 使得对常数 $c > 0$ 和 $\alpha > 0$, 有

$$|f(x)-f(y)| \leqslant c\,|x-y|^{\alpha} \quad (x, y \in F), \tag{2.6}$$

则对每一 $s$

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^{s}(F). \tag{2.7}$$

**证明**　若 $\{U_i\}$ 为 $F$ 的 $\delta$ 覆盖, 因为 $|f(F\bigcap U_i)| \leqslant c\,|F\bigcap U_i|^{\alpha} \leqslant c\,|U_i|^{\alpha}$, 故知 $\{f(F\bigcap U_i)\}$ 为 $f(F)$ 的 $\varepsilon$ 覆盖, 这里 $\varepsilon = c\delta^{\alpha}$. 于是 $\sum_i |f(F\bigcap U_i|^{s/\alpha} \leqslant c^{s/\alpha}\sum_i |U_i|^{s}$, 所以 $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{s/\alpha}(f(F)) \leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}_{\delta}^{s}(F)$. 当 $\delta \to 0$ 时, 有 $\varepsilon \to 0$, 即得式 (2.7). □

条件 (2.6) 称为指数为 $\alpha$ 的 Hölder 条件, 这是一个使 $f$ 连续的条件. 特别重要的是 $\alpha = 1$ 的情形, 即

$$|f(x)-f(y)| \leqslant c\,|x-y| \quad (x, y \in F), \tag{2.8}$$

这里 $f$ 称为利普希茨映射, 此时

$$\mathcal{H}^{s}(f(F)) \leqslant c^{s}\mathcal{H}^{s}(F). \tag{2.9}$$

特别指出, 对任何具有有界导数的可微函数, 式 (2.9) 均成立; 作为中值定理的一个推论, 这样的函数都为利普希茨映射. 若 $f$ 是保距的, 即 $|f(x)-f(y)|=|x-y|$, 则有 $\mathcal{H}^s((f(F))=\mathcal{H}^s(F)$. 于是, 正如所期望的, 豪斯多夫测度是平移不变的 (即 $\mathcal{H}^s(F+z)=\mathcal{H}^s(F)$, 这里 $F+z=\{x+z:x\in F\}$), 而且是旋转不变的.

## 2.2 豪斯多夫维数

回到方程 (2.1), 容易看出对任何给定的集 $F\subset\mathbf{R}^n$ 且 $\delta<1$, $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ 对 $s$ 是不增的, 因此由式 (2.2) 可知, $\mathcal{H}^s(F)$ 也是不增的. 事实上, 有更进一步的结论: 若 $t>s$, 且 $\{U_i\}$ 为 $F$ 的 $\delta$ 覆盖, 则有

$$\sum_i |U_i|^t \leqslant \sum_i |U_i|^{t-s}|U_i|^s \leqslant \delta^{t-s}\sum_i |U_i|^s, \tag{2.10}$$

取下确界得 $\mathcal{H}^t_\delta(F)\leqslant\delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(F)$. 令 $\delta\to 0$, 可见对于 $t>s$, 若 $\mathcal{H}^s(F)<\infty$, 则 $\mathcal{H}^t(F)=0$. 所以 $\mathcal{H}^s(F)$ 关于 $s$ 的图 (见图 2.3) 表明, 存在 $s$ 的一个临界点使得 $\mathcal{H}^s(F)$ 从 $\infty$"跳跃" 到 0. 这个临界值称为 $F$ 的**豪斯多夫维数**, 记为 $\dim_{\mathrm{H}}F$[注意: 有些作者将豪斯多夫维数称为**豪斯多夫 – 贝希科维奇维数**(Hausdorff-Besicovitch dimension)].

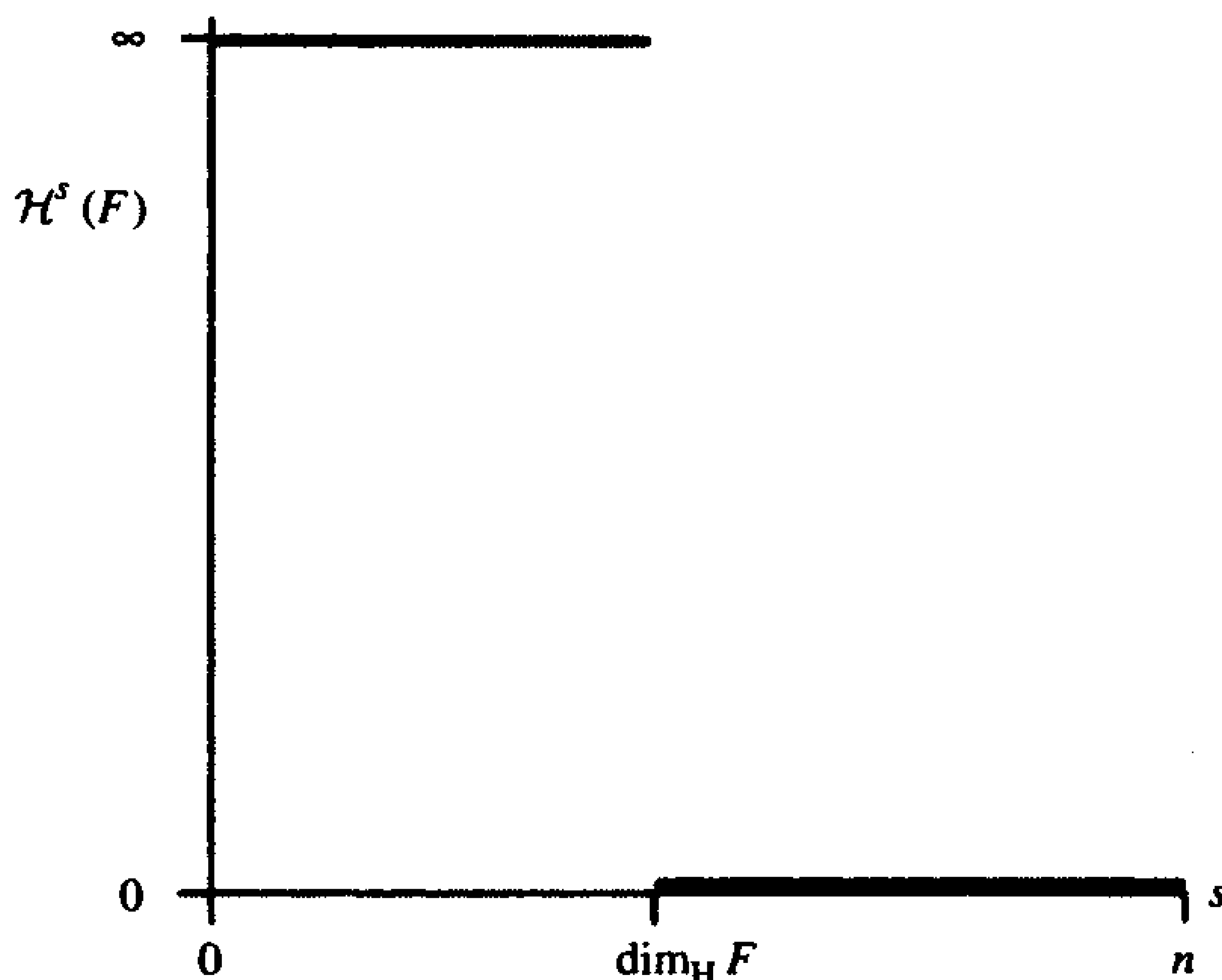



图 2.3 集 $F$ 的 $\mathcal{H}^s(F)$ 的图. 豪斯多夫维数是使得从 $\infty$"跳跃" 到 0 发生的 $s$ 的值

这个定义可以用下式表达:

$$\dim_{\mathrm{H}}F=\inf\{s\geqslant 0:\mathcal{H}^s(F)=0\}=\sup\{s:\mathcal{H}^s(F)=\infty\} \tag{2.11}$$

(取空集的上确界为 0). 所以

$$\mathcal{H}^s(F)=\begin{cases}\infty & 若\ 0\leqslant s<\dim_{\mathrm{H}}F\\ 0 & 若\ s>\dim_{\mathrm{H}}F.\end{cases} \tag{2.12}$$

如果 $s=\dim_{\mathrm{H}}F$, 则 $\mathcal{H}^s(F)$ 可以是零或者无穷或者满足

$$0<\mathcal{H}^s(F)<\infty.$$

满足这个条件的博雷尔集称为 $s$集. 在数学上, $s$ 集是最适合于研究的, 幸运的是经常遇到的集大都是 $s$ 集.

举一个很简单的例子, 设 $F$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中具有单位半径的平圆盘. 由已经熟悉的长度、面积、体积性质可以知道: $\mathcal{H}^1(F)=\mathrm{length}(F)=\infty$, $0<\mathcal{H}^2(F)=4/\pi\times\mathrm{area}(F)=4<\infty$, $\mathcal{H}^3(F)=6/\pi\times\mathrm{vol}(F)=0$. 由于当 $s<2$ 时, $\mathcal{H}^s(F)=\infty$; 当 $s>2$ 时, $\mathcal{H}^s(F)=0$; 故 $\dim_{\mathrm{H}}F=2$.

豪斯多夫维数满足下面的性质 (这是对任何合理的维数定义都期望成立的).

**单调性** 若 $E\subset F$, 则 $\dim_{\mathrm{H}}E\leqslant\dim_{\mathrm{H}}F$; 这可从对每一 $s$, $\mathcal{H}^s(E)\leqslant\mathcal{H}^s(F)$ 这个测度性质立即得到.

**可数稳定性** 如 $F_1,F_2,\cdots$ 为一 (可数) 集序列, 则 $\dim_{\mathrm{H}}\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i=\sup\limits_{1\leqslant i<\infty}\{\dim_{\mathrm{H}}F_i\}$. 由单调性, 对于每一 $j$, 显然有 $\dim_{\mathrm{H}}\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i\geqslant\dim_{\mathrm{H}}F_j$. 另一方面, 若对所有的 $i$, 都有 $s>\dim_{\mathrm{H}}F_i$, 则 $\mathcal{H}^s(F_i)=0$, 所以 $\mathcal{H}^s(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i)=0$, 从而给出反向不等式.

**可数集** 若 $F$ 是可数的, 则 $\dim_{\mathrm{H}}F=0$; 若 $F_i$ 是一单点, 则 $\mathcal{H}^0(F_i)=1$, 即 $\dim_{\mathrm{H}}F_i=0$ , 所以由可数稳定性, 即有 $\dim_{\mathrm{H}}\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i=0$.

**开集** 若 $F\subset\mathbf{R}^n$ 为开集, 则 $\dim_{\mathrm{H}}F=n$, 这是因为 $F$ 包含一个具有正 $n$ 维体积的球, 所以 $\dim_{\mathrm{H}}F\geqslant n$; 又因为 $F$ 包含在可数个球的并里, 利用可数稳定性和单调性, 可得 $\dim_{\mathrm{H}}F\leqslant n$, 即得结论.

**光滑集** 若 $F$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的光滑 (即连续可微)$m$ 维子流形 (即 $m$ 维曲面), 则 $\dim_{\mathrm{H}}F=m$. 特别地, 光滑曲线维数为 1, 光滑曲面维数为 2. 本质上, 这可从豪斯多夫测度与勒贝格测度之间的关系得到, 也可以见练习 2.7.

豪斯多夫维数的变换性质, 可以从命题 2.2 中的豪斯多夫测度的相应性质立即得到.

**命题 2.3** 设 $F\subset\mathbf{R}^n$, $f:F\to\mathbf{R}^m$ 满足 Hölder 条件

$$|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|^{\alpha}\quad(x,y\in F),$$

则 $\dim_{\mathrm{H}}f(F)\leqslant\dfrac{1}{\alpha}\dim_{\mathrm{H}}F$.

**证明** 若 $s > \dim_H F$, 由命题 2.2 得 $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F) = 0$, 这意味着对所有的 $s > \dim_H F$, 有 $\dim_H f(F) \leqslant s/\alpha$. □

**推论 2.4** (a) 若 $f: F \to \mathbf{R}^m$ 为利普希茨变换 (见式 (2.8)), 则 $\dim_H f(F) \leqslant \dim_H F$

(b) 若 $f: F \to \mathbf{R}^m$ 为双利普希茨变换, 即

$$c_1 |x - y| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant c_2 |x - y| \quad (x, y \in F), \tag{2.13}$$

其中 $0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$, 则 $\dim_H f(F) = \dim_H F$.

**证明** (a) 中的结论在命题 2.3 中取 $\alpha = 1$ 得到; 利用这个结论到函数 $f^{-1}: f(F) \to F$, 可得到满足 (b) 要求的反向不等式. □

这个推论揭示了豪斯多夫维数的基本性质: *豪斯多夫维数是双利普希茨变换下的不变量*. 于是若两集有不同的维数, 则两集之间不存在双利普希茨映射. 这类似于在拓扑情形中, 多种 "不变量"(如同调群或者同伦群) 的建立是用来区分不同态的集: 若两集的拓扑不变量不同则两集之间不存在同胚 (连续的一一对应的且有连续逆的) 映射.

在拓扑中, 两集被认为是 "同一" 的, 假如它们之间存在一同胚映射. 在分形几何中的结果是: 若两集之间存在双利普希茨映射, 则认为两集为 "同一" 的. 如同拓扑不变量用来区分不同态的集, 在分形几何中可以选取参数, 包括维数这样的量来区分非双利普希茨等价的集. 因为双利普希茨变换 (2.13) 必然是连续的, 拓扑参数只提供了区分集类的开始, 而豪斯多夫维数 (及其他维数定义) 提供了分形集之间更进一步的特征区别.

一般地, 一个集的维数只告诉读者很少的拓扑性质; 然而, 任何维数小于 1 的集必定是如此稀疏, 以至于是全不连通的, 即它的任意两点都不在同一个连通区域内.

**命题 2.5** 集 $F \subset \mathbf{R}^n$, 且 $\dim_H F < 1$, 则它是全不连通的.

**证明** 设 $x, y$ 是 $F$ 中不同的两点, 由 $f(z) = |z - x|$ 定义映射 $f: \mathbf{R}^n \to [0, \infty)$. 因为 $f$ 不增加距离, 即 $|f(z) - f(w)| = \big||z - x| - |w - x|\big| \leqslant |(z - x) - (w - x)| = |z - w|$, 由推论 2.4(a), 得 $\dim_H f(F) \leqslant \dim_H F < 1$; 于是 $f(F)$ 为 $\mathbf{R}$ 中 $\mathcal{H}^1$ 测度或长度为零的子集, 所以有稠密余集. 选取 $r$ 使 $r \notin f(F)$ 且 $0 < r < f(y)$, 则有

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \bigcup \{z \in F : |z - x| > r\}.$$

所以 $F$ 包含于两个不交开集中, 而 $x$ 与 $y$ 分别属于其中之一, 所以 $x$ 与 $y$ 在 $F$ 的不同连通部分内. □

## 2.3 豪斯多夫维数的计算 —— 简单的例子

这一节说明如何去计算像引言中提到的一些简单分形的豪斯多夫维数. 其他的一些方法在本书中也会提到. 必须注意的是:

**例 2.6** 设 $F$ 为康托尔尘, 它由单位正方形如图 0.4 所示的构造办法得到.(构造的每一步是将正方形分为 16 个小正方形, 小正方形边长为原正方形的 1/4, 四个同样排列模式的小正方形被保留下来), 则 $1 \leqslant \mathcal{H}^1(F) \leqslant \sqrt{2}$, 所以 $\dim_H F = 1$.

**计算** 取构造的第 $k$ 步 $E_k$ 中的 $4^k$ 个边长为 $4^{-k}$ 的 (即直径为 $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$) 正方形, 它们显然覆盖 $F$. 可以得到式 (2.1) 中下确界的一个估计 $\mathcal{H}^1_\delta(F) \leqslant 4^k \times 4^{-k}\sqrt{2}$, 当 $k \to \infty$ 时, 也有 $\delta \to 0$, 得到 $\mathcal{H}^1(F) \leqslant \sqrt{2}$.

对于下界的估计, 用 proj 表示到 $x$ 轴的垂直射影. 垂直射影不会增加距离, 即 $|\text{proj}\, x - \text{proj}\, y| \leqslant |x-y|$, $x, y \in \mathbf{R}^2$, 所以 proj 为利普希茨映射. 通过 $F$ 的构造, 可知: $F$ 在 $x$ 轴上的射影或 "影子" proj$F$ 为单位区间 [0,1]. 应用式 (2.9)

$$1 = \text{length}\,[0,1] = \mathcal{H}^1\left([0,1]\right) = \mathcal{H}^1(\text{proj}\ F) \leqslant \mathcal{H}^1(F) \qquad \square$$

注意到, 对于反复地将正方形分成 $m^2$ 个边长为 $1/m$ 的小正方形, 且在每一柱集内只保留一个小正方形而得到的集来说, 类似的论证和结论也是成立的.

这个应用垂直射影得到豪斯多夫测度下界估计的技巧只在特殊的情形起作用, 它不是基本的一般方法. 通常为了维数的下界估计需要作一些更困难的工作.

**例 2.7** 设 $F$ 为三分康托尔集 (见图 0.1), 若 $s = \ln 2/\ln 3 = 0.6309\cdots$, 则 $\dim_H F = s$, 且 $1/2 \leqslant \mathcal{H}^s(F) \leqslant 1$.

**启发式计算** 康托尔集 $F$ 分为左半部分 $F_L = F\bigcap[0,1/3]$ 和右半部分 $F_R = F\bigcap[2/3,1]$, 显然两部分都几何相似于 $F$, 比例系数为 1/3, 且 $F = F_L \bigcup F_R$ 为不交并. 所以对任意 $s$, 由豪斯多夫测度的比例性质 2.1 可得

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R) = (1/3)^s\,\mathcal{H}^s(F) + (1/3)^s\,\mathcal{H}^s(F).$$

假设在临界值$s$=$\dim_H F$ , 有$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$成立(一个大胆的假设, 但可能是合理的), 等式两边可以同除以 $\mathcal{H}^s(F)$, 得 $1 = 2\,(1/3)^s$ 或者 $s$=ln 2/ln 3 .

**严格的计算** 称 $F$ 的构造中组成集 $E_k$ 的区间为 $k$水平区间, 则 $E_k$ 包含 $2^k$ 个每个长度为 $3^{-k}$ 的 $k$ 水平区间.

取 $E_k$ 的区间为 $F$ 的一个 $3^{-k}$ 覆盖, 由此得到, 若 $s$=ln 2/ln 3, 则 $\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(F) \leqslant 2^k 3^{-ks} = 1$. 令 $k \to \infty$, 即得 $\mathcal{H}^s(F) \leqslant 1$.

为了证明 $\mathcal{H}^s(F) \geqslant 1/2$, 说明对 $F$ 的任何覆盖 $\{U_i\}$ 有

$$\sum |U_i|^s \geqslant 1/2 = 3^{-s}. \tag{2.14}$$

显然, 只要假定 $\{U_i\}$ 是区间就可以了, 通过轻微扩展它们, 并且由 $F$ 的紧性, 只需在 $\{U_i\}$ 是 [0,1] 中有限个闭子区间的情形下证明式 (2.14) 即可. 对每一 $\{U_i\}$, 设 $k$ 是满足

$$3^{-(k+1)} \leqslant |U_i| < 3^{-k} \tag{2.15}$$

的整数. 由于这些 $k$ 水平区间之间的间隙至少是 $3^{-k}$, 所以 $U_i$ 最多可能与一个 $k$ 水平区间相交. 若 $j \geqslant k$, 由集的构造并利用式 (2.15) 可知, $U_i$ 最多与 $2^{j-k} = 2^j \cdot 3^{-sk} \leqslant 2^j 3^s |U_i|^s$ 个 $j$ 水平区间相交. 如果选择充分大的 $j$, 使得对所有的 $U_i$ 有 $3^{-(j+1)} \leqslant |U_i|$, 则因为 $\{U_i\}$ 与所有 $2^j$ 个长度为 $3^{-j}$ 的基本区间相交, 计算区间数目得到 $2^j \leqslant \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$, 简化后可得到式 (2.14). □

更进一步的努力, 可以改进上面的计算并且证明 $\mathcal{H}^s(F) = 1$.

可以看出, 即使是对简单的集合而言, 豪斯多夫测度和维数的计算都是相当困难而复杂的. 通常, 对维数的下界估计比较难于求出.

在例 2.7 中应用的 "启发式" 计算方法可以对很多自相似集的维数给出正确结果. 例如, von Koch 曲线由与它相似的比例常数为 1/3 的四个部分组成, 所以具有维数 ln4/ln3 . 更一般地, 若 $F = \bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$, 这里 $F_i$ 几何相似于 $F$ 而比例系数为 $c_i$, 假如 $F_i$ 不互相重叠 "太多", 则由启发式讨论, 可以得出 $\dim_{\mathrm{H}} F$ 等于使 $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$ 中的 $s$ 值. 这个结论的正确性将在第 9 章全面讨论.

## *2.4 豪斯多夫维数的等价定义

在这里要指出的是, 由其他类型覆盖集定义的测度也可以导出豪斯多夫维数. 例如, 用球来覆盖: 设

$$B_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum |B_i|^s : \{B_i\} \text{ 为 } F \text{ 的 } \delta \text{ 球覆盖}\right\}, \tag{2.16}$$

可得到一测度 $\mathcal{B}^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{B}_\delta^s(F)$ 及一个 "维数", 在这一 "维数" 点上 $\mathcal{B}^s(F)$ 从 $\infty$ 跳跃到 0. 显然, $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leqslant \mathcal{B}_\delta^s(F)$, 因为 $F$ 的 $\delta$ 球覆盖都是 $\mathcal{H}_\delta^s$ 定义中容许的覆盖. 而且, 若 $\{U_i\}$ 为 $F$ 的 $\delta$ 覆盖, 如果对每个 $i$, 选取半径为 $|U_i| \leqslant \delta$, 且包含 $U_i$ 的某个球作为 $B_i$, 则 $\{B_i\}$ 是 $F$ 的 $2\delta$ 覆盖. 所以 $\sum |B_i|^s \leqslant \sum (2|U_i|)^s = 2^s \sum |U_i|^s$, 取下确界得 $\mathcal{B}_{2\delta}^s(F) \leqslant 2^s \mathcal{H}_\delta^s(F)$. 令 $\delta \to 0$ 得到 $\mathcal{H}^s(F) \leqslant \mathcal{B}^s(F) \leqslant 2^s \mathcal{H}^s(F)$. 这意味着 $\mathcal{H}^s$ 与 $\mathcal{B}^s$ 在同一数值 $s$ 上从 $\infty$ 跃跳到 0, 所以, 由这两个测度定义的维数是等价的.

容易验证, 如果在式 (2.1) 中只用开集或只用闭集的 $\delta$ 覆盖, 得到的也是与豪斯多夫测度及维数相同的值. 而且, 若 $F$ 是紧的, 通过轻微扩展使覆盖集为开集, 再取

有限的子覆盖, 则如果只考虑由有限个集构成的 $\delta$ 覆盖, 也可以得到与 $\mathcal{H}^s(F)$ 同样的值.

网测度是另一个有用的变量. 为了简单起见, 设 $F$ 为区间 $[0,1)$ 的子集. 二进制区间是指 $[r2^{-k},(r+1)2^{-k}]$ 形式的区间, 其中 $k=0,1,2,\cdots$, 且 $r=0,1,\cdots,2^k-1$. 定义

$$\mathcal{M}_\delta^s(F)=\inf\left\{\sum |U_i|^s:\{U_i\}\text{ 为 } F \text{ 二进制区间的 } \delta \text{ 覆盖}\right. \tag{2.17}$$

由此导出网测度

$$\mathcal{M}^s(F)=\lim_{\delta\to 0}\mathcal{M}_\delta^s(F). \tag{2.18}$$

因为任何区间 $U\subset[0,1)$, 都包含在每个长度至多为 $2|U|$ 的两个连续的二进制区间内, 用对于测度 $\mathcal{B}^s$ 的同样方法, 可以知道:

$$\mathcal{H}^s(F)\leqslant\mathcal{M}^s(F)\leqslant 2^{s+1}\mathcal{H}^s(F). \tag{2.19}$$

由此得出使得 $\mathcal{M}^s(F)$ 从 $\infty$ 跳跃到 0 的数值 $s$ 等于 $F$ 的豪斯多夫维数, 即两个测度的定义给出了同一个维数.

对于某些场合来说, 网测度比豪斯多夫测度更方便. 这是因为两个二进制区间或者不交或者一个包含另一个, 对于任何二进制区间覆盖可以简化为不交的二进制区间覆盖.

## *2.5 维数的精细定义

有时需要维数不仅是它的数值, 而且是精确表示维数性质的函数. 为此, 设 $h:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 为一不增的连续函数, 称 $h$ 为*维数函数*或者*尺度函数*. 类似于式 (2.1), 对 $\mathbf{R}^n$ 的子集 $F$, 定义

$$\mathcal{H}_\delta^h(F)=\inf\left\{\sum h(|U_i|):\{U_i\}\text{ 为 } F \text{ 的}\delta\text{覆}\right\}. \tag{2.20}$$

取 $\mathcal{H}^h(F)=\lim\limits_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^h(F)$, 由此得到一测度.(若 $h(t)=t^s$, 这就是通常的 $s$ 维豪斯多夫测度的定义), 若 $h$ 与 $g$ 同为维数函数, 并且满足当 $t\to 0$ 时, $h(t)/g(t)\to 0$, 那么由类似于式 (2.10) 的讨论, 如果 $\mathcal{H}^g(F)<\infty$, 可以得到 $\mathcal{H}^h(F)=0$. 所以维数函数可以分为两类: 一类使 $\mathcal{H}^h$ 为有限的; 另一类使 $\mathcal{H}^h$ 为无穷. 这就得到了 $F$ 的比数 $\dim_{\mathrm{H}}F$ 更精细的 "维数" 指标.

关于这方面一个重要的例子是 $\mathbf{R}^3$ 中的布朗运动 (更详细的内容可参见第 16 章). 可以证明布朗运动轨道 (以概率 1) 有豪斯多夫维数为 2, 但相应的 $\mathcal{H}^2$ 测度为零. 更精确的计算表明, 当 $h(t)=t^2\ln\ln(1/t)$ 时, 这样的轨道有正的和有限的 $\mathcal{H}^h$ 测度. 尽管布朗轨道的维数为 2, 在某种意义下, 维数 "以对数小于 2".

## 2.6 注记和参考文献

用集的覆盖定义测度的思想是 Caratheodory(1914) 提出的. 豪斯多夫 (1919) 用这个方法定义了现在以他的名字命名的测度, 说明了三分康托尔集维数是 ln2/ln3 且具有正有限的测度. 从那时以来, Besicovitch 和他的学生进一步揭示了豪斯多夫测度的性质.

Falconer(1985a) 相当详细地讨论了豪斯多夫测度与维数更深层的问题; Rogers(1970), Federer(1996) 和 Mattila(1995) 进行了更一般性的研究.Merzenich and Staiger(1994) 把豪斯多夫维数和形式语言及自动化理论联系起来.

### 练　习

**2.1** 证明: 假如在式 (2.1) 中, 我们仅考虑闭集 $\{U_i\}$的 $\delta$ 覆盖 $\{U_i\}$, 那么 $\mathcal{H}^s(F)$ 的值不变.

**2.2** 证明: $\mathcal{H}^0(F)$ 等于集 $F$ 中点的数目.

**2.3** 用定义验证: $\mathcal{H}^s(\varnothing)=0$; 如果 $E\subset F$, 则 $\mathcal{H}^s(E)\leqslant\mathcal{H}^s(F)$; 及 $\mathcal{H}^s(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^s(F_i)$.

**2.4** 设 $F$ 是闭区间 $[0,1]$, 证明: 当 $0\leqslant s<1$ 时, $\mathcal{H}^s(F)=\infty$; 当 $s>1$ 时, $\mathcal{H}^s(F)=0$; 及 $0<\mathcal{H}^1(F)<\infty$.

**2.5** 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为有连续导数的可微函数. 证明: 对任何集 $F$ 有 $\dim_{\rm H}f(F)\leqslant\dim_{\rm H}F$(首先考虑当 $F$ 为有界集的情形, 证明: $f$ 是 $F$ 上的利普希茨函数).

**2.6** 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为 $f(x)=x^2$, $F$ 为 $\mathbf{R}$ 的任何子集. 证明: $\dim_{\rm H}f(F)=\dim_{\rm H}F$.

**2.7** 设 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 是利普希茨函数, 记 graph $f=\{(x,f(x)):0\leqslant x\leqslant 1\}$. 证明: $\dim_{\rm H}\mathrm{graph}f=1$ . 注意: 特别的, 当 $f$ 是连续可微时也有同样结论, 见练习 1.13.

**2.8** 求 $\mathbf{R}$ 上的集合 $\{0,1,2,3,\cdots\}$和 $\{0,1,1/2,1/3,1/4,\cdots\}$的豪斯多夫维数各是多少?

**2.9** 设 $F$ 是由 0 与 1 之间十进制表达式中不含有数字 5 的数组成的集, 用“启发式”的讨论说明 $\dim_{\rm H}F=\ln 9/\ln 10$. 你能给出严格的论证吗? 推广这个结果.

**2.10** 设 $F$ 是由 $\mathbf{R}^2$ 中的点 $(x,y)$ 满足 $x$ 或 $y$ 的十进制表达式中含有数字 5 而组成的集, 用“启发式”的讨论说明: $\dim_{\rm H}F=2\ln 9/\ln 10$.

**2.11** 用“启发式”讨论说明图 0.5 所示的集的豪斯多夫维数等于方程 $4(1/4)^s+(1/2)^s=1$ 的解. 通过求解 $(1/2)^s$ 的二次方程, 找到 $s$ 的显式表达式.

**2.12** 设 $F$ 是由三进制表达式为 $b_mb_{m-1}\cdots b_1.a_1a_2\cdots$ 的实数组成的集, 其中 $a_i$ 和 $b_i$ 皆不为 1. (所以 $F$ 由向外和向内扩展的类似康托尔集过程构造得到) 问 $F$ 的豪斯多夫维数是多少?

**2.13** 设集由三进制表达式为 $0.a_1a_2\cdots$ 的数组成, 其中存在正整数 $k$(可以依赖 $x$) 使得对所有 $i\geqslant k$ 有 $a_i\neq 1$, 问此集的豪斯多夫维数是多少?

**2.14** 设 $F$ 是由去掉区间中间一段比例为 $0 < \lambda < 1$ 的部分, 而得到的类似三分康托尔集的集合, 用 "启发式" 的讨论证明: $\dim_{\mathrm{H}} F = \ln 2/\ln(2/(1-\lambda))$; 如果令 $E = F\times F \subset \mathbf{R}^2$, 用同样的方法证明: $\dim_{\mathrm{H}} E = 2\ln 2/\ln(2/(1-\lambda))$.

**2.15** 证明: 对每一 $s, 0 \leqslant s \leqslant 2$, 存在豪斯多夫维数为 $s$ 的平面中的全不连通的子集.

**2.16** 设 $S$ 为平面中的单位圆, $S$ 上的点由相向于圆心与一固定轴线的夹角 $\theta$ 参数化, 所以 $\theta_1$ 与 $\theta_2$ 表示同一点的充要条件为通常的 $\theta_1$ 与 $\theta_2$ 相差 $2\pi$ 的整数倍. 设 $F = \{\theta \in S : 0 \leqslant 3^k\theta \leqslant \pi(\bmod 2\pi), k = 1, 2, \cdots\}$, 证明: $\dim_{\mathrm{H}} F = \ln 2/\ln 3$.

**2.17** 证明: 若 $h$ 与 $g$ 为维数函数, 满足当 $t \to 0$ 时, $h(t)/g(t) \to 0$. 则当 $\mathcal{H}^g(F) < \infty$ 时, 有 $\mathcal{H}^h(F) = 0$.

# 第 3 章　维数的其他定义

第 2 章讨论的豪斯多夫维数是后面各章将要应用的维数的主要定义. 然而, 还有其他一些广泛应用的定义, 研究这其中的一些定义以及它们之间的内部联系是很有必要的. 当然也不是所有的定义都可以普遍应用, 有些只能用来描述像曲线这样的特殊集类.

大部分维数的定义都基于 "用尺度 $\delta$ 进行量度" 这样的思想, 利用下面的方法进行测量: 即忽略尺寸小于 $\delta$ 时的不规则性, 并且察看当 $\delta \to 0$ 时, 这些测量值的状况如何. 例如, 当 $F$ 是平面曲线, 则测量值 $M_\delta(F)$ 可以用两脚距离长度为 $\delta$ 的两脚规, 度量整个 $F$ 所需的步数确定. 而 $F$ 的维数则由 $M_\delta(F)$ 服从的幂定律 (如果有的话) 决定, 即当 $\delta \to 0$, 如果对常数 $c$ 和 $s$, 有

$$M_\delta(F) \sim c\delta^{-s}, \tag{3.1}$$

则可以说 $F$ 具有 "分配维数"$s$, 而 $c$ 则可以看成是集 $F$ 的 "$s$ 维长度". 取对数得

$$\ln M_\delta(F) \simeq \ln c - s \ln \delta, \tag{3.2}$$

在上式两端的差随 $\delta$ 趋于零而趋于零的意义下, 就有

$$s = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln M_\delta(F)}{-\ln \delta}. \tag{3.3}$$

由于 $s$ 可以通过在 $\delta$ 值的一个适当范围内, 作出重对数 (ln-ln) 图的斜率来估计 (见图 3.1), 所以上述公式对于计算和实验而言都是很令人感兴趣的. 在实际现象中, 当然只能对 $\delta$ 在有限范围内进行讨论, 而在尺度达到原子的尺寸之前, 理论结果与实验就会有很大的差别. 例如, 取 $\delta$ 的范围在 20 米和 200 千米之间, 根据不列颠海岸线作出的重对数图, 可以得到的分配维数约等于 1.2 .

也可能 $M_\delta(F)$ 不服从精确的幕定律, 但与之最接近的, 则可以得到式 (3.3) 中的下极限和上极限.

为了使式 (3.1) 给出的 $s$ 值看起来像一个维数, 测量的方法就必须与测量的集成比例, 使得如果 $F$ 的大小扩大一倍, 同时尺度也扩大一倍, 得到的测量值并不受影响. 也就是对所有的 $\delta$, 必须有 $M_\delta(\delta F) = M_1(F)$. 如果在这里修改一下例子, 并重新定义 $M_\delta(F)$ 为所有步数的长度和, 则 $M_\delta(F)$ 是一次齐次的, 即对 $\delta > 0$, 有: $M_\delta(\delta F) = \delta^1 M_1(F)$, 同时必须把这个条件引入维数定义的考虑中. 一般地,

如果 $M_\delta(F)$ 是 $d$ 次齐次的, 即 $M_\delta(\delta F) = \delta^d M_1(F)$, 则形式为 $M_\delta(F) \sim c\delta^{d-s}$ 的幂定律对应的维数是 $s$.

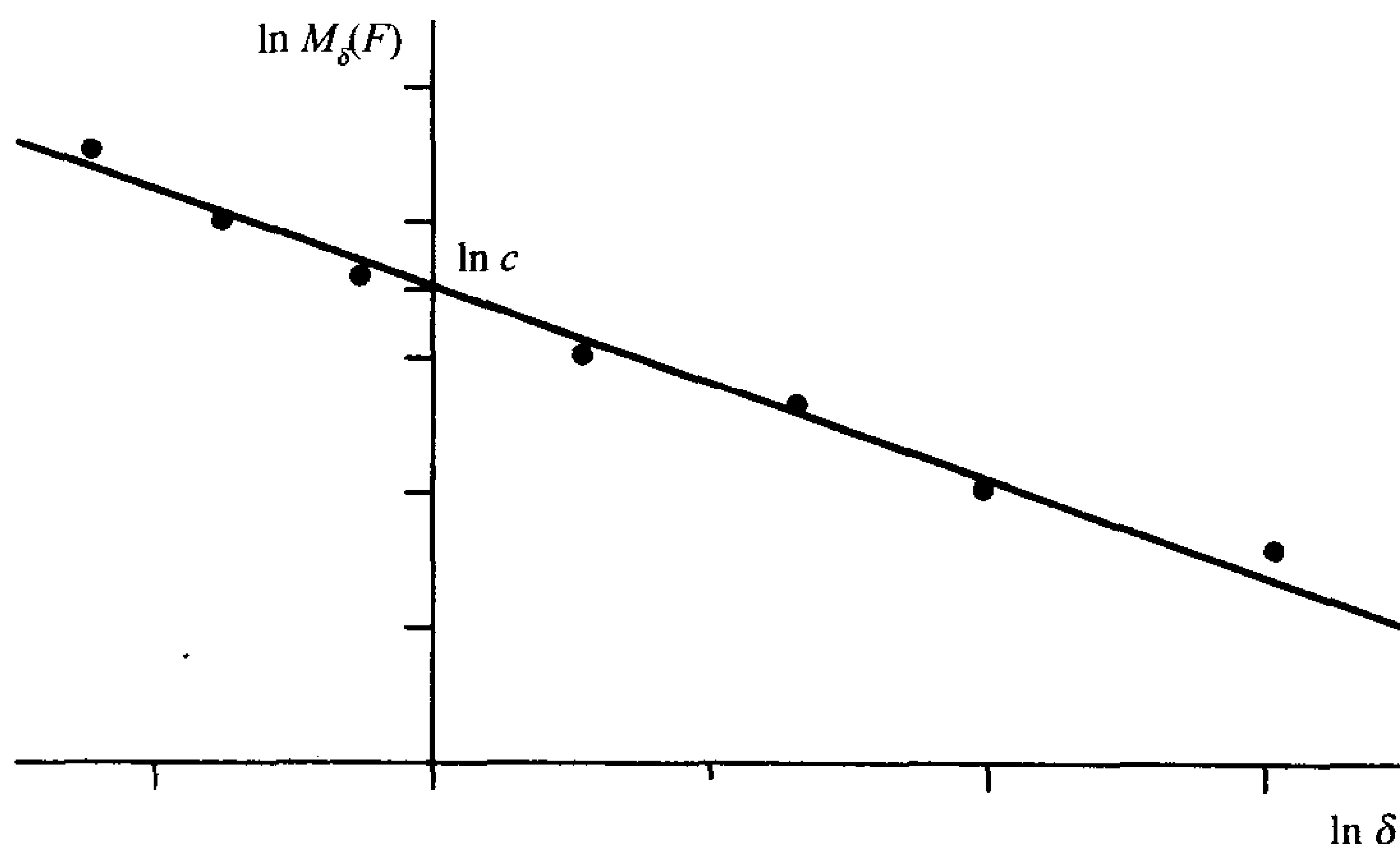



图 3.1　在服从幂定律 $M_\sigma(F) \sim c\delta^{-s}$ 的假定下, 对集 $F$ 维数的经验估计

并不存在严格的和明快的规则来确定某个量是否能合理地被当成一个维数. 也有许多定义, 甚至在简化的情形下也不适合上面所谈到的幂定律, 决定一个维数定义是否可接受的因素更多地由经验和直觉确定. 为确定一个量能否作为维数, 通常是去寻找它的某种类型的比例性质、在特殊意义下定义的自然性以及如下文讨论的维数的典型性质.

应当注意一些表面上很相似的维数定义, 具有的性质可能差别很大. 不应当假定不同的定义对同一个集合能给出相同的维数值, 即使对很 "规则" 的集也是如此. 这样的假定在过去已造成了很大的误解和混乱. 对任一维数应当从它的定义去研究它的性质. 豪斯多夫维数 (在本书后面的各章中, 大都利用它进行研究) 所具有的性质, 别的维数未必都具有.

对一个 "维数" 来说, 希望它具有的性质是什么呢? 在第 2 章讨论的豪斯多夫维数的那些性质是很典型的.

**单调性**　　如果 $E \subset F$, 则 $\dim_H E \leqslant \dim_H F$.

**稳定性**　　$\dim_H(E \bigcup F) = \max(\dim_H E, \dim_H F)$.

**可数稳定性**　　$\dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sup_{1\leqslant i<\infty} \dim_H F_i$.

**几何不变性**　　如果 $f$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中如平移、旋转、相似或仿射之类的变换, 则 $\dim_H f(F) = \dim_H F$.

**利普希茨不变性**　　如果 $f$ 是双利普希茨变换, 则

$$\dim_H f(F) = \dim_H F.$$

可数集　　如果 $F$ 是有限的或可数的, 则

$$\dim_{\mathrm{H}} F = 0.$$

开集　　若 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的开子集, 则 $\dim_{\mathrm{H}} F = n$.

光滑流形　　如果 $F$ 是 $m$ 维的光滑流形 (曲线、平面等), 则 $\dim_{\mathrm{H}} F = m$.

所有定义的维数都是单调的, 大部分都是稳定的. 但正如我们将看到的, 一些普通定义的维数不具有可数稳定性, 并且在可数集上具有正的维数. 所有平常的维数都是利普希茨不变的, 因此也是几何不变的."开集" 和 "光滑流形" 性质保证了维数是经典定义的推广. 应当注意的是: 维数的不同定义可以提供关于什么样的集是利普希茨等价的不同信息.

## 3.1 计盒维数

计盒维数或称盒维数 (Box-counting 或 Box dimension) 是应用最广泛的维数之一, 它的普遍应用主要是由于这种维数的数学计算及经验估计相对容易一些. 对这种定义的研究可以追溯到 20 世纪 30 年代, 并且对它有各种各样不同的称呼: Kolmogorov 熵、熵维数、容度维数 (考虑到可能联想到位势理论, 最好避免用这个术语)、度量维数、对数密度和信息维数等. 本书中将恒称它为盒维数或计盒维数以避免混乱.

设 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上任意非空的有界子集, $N_\delta(F)$ 是直径最大为 $\delta$, 可以覆盖 $F$ 的集的最少个数, 则 $F$ 的*下计盒维数*和*上计盒维数*分别定义为

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}, \tag{3.4}$$

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \varlimsup_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}. \tag{3.5}$$

如果这两个值相等, 则称这共同的值为 $F$ 的*计盒维数或盒维数*, 记为

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}. \tag{3.6}$$

这里, 以及贯穿本书都假定 $\delta > 0$ 充分小, 以保证 $-\ln\delta$ 以及类似的量都是严格正的. 为了避免 "$\ln 0$" 或者 "$\ln\infty$" 这样的问题, 一般只考虑非空有界集的盒维数. 在研究盒维数的一般理论中, 总是假定考虑的集都是非空且有界的.

有一些盒维数的等价定义, 有时这些定义更适合应用. 考虑 $\mathbf{R}^n$ 中 $\delta$ 坐标网立方体, 即下列形式的立方体

$$[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta],$$

其中 $m_1,\cdots,m_n$ 都是整数 (回顾一下, 在 $\mathbf{R}^1$ 的 "立方体" 为区间, 而在 $\mathbf{R}^2$ 上为正方形), 设 $N'_\delta(F)$ 是 $\delta$ 网立方体与 $F$ 相交的个数, 显然这是 $N'_\delta(F)$ 个直径为 $\delta\sqrt{n}$ 的覆盖 $F$ 的集类, 因此有

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leqslant N'_\delta(F).$$

如果 $\delta\sqrt{n} < 1$, 则

$$\frac{\ln N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\ln(\delta\sqrt{n})} \leqslant \frac{\ln N'_\delta(F)}{-\ln\sqrt{n} - \ln\delta},$$

令 $\delta \to 0$, 取下极限和上极限,

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\ln N'_\delta(F)}{-\ln\delta}, \tag{3.7}$$

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant \varlimsup_{\delta\to 0} \frac{\ln N'_\delta(F)}{-\ln\delta}. \tag{3.8}$$

另一方面, 任何直径最大为 $\delta$ 的集合包含在 $3^n$ 个边长为 $\delta$ 的网立方体内 (由包含这个集的一些点的一个立方体以及与此立方体相邻的全部立方体组成), 因此

$$N'_\delta(F) \leqslant 3^n N_\delta(F),$$

取对数并取当 $\delta \to 0$ 时的极限可以得到与式 (3.7) 和式 (3.8) 反向的不等式. 因此为求出由式 (3.4)~(3.6) 定义的盒维数, 可以等价地取 $N_\delta(F)$ 为与 $F$ 相交的边长为 $\delta$ 的网立方体的个数.

盒维数的这个形式的定义在实际中有广泛的应用, 为计算一个平面集 $F$ 的盒维数, 可以构造一些边长为 $\delta$ 的正方形或称为盒子, 然后计算不同 $\delta$ 值的 "盒子" 与 $F$ 相交的个数 $N_\delta(F)$(计盒维数由此得名). 这个维数是当 $\delta \to 0$ 时, $N_\delta(F)$ 增加的对数速率, 或者可以由函数 $\ln N_\delta(F)$ 相对于 $-\ln\delta$ 图的斜率值来估计.

这个定义给出了盒维数定义的一个解释, 与集 $F$ 相交的边长为 $\delta$ 的网立方体的个数正好表示了这个集是如何展开的, 或者说是以尺度 $\delta$ 度量时这个集的不规则程度. 维数反映了当 $\delta \to 0$ 时集合的不规则性是如何迅速表现出来的.

盒维数的另一个经常应用的定义还是具有式 (3.4)~(3.6) 的形式, 不过把其中的 $N_\delta(F)$ 取为覆盖所需要的边长为 $\delta$ 的任意立方体的最少个数. 这个定义的等价性是由于网立方体的性质, 注意到任一个边长为 $\delta$ 的立方体的直径都为 $\delta\sqrt{n}$, 并且任意的直径最大为 $\delta$ 的集一定包含在一个边长为 $\delta$ 的立方体内.

类似地, 如果在式 (3.4)~(3.6) 中取 $N_\delta(F)$ 为覆盖 $F$ 的半径为 $\delta$ 的最少闭球数, 所得的维数值与原值也完全相等.

盒维数的另一个等价定义就不那么显然了, 它等于球心在 $F$ 上, 半径为 $\delta$ 的相互不交球的最多个数. 用 $N'_\delta(F)$ 表示这个个数, 用 $B_1,\cdots,B_{N'_\delta(F)}$ 表示半径为 $\delta$、球

心在 $F$ 上相互不交的球. 如果 $x$ 属于 $F$, 则 $x$ 至少与 $B_i$ 中的一个球的距离小于 $\delta$, 否则可以把以 $x$ 为球心、半径为 $\delta$ 的球加进去, 而组成更多的不交的球. 这样, $N'_\delta(F)$ 个与 $B_i$ 同心, 但半径为 $2\delta$(直径 $4\delta$) 的球覆盖 $F$, 而有

$$N_{4\delta}(F) \leqslant N'_\delta(F). \tag{3.9}$$

另一方面, 设 $B_1, \cdots, B_{N'_\delta(F)}$ 是球心在 $F$ 上, 半径为 $\delta$ 的相互不交的球, 设 $U_1, \cdots, U_k$ 是任意直径最大为 $\delta$, 且覆盖 $F$ 的集类. 由于 $U_j$ 必然覆盖 $B_i$ 的球心, 所以每个 $B_i$ 至少包含 $U_j$ 的一个点. 由于 $B_i$ 是不交的, 知 $U_j$ 至少与 $B_i$ 一样多. 因此

$$N'_\delta(F) \leqslant N_\delta(F) \tag{3.10}$$

对式 (3.9) 和 (3.10) 取对数并取极限, 表明如果用这样的 $N'_\delta(F)$ 取代原来的 $N_\delta(F)$, 式 (3.4)~(3.6) 的值是不变的.

这些不同方式的定义概括如下, 并用图 3.2 表示.

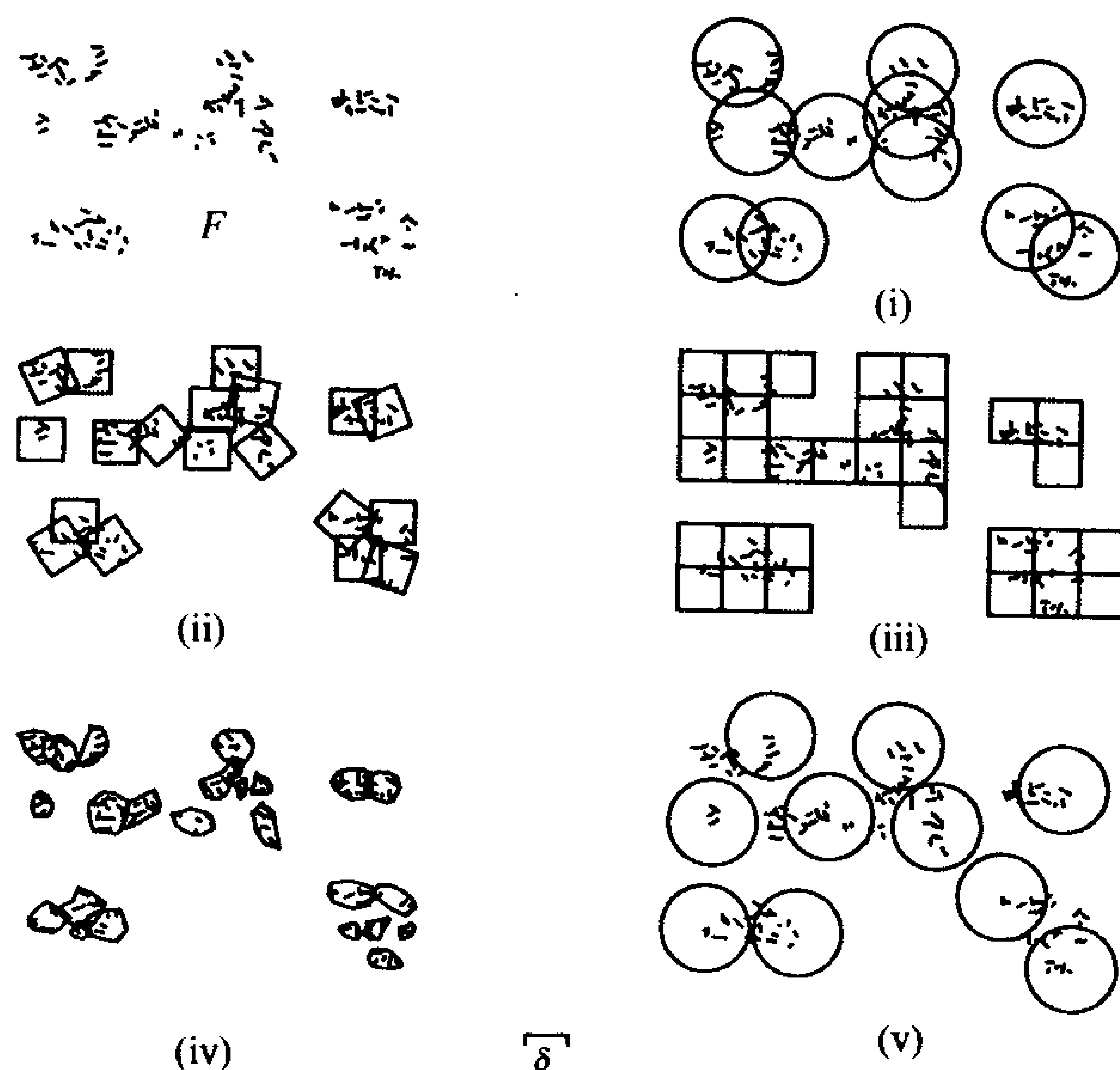



图 3.2 求 $F$ 的盒维数的 5 种方法, 见等价定义 3.1. 数 $N_\delta(F)$ 可以取为: (i) 覆盖 $F$ 的半径为 $\delta$ 的最少闭球数: (ii) 覆盖 $F$ 的边长为 $\delta$ 的立方体的最少个数; (iii) 与 $F$ 相交的 $\delta$ 网立方体的个数; (iv) 覆盖 $F$ 的直径最大的 $\delta$ 的集的最少个数; (v) 球心在 $F$ 上, 半径为 $\delta$ 的不交球的最多个数

**等价定义 3.1** $\mathbf{R}^n$ 的子集$F$的下盒维数和上盒维数由以下两式给出:

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \varliminf_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}, \tag{3.11}$$

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}; \tag{3.12}$$

$F$的盒维数由下式定义：

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \tag{3.13}$$

(如果这个极限存在的话), 其中 $N_\delta(F)$ 是下列五个数中的任一个：

(1) 覆盖 $F$ 的半径为 $\delta$ 的最少闭球数;

(2) 覆盖 $F$ 的边长为 $\delta$ 的最少的立方体数;

(3) 与 $F$ 相交的 $\delta$ 网立方体的个数;

(4) 覆盖 $F$ 的直径最大为 $\delta$ 的集的最少个数;

(5) 球心在 $F$ 上, 半径为 $\delta$ 的相互不交的球的最多个数.

这个清单还可以进一步扩大, 在实际应用中, 可以采用一种对每一个特殊问题最合适应用的定义.

还应当指出, 在式 (3.11)~(3.13) 中, 为考虑当 $\delta \to 0$ 时的极限, 只要考虑通过任一满足 $\delta_{k+1} \geqslant c\delta_k$ 的递减序列 $\delta_k$ 趋于零时的极限, 其中 $0 < c < 1$; 特别是在 $\delta_k = c^k$ 的情形. 为看清这一点, 注意到如果 $\delta_{k+1} \leqslant \delta < \delta_k$, 且 $N_\delta(F)$ 是 $F$ 的 $\delta$ 覆盖集的最少个数, 则

$$\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \leqslant \frac{\ln N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\ln \delta_k} = \frac{\ln N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\ln \delta_{k+1} + \ln \dfrac{\delta_{k+1}}{\delta_k}} \leqslant \frac{\ln N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\ln \delta_{k+1} + \ln c},$$

因此有

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \leqslant \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\ln N_{\delta_k}(F)}{-\ln \delta_k}. \tag{3.14}$$

相反的不等式是平凡的, 下极限也可用同样的方法处理.

还应当指出一种与盒维数定义形式相当不同, 但却完全等价的定义. 称 $F_\delta$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的子集 $F$ 的 $\delta$平行体,如果

$$F_\delta = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - y| \leqslant \delta \ \text{对某个}\ y \in F\ \text{成立}\}, \tag{3.15}$$

即与集 $F$ 距离小于 $\delta$ 的点的集合. 考虑当 $\delta \to 0$ 时 $F_\delta$ 的 $n$ 维体积收缩的速度. 在 $\mathbf{R}^3$ 中, 如果 $F$ 是一个单点, 则 $F_\delta$ 是一个体积 $\mathrm{vol}(F_\delta) = \frac{3}{4}\pi\delta^3$ 的球; 如果 $F$ 是长度为 $l$ 的线段, 则 $F_\delta$ 像根 "红肠", 且 $\mathrm{vol}(F_\delta) \sim \pi l \delta^2$; 如果 $F$ 是面积为 $a$ 的平面区域, 则 $F_\delta$ 本质上是 $F$ 的加厚, $\mathrm{vol}(F_\delta) \sim 2a\delta$. 在以上每种情形中都有 $\mathrm{vol}(F_\delta) \sim c\delta^{3-s}$, 其中整数 $s$ 是 $F$ 的维数, 所以 $\delta$ 的指数是维数的标志. $\delta^{3-s}$ 的系数 $c$ 被称为 $F$ 的 Minkowski容量, 也就是相应集的长度、面积和体积的量度.

这个思想可以推广到分数维数. 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集, 对某个常数 $s$, 当 $\delta \to 0$ 时, 如果 $\mathrm{vol}^n(F_\delta)/\delta^{n-s}$ 趋向于正的常数, 其中 $\mathrm{vol}^n$ 表示 $n$ 维容量, 则可以认为 $F$ 是 $s$ 维的. 这个极限值称为 $F$ 的 *s维容度*, 这是一个用起来较少限制的概念, 因为在不交集上它不必满足可加性, 即它不是测度. 即使这个极限不存在, 也可以求 $\delta$ 的临界指数, 并且这个结果关系到盒维数.

**命题 3.2** *如果 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集, 则*

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = n - \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\ln \mathrm{vol}^n(F_\delta)}{\ln \delta}$$

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = n - \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln \mathrm{vol}^n(F_\delta)}{\ln \delta},$$

*这里 $F_\delta$ 是 $F$ 的 $\delta$ 平行体.*

**证明** 如果 $F$ 能被 $N_\delta(F)$ 个半径为 $\delta < 1$ 的球覆盖, 则 $F_\delta$ 能被同样多的半径为 $2\delta$ 与前面的球同心的球覆盖, 因此

$$\mathrm{vol}^n(F_\delta) \leqslant N_\delta(F) c_n (2\delta)^n,$$

其中 $c_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上单位球的体积, 取对数

$$\frac{\ln \mathrm{vol}^n(F_\delta)}{-\ln \delta} \leqslant \frac{\ln 2^n c_n + n \ln \delta + \ln N_\delta(F)}{-\ln \delta},$$

得

$$\underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln \mathrm{vol}^n(F_\delta)}{-\ln \delta} \leqslant -n + \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F, \tag{3.16}$$

对上极限也可以得到类似的不等式. 另一方面如果有 $N_\delta(F)$ 个球心在 $F$ 上、半径为 $\delta$ 的互不相交的闭球, 则通过增加它们的容量, 得:

$$N_\delta(F) c_n (\delta)^n \leqslant \mathrm{vol}^n(F_\delta).$$

取对数, 并令 $\delta \to 0$, 可以得到与式 (3.16) 反向的不等式, 再利用等价定义 3.1(5), 命题即得证. □

由于命题 3.2, 盒维数有时被称为 Minkowski*维数*或 Minkowski-Bouligand*维数*.

理解盒维数与豪斯多夫维数之间的关系是非常重要的. 如果 $F$ 能被 $N_\delta(F)$ 个直径为 $\delta$ 的集覆盖, 则由定义 (2.1) 得:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leqslant N_\delta(F) \delta^s.$$

如果 $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$, 那么只要 $\delta$ 充分小, 就有 $\ln N_\delta(F) + s \ln \delta > 0$, 于是 $s \leqslant \underline{\lim}_{\delta \to 0} \dfrac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$, 所以

$$\dim_{\mathrm{H}} F \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{3.17}$$

对任意的 $F \subset \mathbf{R}^n$ 成立. 一般这里不能得到等号. 虽然对许多 "相当规则" 的集, 豪斯多夫维数与盒维数是相等的, 然而, 也有大量使不等号严格成立的例子.

如果 $s = \dim_{\mathrm{B}} F$, 从式 (3.6) 粗略地可以看出, 当 $\delta$ 充分小时, $N_\delta(F) \simeq \delta^{-s}$. 确切地, 它说明

$$N_\delta(F)\delta^s \to \infty \quad \text{如果} \quad s < \dim_{\mathrm{B}} F$$

和

$$N_\delta(F)\delta^s \to 0 \quad \text{如果 } s > \dim_{\mathrm{B}} F.$$

但是

$$N_\delta(F)\delta^s = \inf\left\{\sum_i \delta^s : \{U_i\} \text{ 是 } F \text{ 的 (有限的)}\delta \text{ 覆盖}\right\},$$

它应当与

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ 是 } F \text{ 的 } \delta \text{ 覆盖}\right\}$$

进行比较, 这是出现在豪斯多夫测度和维数的定义中的. 在计算豪斯多夫维数中, 我们给每个覆盖集 $U_i$ 以不同的份量 $|U_i|^s$, 而在盒维数的计算中, 我们给每个覆盖集以相同的份量 $\delta^s$. 盒维数可以被认为是表示一个集合能被相同形状的小集合覆盖的效率, 而豪斯多夫维数涉及的可能是相当不同形状的小集合的覆盖.

这就会引起人们求出数值 $v(F) = \lim\limits_{\delta \to 0} N_\delta(F)\delta^s$ 的愿望, 但由此给出的不是 $\mathbf{R}^n$ 上子集的测度. 下面马上可以看到有关这个问题的一个推论, 那就是盒维数有些不好的性质, 有时难以进行数学处理.

由于盒维数是由相同形状集的覆盖确定的, 所以它计算起来比豪斯多夫维数容易. 正像豪斯多夫维数计算一样, 盒维数的计算通常也是分别涉及到求维数的下界和上界, 而每个界取决于几何观察, 并通过代数估计而得到.

**例 3.3** 设 $F$ 是三分康托尔集 (见图 0.1), 则

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \ln 2/\ln 3.$$

**计算** 显然, $F$ 由 $E_k$ 的 $2^k$ 个长度为 $3^{-k}$ 的 $k$ 水平区间的覆盖, 如果 $3^{-k} < \delta \leqslant 3^{-k+1}$, 则 $N_\delta(F) \leqslant 2^k$. 由式 (3.5)

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \leqslant \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^{k-1}} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

另一方面, 如果 $3^{-k-1} \leqslant \delta < 3^{-k}$, 则任一长度为 $\delta$ 的区间最多能与构造 $F$ 中的, 一个长度为 $3^{-k}$ 的 $k$ 水平区间相交. 这样的区间有 $2^k$ 个, 所以为了覆盖 $F$, 至少需要长度为 $\delta$ 的区间 $2^k$ 个. 因此 $N_\delta(F) \geqslant 2^k$, 即得 $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \geqslant \ln 2/\ln 3$. □

因此, 至少对康托尔集来说, $\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{B}} F$.

## 3.2 计盒维数的性质与问题

盒维数的下列基本性质反映了与豪斯多夫维数类似的性质, 同时也可以用许多

同样方法验证.

(1) 对 $\mathbf{R}^n$ 上光滑的 $m$ 维子流形 $F$, $\dim_{\mathrm{B}} F = m$.

(2) $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}$ 与 $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}$ 是单调的.

(3) $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}$ 是有限稳定的, 即

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(E \bigcup F) = \max\left\{\overline{\dim}_{\mathrm{B}} E, \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F\right\};$$

然而, 对 $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}$, 相应的等式却不成立.

(4) $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}$ 和 $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}$ 是双利普希茨不变的, 这是因为, 如果 $|f(x) - f(y)| \leqslant c|x-y|$, 且 $F$ 能被 $N_\delta(F)$ 个直径最大为 $\delta$ 的集覆盖, 则在映射 $f$ 之下, 这 $N_\delta(F)$ 个集的像也组成 $f(F)$ 的一个直径最大为 $c\delta$ 的覆盖, 因此 $\dim_{\mathrm{B}} f(F) \leqslant \dim_{\mathrm{B}} F$. 类似地, 盒维数也有像豪斯多夫维数在双利普希茨和 Hölder 变换下的性质.

现在介绍一些计盒维数的不好性质, 下一个命题似乎很不错, 但却有令人讨厌的推论.

**命题 3.4** 用 $\bar{F}$ 表示 $F$ 的闭包 (即包含 $F$ 的 $\mathbf{R}^n$ 的最小闭子集), 则

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} \overline{F} = \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F,$$

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} \overline{F} = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F.$$

**证明** 设 $B_1, \cdots, B_k$ 是半径为 $\delta$ 的闭球族, 如果闭集 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$ 包含 $F$, 它同时也包含 $\overline{F}$, 因此覆盖 $F$ 的半径为 $\delta$ 的最少的闭球也足够覆盖稍大的集 $\overline{F}$, 结论获证.□

这个命题的一个直接推论是, 如果 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开区域的稠子集, 则 $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = n$. 例如, 设 $F$ 是 0,1 之间的有理数集 (可数集), 则 $\overline{F}$=[0,1], 因此 $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = 1$. 于是可数集可以有非零的盒维数, 然而做为单点集的每一个有理数的盒维数显然是零, 但这些单点集的可数并维数却为 1 . 于是, 对这种维数

$$\dim_{\mathrm{B}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sup_i \dim_{\mathrm{B}} F_i \quad \text{一般不真.}$$

上面引出的一个小集, 即可数点集, 破坏了维数的概念, 这就严格限制了盒维数的应用. 我们可能希望, 如只把注意力限制在闭集上, 也许情况会好一些, 但困难依旧存在.

**例 3.5** $F = \{0, 1, 1/2, 1/3, \cdots\}$ 是一个 $\dim_{\mathrm{B}} F = 1/2$ 的紧集.

**计算** 假设 $0 < \delta < 1/2$, 而 $k$ 是满足 $1/k(k-1) > \delta \geqslant 1/k(k+1)$ 的整数, 如果 $|U| \leqslant \delta$, 因为 $1/(k-1) - 1/k = 1/(k-1)k > \delta$, 则 $U$ 最多能覆盖 $\{1, 1/2, \cdots, 1/k\}$ 中的一个点, 因此覆盖 $F$ 最少需要直径为 $\delta$ 的集 $k$ 个, 故 $N_\delta(F) \geqslant k$, 所以

$$\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \geqslant \frac{\ln k}{\ln k(k+1)}.$$

令 $\delta \to 0$, 则 $k \to \infty$, 得 $\underline{\dim}_{\rm B} F \geqslant 1/2$. 而另一方面, 如果 $1/2 > \delta > 0$, 取 $k$ 满足 $1/k(k-1) > \delta \geqslant 1/k(k+1)$, 则 $(k+1)$ 个长度为 $\delta$ 的区间覆盖 [0,1/k], 留下 $F$ 的 $k-1$ 个点, 总可以由另外 $k-1$ 个区间覆盖, 则 $N_\delta(F) \leqslant 2k$, 从而

$$\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \leqslant \frac{\ln 2k}{\ln k(k-1)},$$

故有 $\overline{\dim}_{\rm B} F \leqslant 1/2$. □

这个集几乎每一点都是相互分离的, 没有人把它看成是分形集, 但它却有很大的盒维数.

尽管如此, 盒维数不仅在实际应用上很方便, 而且在理论上也很有用. 可以证明一些集的盒维数与豪斯多夫维数是相等的, 利用这两种维数的相互联系, 经常可以在应用中产生很好的效果.

## *3.3　修改的计盒维数

对上一节中概略提到的有关计盒维数的困难, 是有一些克服办法的. 然而可能这并不令使用者感兴趣, 因为这又重新产生了与豪斯多夫维数的计算相关的困难.

如果 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集, 可以试着把 $F$ 分解成可数块 $F_1, F_2, \cdots$, 使得最大的一块具有尽可能小的维数. 这个想法引出了下面**修改的计盒维数**:

$$\underline{\dim}_{\rm MB} F = \inf\left\{\sup_i \underline{\dim}_{\rm B} F_i : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right\} \tag{3.18}$$

$$\overline{\dim}_{\rm MB} F = \inf\left\{\sup_i \overline{\dim}_{\rm B} F_i : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right\}. \tag{3.19}$$

(上述两式中的下确界是对 $F$ 的所有可能的可数覆盖 $\{F_i\}$ 取的) 显然, $\underline{\dim}_{\rm MB} F \leqslant \underline{\dim}_{\rm B} F$ 且 $\overline{\dim}_{\rm MB} F \leqslant \overline{\dim}_{\rm B} F$. 然而, 如果 $F$ 是可数的, 恰好可以取 $F_i$ 为单点集, 此时有 $\underline{\dim}_{\rm MB} F = \overline{\dim}_{\rm MB} F = 0$. 进一步, 对 $\mathbf{R}^n$ 的任意子集 $F$, 有

$$0 \leqslant \dim_{\rm H} F \leqslant \underline{\dim}_{\rm MB} F \leqslant \overline{\dim}_{\rm MB} F \leqslant \overline{\dim}_{\rm B} F \leqslant n. \tag{3.20}$$

容易看出 $\underline{\dim}_{\rm MB}$ 和 $\overline{\dim}_{\rm MB}$ 恢复了我们所期望的维数性质, 但是它们计算起来就很困难. 然而, 对紧集检验一下可知: 它具有相等的盒维数及修改的盒维数, 这点是有用的. 它可以应用到被称为 “维数齐次” 的集上.

**命题 3.6**　设 $F \subset \mathbf{R}$ 是紧的, 又设对所有与 $F$ 相交的开集 $V$

$$\overline{\dim}_{\rm B}(F \cap V) = \overline{\dim}_{\rm B} F, \tag{3.21}$$

则 $\overline{\dim}_{\rm B} F = \overline{\dim}_{\rm MB} F$; 对下计盒维数而言, 类似的等式也成立.

**证明** 设 $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, 这里每个 $F_i$ 都是闭的. 利用 Baire 分类定理的一个形式 (可以在任何一本讲述一般拓扑的基本教程中找到这个定理, 这里不加证明, 直接引用), 可以证明存在一个 $i$ 和开集 $V \subset \mathbf{R}^n$, 使 $F \bigcap V \subset F_i$. 对这个 $i$, 有 $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F_i = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$. 利用式 (3.19) 和命题 3.4, 得:

$$\overline{\dim}_{\mathrm{MB}} F = \inf\left\{\sup \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F_i : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, F_i \text{ 是闭集}\right\} \geqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F.$$

由式 (3.20) 得到相反的不等式, 对下盒维数也有类似的结果. □

作为应用, 设 $F$ 是具有较高程度自相似的紧集, 例如三分康托尔集或 von Koch 曲线. 如果 $V$ 是与 $F$ 相交的任何开集, 则 $F \bigcap V$ 包含一个与 $F$ 几何相似的 $F$ 的部分, 它必定具有与 $F$ 相等的上盒维数, 因此式 (3.21) 成立, 由此得出盒维数与修改的盒维数相等.

## *3.4 填充测度与维数

与豪斯多夫维数不同, 盒维数或修改的盒维数都不是通过测度定义出来的, 这可能会给它们的理论发展带来一些困难. 尽管如此, 上一节中的思考过程, 还是可以在用最少的数学且相当优雅的方式下完成. 式 (2.16) 中豪斯多夫维数是利用最少的小球覆盖来定义的, 然而, $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}$ 是利用最少的等半径的小球覆盖来定义的 (等价定义 3.1(1)). 另一方面, $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}$ 可以看成是这样的维数, 它依赖于互不相交的半径相等的尽可能稠密的小球的填充 (等价定义 3.1(5). 在数学的很多方面, 覆盖和填充起着双重作用; 理论上自然努力地去寻找一种由半径不同的互不相交的小球尽可能稠密的填充来定义的维数.

下面试着用豪斯多夫测度和维数定义的模式去定义一种新的维数. 若 $s \geqslant 0$ 且 $\delta > 0$, 令

$$\mathcal{P}_\delta^s(F) = \sup\left\{\sum_i |B_i|^s : \{B_i\}\text{是球心在 } F \text{ 上, 半径最大为 } \delta, \text{互不相交的球}\right\} \tag{3.22}$$

因为 $\mathcal{P}_\delta^s(E)$ 随 $\delta$ 减少而递减, 所以极限

$$\mathcal{P}_0^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{P}_\delta^s(F) \tag{3.23}$$

存在. 此处又遇见了在盒维数中发生的问题, 从对可数稠密集的考虑中就容易看出 $\mathcal{P}_0^s(F)$ 不是测度, 因此修改这个定义为:

$$\mathcal{P}^s(F) = \inf\left\{\sum_i \mathcal{P}_0^s(F_i) : \quad F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right\}. \tag{3.24}$$

可以证明 $\mathcal{P}^s(F)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的测度, 一般称之为 *s*维填充测度(packing measure). 可以用通常的方法定义填充维数:

$$\dim_{\mathrm{P}} F = \sup\{s : \mathcal{P}^s(F) = \infty\} = \inf\{s : \mathcal{P}^s(F) = 0\} \tag{3.25}$$

这基本的测度结构立即保证单调性: 如果 $E \subset F$, 则 $\dim_{\mathrm{p}} E \leqslant \dim_{\mathrm{p}} F$. 同时, 对可数集类 $\{F_i\}$,

$$\dim_{\mathrm{P}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sup_i \dim_{\mathrm{P}} F_i, \tag{3.26}$$

因为如果对所有 $i$, $s > \dim_{\mathrm{P}} F_i$, 则 $\mathcal{P}^s(\bigcup_i F_i) \leqslant \sum_i \mathcal{P}^s(F_i) = 0$, 因而 $\dim_{\mathrm{P}}(\bigcup_i F_i) \leqslant s$ 成立.

现在研究填充维数与其他维数的定义之间的关系, 并且验证一个令人惊奇的事实: 填充维数恰好是修改的上盒维数.

**引理 3.7**
$$\dim_{\mathrm{P}} F \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{3.27}$$

**证明** 只要证明 $\dim_{\mathrm{P}} F=0$, 则结果就相当明显了. 选定任意的 $t$ 和 $s$, 使 $0 < t < s < \dim_{\mathrm{P}} F$, 则 $\mathcal{P}^s(F) = \infty$, 所以 $\mathcal{P}_0^s(F) = \infty$. 于是, 给定 $0 < \delta \leqslant 1$, 存在半径最大为 $\delta$, 球心在 $F$ 上相互不交的球族 $\{B_i\}$ 使 $1 < \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s$. 设对每一个 $k$, 有 $n_k$ 个这样的球满足: $2^{-k-1} < |B_i| \leqslant 2^{-k}$, 则

$$1 < \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^{-ks}. \tag{3.28}$$

必定存在 $k$, 满足 $n_k > 2^{kt}(1-2^{t-s})$, 否则式 (3.28) 中几何级数的和最多为$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kt-ks}(1-2^{t-s}) = 1$ . 这 $n_k$ 个球都包含一个球心在 $F$ 上, 半径为 $2^{-k-2} \leqslant \delta$ 的球. 因此如果用 $N_\delta(F)$ 表示球心在 $F$ 上, 半径为 $\delta$ 的互不相交球的最大数目, 则

$$N_{2^{-k-2}}(F)(2^{-k-2})^t \geqslant n_k(2^{-k-2})^t > 2^{-2t}(1-2^{t-s}),$$

其中 $2^{-k-2} < \delta$, 即得 $\overline{\lim_{\delta\to 0}} N_\delta(F)\delta^t > 0$, 因此由等价定义 3.1(5), 对任意的 $0 < t < \dim_{\mathrm{P}} F$, 都有 $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \geqslant t$, 所以式 (3.27) 得证. □

**命题 3.8** 如果 $F \subset \mathbf{R}^n$, 则 $\dim_{\mathrm{P}} F = \overline{\dim}_{\mathrm{MB}} F$.

**证明** 如果 $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, 则由式 (3.26) 和式 (3.27) 得,

$$\dim_{\mathrm{P}} F \leqslant \sup_i \dim_{\mathrm{P}} F_i \leqslant \sup_i \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F_i.$$

定义 (3.19) 给出了 $\dim_{\mathrm{P}} F \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{MB}} F$.

反之, 如果 $s > \dim_{\mathrm{P}} F$, 则 $\mathcal{P}^s(F) = 0$, 由式 (3.24) 知, 如果此时 $F \subset \bigcup_i F_i$, 则对每一个 $i$, 有 $\mathcal{P}_0^s(F_i) < \infty$. 因此, 只要 $\delta$ 充分小, 同样对每一个 $i$, 有 $\mathcal{P}_\delta^s(F_i) < \infty$,

再由式 (3.22) 知当 $\delta \to 0$ 时, $N_\delta(F_i)\delta^s$ 有界, 其中 $N_\delta(F_i)$ 是球心在 $F_i$, 半径为 $\delta$ 的相互不交球的最大数目. 于是依据等价定义 3.1(5), 对任意 $i$, 有 $\overline{\dim}_B F_i \leqslant s$, 再由式 (3.19), 得 $\overline{\dim}_{MB} F \leqslant s$, 命题 3.8 得证. □

至此, 有了下面的关系式:

$$\dim_H F \leqslant \underline{\dim}_{MB} F \leqslant \overline{\dim}_{MB} F = \dim_P F \leqslant \overline{\dim}_B F. \tag{3.29}$$

有例子表明, 上面式子中的任一个不等号都不能用等号代替.

与豪斯多夫维数的情形一样, 在填充维数的研究中可以利用强有力的测度论技巧. 在某种程度上, 由于填充测度在许多方面可以 "对偶" 到豪斯多夫测度, 所以填充测度的提出 (大约在豪斯多夫测度提出 60 年之后才引起注意) 已经导致了对分形几何测度理论的进一步理解. 确实, 豪斯多夫和填充测度的一些相关结果经常是并列出现的. 尽管如此, 仍然不能指望填充维数和填充测度能便于应用和计算; 为了使它成为测度而在定义中增加的式 (3.24) 这一步使它比豪斯多夫维数更难于应用.

填充维数与修改的上盒维数相等这一点使它的应用状况稍微得到改善; 尤其对处处具有 "局部" 常数维的紧集的情形, 这种改善更为显著. 而在实际中, 特别是在某些种类自相似集中, 这种情形是经常发生的.

**推论 3.9** 设 $F \subset \mathbf{R}^n$ 是紧集, 且对所有与 $F$ 相交的开集 $V$ 有

$$\overline{\dim}_B(F \cap V) = \overline{\dim}_B F, \tag{3.30}$$

则 $$\dim_P F = \overline{\dim}_B F.$$

**证明** 由命题 3.6 和命题 3.8 即得. □

当然, 如果分形具有相等的豪斯多夫维数和上盒维数, 这是最好的情形. 在这种情形下, 整个式 (3.29) 中的等号都成立, 很多这样的例子将在以后看到. 然而, 只要弱得多的条件 $\dim_H F = \dim_P F$ 成立, 也能使对集 $F$ 的分析变得容易, 虽然有时这个条件难以证明.

## 3.5 维数的一些其他定义

已经引出了许多各式各样的维数的其他定义, 其中许多只是为了应用, 当然只能用在它们适合应用的范围内.

特殊形式的曲线产生了几种维数的定义. 定义一曲线或称若尔当曲线$C$ 为在连续双射 $f: [a,b] \to \mathbf{R}^n$ 下的区间 $[a,b]$ 的像. (这里把注意力只限制在非自交的曲线上.) 如果 $C$ 是一曲线, 且 $\delta > 0$, 设 $x_0, \cdots, x_m$ 是 $C$ 上的点, 且满足对 $k = 1, 2, \cdots, m$, 有 $|x_k - x_{k-1}| = \delta$, 定义 $M_\delta(C)$ 为曲线 $C$ 上的点 $x_0, \cdots, x_m$ 的最

大数目, 则 $(M_\delta(C)-1)\delta$ 可以看成是利用两脚间距离为 $\delta$ 的两脚规, 测量 $C$ 所得的"长度". **分配维数**(divider dimension) 定义为:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln M_\delta(C)}{-\ln\delta}, \tag{3.31}$$

假设这个极限存在 (否则可以利用上极限和下极限定义上分配维数和下分配维数), 容易看出, 曲线的分配维数至少等于盒维数 (假定它们都存在). 在简单的自相似集的例子中, 比如像 von koch 曲线, 它们是相等的. 不列颠海岸线的维数为 1.2 的结论一般是利用分配维数定出的, 这个经验值是对 $\delta$ 值大约在 20 米到 200 千米之间, 对式 (3.31) 的比值进行估计得出的.

作为豪斯多夫维数的变化形式, 对曲线还可以定义一种维数, 它是利用曲线自身的区间作为一组覆盖集来定义的. 观察 $\inf\{\sum_{i=1}^{m}|f[t_{i-1},t_i]|^s\}$, 其中下确界是对使所有直径 $|f[t_{i-1},t_i]|$ 最多为 $\delta$ 的全部分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$ 取的. 令 $\delta\to 0$, 且认为使极限从 $\infty$ 跳到 0 的那一点 $s$ 的值为维数. 对自相似的例子如 von Koch 曲线, 这个值等于豪斯多夫维数, 但是对于 "挤压" 形式的曲线, 如某些函数的图 (见第 11 章), 则可能得到稍大一些的值.

有时人们对作为集 $A$ 边界的分形 $F$ 的维数感兴趣. 可以用通常的方法定义 F 的盒维数, 但是有时对 $A$ 与其他集之间的区别进行特殊的考虑是很有用的. 于是下面的 "$s$ 维容度", 即盒维数定义的变化有时是很有用的, 其中, 需要计算包含在 $A$ 中与 $F$ 距离小于或等于 $\delta$ 的点集的体积. 定义 $\mathbf{R}^n$ 中集 $A$ 的边界 $F$ 的**单边维数**如下:

$$n-\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln \mathrm{vol}^n(F_\delta\bigcap A)}{\ln\delta} \tag{3.32}$$

其中 $F_\delta$ 是 $F$ 的 $\delta$ 平行体 (与命题 3.2 比较). 这个定义能应用到固体的物理表面, 其中所取的体积与表面非常接近, 这点很重要. 这个定义同时应用于具有分形边界的偏微分方程.

有时还可以通过一个集的余集定义维数. 假定 $F$ 是从单位区间 [0,1] 中去掉一系列区间 $I_1,I_2,\cdots$ 而得到的集, 如康托尔集的构造. 可以定义维数等于 $s_0$, 使得如果 $s<s_0$, 级数

$$\sum_{j=1}^{\infty}|I_j|^s=\begin{cases}\text{收敛}, & \text{如果 } s<s_0,\\ \text{发散}, & \text{如果 } s>s_0;\end{cases} \tag{3.33}$$

数 $s_0$ 称为这个序列的**临界指数**. 对三分康托尔集, 这个系列是 $\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}3^{-ks}$, 相应的 $s_0=\ln 2/\ln 3$, 此情形下 $s_0$ 与豪斯多夫维数和盒维数相等. 一般地, $s_0$ 等于 $F$ 的上盒维数.

维纹 (Dimension print) 给出了一个性质相当不同的豪斯多夫维数的有趣变形. 它可以看成是一种 "指纹" 形的维数, 能够使具有相同豪斯多夫维数但有不同特点的集被区分出来. 特别是它们表现了集的非各向同性的特点.

把注意力集中在平面子集上, 此时, 维纹也具有平面的性质. 维纹的定义非常类似于豪斯多夫维数的定义, 但它用矩形覆盖并用矩形的边长代替定义中的直径. 设 $U$ 是一个矩形 (边不必与坐标轴平行), 又设 $a(U) \geqslant b(U)$ 是 $U$ 的两个边长, $s,t$ 是非负数. 对 $R^2$ 的子集 $F$, 设

$$\mathcal{H}_\delta^{s,t}(F) = \inf\left\{\sum_i a(U_i)^s b(U_i)^t : \{U_i\}\text{是 } F \text{ 的 } \delta \text{ 矩形覆盖}\right\}$$

用通常的方式, 令 $\delta \to 0$ 得到豪斯多夫类型的测度 $\mathcal{H}^{s,t}$,

$$\mathcal{H}^{s,t}(F) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^{s,t}(F)$$

(注意 $\mathcal{H}^{s,0}$ 正好是 $s$ 维豪斯多夫测度的接近形式, 这里只能是 $\delta$ 矩形覆盖.) 集 $F$ 的维纹, 记为 print$F$, 被定义为使 $\mathcal{H}^{(s,t)}(F) > 0$ 的所有非负数对 $(s,t)$ 组成的集合.

利用测度的通常性质, 容易看出维纹具有单调性

$$\text{print } F_1 \subset \text{print } F_2 \quad \text{如果 } F_1 \subset F_2 \tag{3.34}$$

和可数稳定性

$$\text{print}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty}\text{print } F_i. \tag{3.35}$$

而且, 如果 $(s,t)$ 是 print$F$ 中的一个点, 且 $(s',t')$ 满足

$$s' + t' \leqslant s + t, \quad t' \leqslant t \tag{3.36}$$

则 $(s',t') \in$print$F$.

遗憾的是维纹不太容易计算. 图 3.3 举出一些众所周知的例子. 注意, 在图中, 豪斯多夫维数是由维纹和 $x$ 轴交点表示.

维纹是一个有用的豪斯多夫维数的推广. 注意在图中最后两种情况的维纹是如何区别的, 这两种集的豪斯多夫维数 (或盒维数) 都是 $1\frac{1}{2}$, 而其中一个是似尘的, 另一个是层状的.

这种方式定义的维纹的一个缺点是它不是利普希茨不变的. 直线段和光滑的凸曲线是双利普希茨等价的, 但它们的维纹是不同的. 光滑凸曲线的维纹还关系到它的曲率. 如果把维纹重新定义为所有满足 $\mathcal{H}^{(s,t)}(F') > 0$ 的 $(s,t)$ 的集合, 其中 $F'$ 是 $F$ 的全部双利普希茨像, 那么还是能避免这个困难而保证维纹的利普希茨不变性, 但势必进一步增加它们计算中的困难.

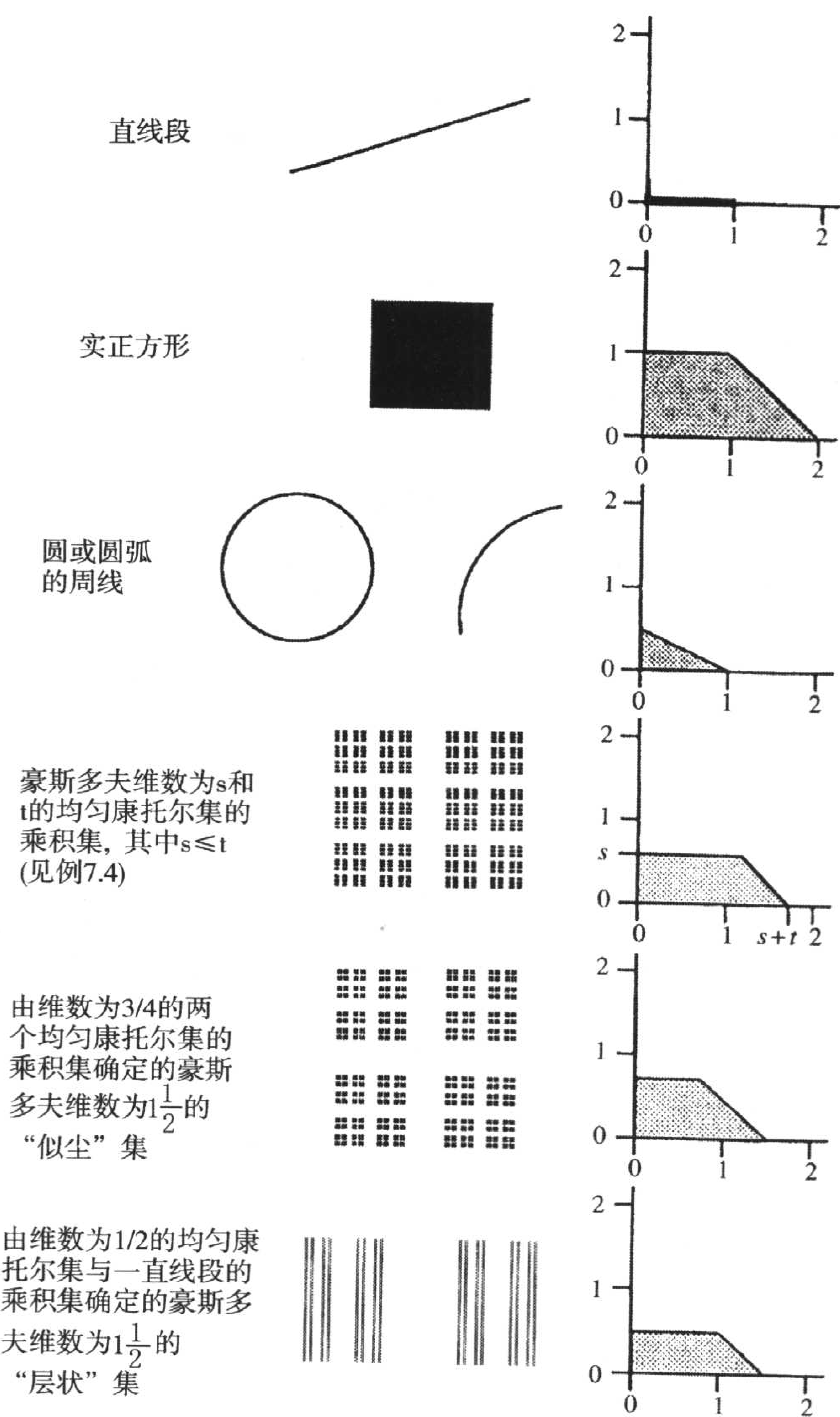



图 3.3　几种平面集的维纹

当然也可以用相等的矩形覆盖这种类似于盒维数定义的方法, 而不用类似豪斯多夫维数的方法定义维纹. 但是对它的计算仍然是不好办的.

## 3.6　注记和参考文献

在各种数学文献中有许多 “分形维数” 的不同定义. 盒维数的肇始似乎很难追

溯了，研究豪斯多夫测度及维数的先驱们肯定已经考虑过盒维数，但由于从数学观点看来它不是那么令人满意从而把它舍弃了. Bouligand 在 1928 年把 Minkowski 容度应用到非整数维的问题上，而盒维数的更一般定义由 Pontrjagin 和 Schnirelman 在 1932 年给出.

填充测度和维数的提出则晚多了，它由 Tricot 引入 (1982). 这种维数和测度与豪斯多夫测度和维数的类似及对比被证明是一个重要的理论工具. Mattila(1995) 和 Edgar(1998) 讨论了填充测度及盒维数和填充维数，Tricot(1995) 考虑了曲线的维数.

维纹是由 Rogers(1988,1998) 创新提出.

## 练　习

**3.1** 设 $f: F \to \mathbf{R}^n$ 是利普希茨函数，证明 $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F) \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$ 及 $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F) \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$. 更一般地，证明：如果 $f$ 满足 Hölder 条件 $|f(x)-f(y)| \leqslant c|x-y|^\alpha$，其中 $c>0$，且 $0<\alpha\leqslant 1$，则 $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F) \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\underline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F)$.

**3.2** 从定义直接验证：由等价定义 3.1(1) 和 (3) 所给出的盒维数是相等的.

**3.3** 设 $F$ 是由 [0,1] 中那些按十进制展开式中没有 5 的数组成的集，证明 $F$ 的盒维数存在，并求出 $\dim_{\mathrm{B}} F$.

**3.4** 验证图 0.4 所描述的康托尔尘的盒维数等于 1(取 $E_0$ 的边长为 1).

**3.5** 利用等价定义 3.1(4) 验证 von Koch 曲线的上盒维数最多为 ln 4/ln 3，并用 3.1(5) 验证相应的下盒维数最小为这个数值.

**3.6** 利用等价定义 3.1 的方便条件去求图 0.3 中的 Sierpinski 垫的盒维数.

**3.7** 设 $F$ 是三分康托尔集，若 $0<\delta<1$，求 $F$ 的 $\delta$ 平行体 $F_\delta$ 的长度，并由此利用命题 3.2 求 $F$ 的盒维数.

**3.8** 构造一个集 $F$，使 $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F < \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$(提示：令 $k_n = 10^n$. 改动在三分康托尔集构造中去掉的区间的长度，在构造的第 $k$ 步，如果 $k_{2n} < k \leqslant k_{2n+1}$，则去掉区间中间的 1/3；当 $k_{2n-1} < k \leqslant k_{2n}$，则去掉区间中间的 3/5).

**3.9** 对 $\mathbf{R}$ 的有界子集 $E$ 和 $F$，验证

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(E\bigcup F) = \max\{\overline{\dim}_{\mathrm{B}} E, \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F\}$$

**3.10** 构造 $\mathbf{R}$ 的子集 $E$ 和 $F$，使它们满足 $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(E\bigcup F) > \max\{\underline{\dim}_{\mathrm{B}} E, \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F\}$ (提示：考虑两个练习 3.8 中指出的集合).

**3.11** 问集 $\{0,1,1/4,1/9,1/16,\cdots\}$ 的豪斯多夫维数和盒维数各等于什么？

**3.12** 找出 $\mathbf{R}$ 的两个不交的博雷尔子集 $E$ 和 $F$，使 $\mathcal{P}_0^s(E\bigcup F) \neq \mathcal{P}_0^s(E) + \mathcal{P}_0^s(F)$.

**3.13** von Koch 曲线的填充维数等于多少？

**3.14** 求 von Koch 曲线的按 (3.31) 式定义的分配维数.

**3.15** 证明按 (3.31) 式定义的曲线的分配维数大于或等于曲线的盒维数, 假设两种维数都存在.

**3.16** 设 $0 < \lambda < 1$, $F$ 是在构造的每一步都去掉区间中一段比例为 $\lambda$ 的部分而得到的 "中间 $\lambda$ 康托尔集". 证明: $F$ 的按式 (3.33) 由去掉区间定义的维数等于它的豪斯多夫维数与盒维数.

**3.17** 验证维纹的性质式 (3.34)~(3.36), 给出一个维纹不是凸的集的例子.

# 第 4 章　计算维数的技巧

直接计算每一个集的维数, 特别是豪斯多夫维数, 将使读者认识到直接利用定义计算的局限性; 严格的维数计算往往需要连篇累牍的复杂计算和几乎不提供任何直观启发的估计.

在这一章中, 集中了一些计算豪斯多夫维数有效的且很基本的技巧. 其他的一些能应用到比较特殊情形的方法, 则可以在本书的其他部分找到.

## 4.1　基 本 方 法

作为一个基本的运算规律, 豪斯多夫测度和维数的上界, 一般是利用一些小集合的有效覆盖得到; 而下界则是通过在集上配置一个测度或质量分布来求得; 大多数分形维数的 "明显的" 上界估计可以由小集合的自然覆盖得到.

**命题 4.1**　设 $F$ 可以由 $n_k$ 个直径最大为 $\delta_k$ 的集覆盖, 且当 $k\to\infty$ 时, $\delta_k\to 0$,

则
$$\dim_{\mathrm{H}} F \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{-\ln \delta_k}.$$

而且, 如果当 $k\to\infty$ 时, $n_k\delta_k^s$ 保持有界, 则 $\mathcal{H}^s(F)<\infty$; 又若当 $\delta_k\to 0$ 时, 存在 $0<c<1$, 使 $\delta_{k+1}\geqslant c\delta_k$ 成立, 则

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{-\ln \delta_k}.$$

**证明**　第一个不等式成立由盒维数的定义和式 (3.14) 即得; 而由式 (3.17) 有 $\dim_{\mathrm{H}} F\leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$. 如果 $n_k\delta_k^s$ 有界, 则 $\mathcal{H}^s_{\delta_k}(F)\leqslant n_k\delta_k^s$, 所以当 $k\to\infty$ 时, $\mathcal{H}^s_{\delta_k}(F)$ 趋于有限的极限 $\mathcal{H}^s(F)$. □

于是, 如前面所述的例 2.7 三分康托尔集的情形, 它有长度为 $3^{-k}$ 的 $2^k$ 个区间组成的自然覆盖, 这就给出 $\dim_{\mathrm{H}} F\leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F\leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F\leqslant \ln 2/\ln 3$.

使人感到惊奇的是, 豪斯多夫维数的 "明显" 的上界经常就是维数的实际数值, 然而要证明这个结论却可能是困难的. 为得到一个维数的上界, 只要计算集 $F$ 的一个特殊覆盖 $\{U_i\}$ 的形式为 $\sum|U_i|^s$ 的和值即可; 而为求维数的下界, 却必须证明, 对 $F$ 的所有 $\delta$ 覆盖, $\sum|U_i|^s$ 比某个正常数大. 显然, 有大量这样的覆盖是有效的. 特别, 在考虑豪斯多夫维数时与考虑盒维数不同, 必须考虑一些覆盖 $\{U_i\}$, 其中的一

部分集非常小, 而另一部分集有相对较大的直径. 这样, 在估计维数上界时有效的那些 $\sum|U_i|^s$, 在考虑下界时就不好用了.

解决这一困难的一个方法是设法证明, 单个集 $U$ 相比起以 $|U|^s$ 作为它的大小的量度来说, 它覆盖 $F$ 的部分不能太大. 因此, 如果集类 $\{U_i\}$ 覆盖整个 $F$, 则和 $\sum|U_i|^s$ 的值不能太小. 这么做的通常办法是分配一个适当的质量分布 $\mu$ 在 $F$ 上, 并且把由每个 $U$ 覆盖的质量 $\mu(U)$ 与 $|U|^s$ 进行比较.(称一个支撑包含在 $F$ 内, 且使 $0<\mu(F)<\infty$ 的测度 $\mu$ 为 $F$ 上的一个质量分布, 见 1.3 节.)

**质量分布原理 4.2** 设 $\mu$ 是 $F$ 上的质量分布, 且对某个 $s$, 存在 $c>0$ 和 $\delta>0$, 使

$$\mu(U) \leqslant c\,|U|^s \tag{4.1}$$

对任意满足 $|U|\leqslant\delta$ 的集 $U$ 成立, 则 $\mathcal{H}^s(F)\geqslant\mu(F)/c$;

且
$$s\leqslant \dim_{\rm H}F\leqslant \underline{\dim}_{\rm B}F\leqslant\overline{\dim}_{\rm B}F.$$

**证明** 如果 $\{U_i\}$ 是 $F$ 的任何覆盖, 则利用测度的性质和式 (4.1), 有

$$0<\mu(F)\leqslant\mu\Big(\bigcup_i U_i\Big)\leqslant\sum_i\mu(U_i)\leqslant c\sum_i|U_i|^s. \tag{4.2}$$

在上式中取下确界, 如果 $\delta$ 充分小, 则 $\mathcal{H}^s_\delta(F)\geqslant\mu(F)/c$, 因此 $\mathcal{H}^s(F)\geqslant\mu(F)/c$. 由 $\mu(F)>0$ 即得 $\dim_{\rm H}F\geqslant s$. □

注意, 当 $\mu$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的质量分布, 而 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的任意子集时, 结论 $\mathcal{H}^s(F)\geqslant\mu(F)/c$ 仍然成立.

质量分布原理 4.2 为三分康托尔集 $F$(见图 0.1) 的豪斯多夫维数给出了一个快捷的下界估计: 设 $\mu$ 是 $F$ 上的自然质量分布, 即在构造中, $E_k$ 的每一个长度为 $3^{-k}$ 的 $2^k$ 个 $k$ 水平区间中, 每个都带有质量 $2^{-k}$(可以想象从 $E_0$ 上的单位质量开始, 依次把 $E_k$ 中每个区间上的质量平均分配给它在 $E_{k+1}$ 上的两个子区间, 见命题 1.7). 设 $|U|<1$,$k$ 为正数, 满足 $3^{-(k+1)}\leqslant|U|<3^{-k}$, 则 $U$ 最多可与 $E_k$ 的一个区间相交, 所以

$$\mu(U)\leqslant 2^{-k}=(3^{\ln 2/\ln 3})^{-k}=(3^{-k})^{\ln 2/\ln 3}\leqslant(3\,|U|)^{\ln 2/\ln 3},$$

因此由质量分布原理, $\mathcal{H}^{\ln 2/\ln 3}(F)\geqslant 3^{-\ln 2/\ln 3}=1/2$, 所以得 $\dim_{\rm H}F\geqslant\ln 2/\ln 3$.

**例 4.3** 设 $F_1=F\times[0,1]\subset\mathbf{R}^2$ 是三分康托尔集 $F$ 与单位区间的乘积集, 令 $s=1+\ln 2/\ln 3$, 则 $\dim_{\rm B}F_1=\dim_{\rm H}F_1=s$, 且满足 $0<\mathcal{H}^s(F_1)<\infty$.

**计算** 对每个 $k$, $F$ 存在一个由 $2^k$ 个长度为 $3^{-k}$ 的区间组成的覆盖集, 由 $3^k$ 个边长为 $3^{-k}$(直径 $3^{-k}\sqrt{2}$) 的正方形组成的柱集覆盖 $F_1$ 在每个区间上的部分, 把这些柱集算在一起, $F_1$ 可以被 $2^k\times3^k$ 个边长为 $3^{-k}$ 的正方形覆盖. 于是, $\mathcal{H}^s_{3^{-k}\sqrt{2}}(F_1)\leqslant$

$3^k 2^k (3^{-k}\sqrt{2})^s = (3 \times 2 \times 3^{-1-\ln 2/\ln 3})^k \times 2^{s/2} = 2^{s/2}$, 因此有 $\mathcal{H}^s(F_1) \leqslant 2^{s/2}$ 和 $\dim_{\rm H} F_1 \leqslant \underline{\dim}_{\rm B} F_1 \leqslant \overline{\dim}_{\rm B} F_1 \leqslant s$.

现在接着定义 $F_1$ 上的一个质量分布 $\mu$, 把上面提到的 $F$ 上的自然质量分布 ($F$ 的每个长度为 $3^{-k}$ 的 $k$ 水平区间上有质量 $2^{-k}$) 延着其上的柱集均匀地 "铺开". 即如果 $U$ 是各边都平行于坐标轴的矩形, 而且正好在 $F$ 的一个 $k$ 水平的区间上, 高度为 $h \leqslant 1$, 则 $\mu(U) = h \cdot 2^{-k}$. 任一个集 $U$, 一定包含在边长为 $|U|$, 各边都平行于坐标轴的正方形中, 如果 $3^{-(k+1)} \leqslant |U| < 3^{-k}$, 则 $U$ 最多只位于长度为 $3^{-k}$ 的 $F$ 的一个 $k$ 水平区间之上, 所以

$$\mu(U) \leqslant |U|\,2^{-k} \leqslant |U|\,3^{-k\ln 2/\ln 3} \leqslant |U|\,(3\,|U|)^{\ln 2/\ln 3} = 3^{\ln 2/\ln 3}\,|U|^s = 2\,|U|^s$$

由质量分布原理 4.2, $\mathcal{H}^s(F_1) > 1/2$. □

注意到例 4.2 和例 4.3 把自相似集推广到更广的情形, 确实, 后面将要见到的定理 9.3 可以看成是这个计算的进一步推广.

这个例子中, 乘积集的维数等于两个截集维数之和, 这个问题将在第 7 章深入研究.

下面的 $\mathbf{R}$ 的子集的一般构造, 可以看成是康托尔集构造的一般化. 设 $[0,1] = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ 是不升的集序列, 每个 $E_k$ 都是有限个不交的闭区间 (称为 $k$水平基本区间)的并, $E_k$ 的每个区间至少包含 $E_{k+1}$ 中的两个区间, 并且当 $k \to \infty$ 时, $E_k$ 中最长区间的长度趋于 0. 则集

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k \tag{4.3}$$

是 [0,1] 的一个完全不连通的子集, 它是一个普通的分形集 (见图 4.1).

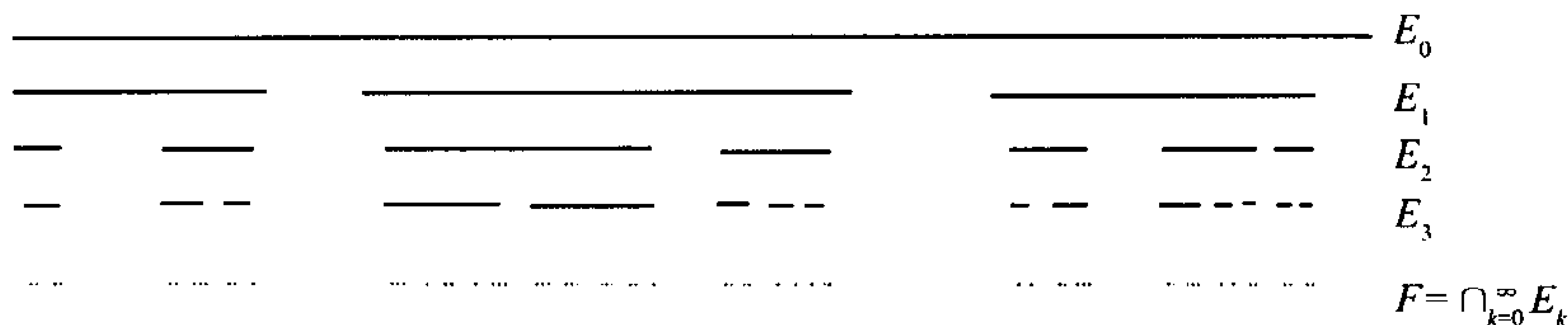



图 4.1 **R** 的一个子集的一般构造的例子

为得到 $F$ 的维数的明显上界, 对每个 $k$, 把 $E_k$ 的区间作为一个覆盖集来用是可行的; 但与通常情形一样, 维数的下界是很难找到的. 注意到, 在下一个例子中, $\dim_{\rm H} F$ 的上界估计依赖于基本区间的数目和大小, 而下界的估计依赖于它们的间隔. 为了使这两个值相等, $k+1$ 水平区间必须 "几乎均匀地分布" 在 $k$ 水平区间内部.

**例 4.4** 设 $0<s<1$, 又设在一般构造式 (4.3) 中, 每个 $k$ 水平基本区间 $I$, 包含在其内的 $k+1$ 水平区间 $I_1,\cdots,I_m(m\geqslant 2)$ 长度相等, 且间隔也相等, 长度由下式确定

$$|I_i|^s=\frac{1}{m}|I|^s \quad (1\leqslant i\leqslant m), \tag{4.4}$$

$I_1$ 与 $I$ 有相同的左端点, $I_m$ 与 $I$ 有相同的右端点, 则有

$$\dim_{\mathrm{H}} F=s \quad 和 \quad 0<\mathcal{H}^s(F)<\infty.$$

(注意, 在构造过程中, 对不同的区间 $I,m$ 可以不同, 因此 $k$ 水平区间可以具有各种不同的长度.)

**计算** 对上面提到的 $I$, $I_i$,

$$|I|^s=\sum_{i=1}^{m}|I_i|^s. \tag{4.5}$$

对每个 $k$, 在 $k$ 水平区间上应用归纳法, 则对每个 $k$ 都有等式 $1=\sum|I_i|^s$, 这里的求和是对所有 $k$ 水平区间 $I_i$ 来求和的. 这些 $k$ 水平区间覆盖 $F$, 因为当 $k\to\infty$ 时, 最大的区间长度趋于零, 所以对充分小的 $\delta$, 有 $\mathcal{H}^s_\delta(F)\leqslant 1$, 即得 $\mathcal{H}^s(F)\leqslant 1$.

现在在 $F$ 上分配一个质量 $\mu$, 使得只要 $I$ 是任一个 $k$ 水平区间, 就有 $\mu(I)=|I|^s$. 这样以单位质量从 [0,1] 开始, 平均分配质量到每个 1 水平区间; 每个 1 水平区间又把质量平均分配到其内的 2 水平的子区间上, 并如此不断进行下去 (见命题 1.7). 由等式 (4.5) 可以得到一个在每个基本区间 $I$ 上都有 $\mu(I)=|I|^s$ 的质量. 接着先估计端点在 $F$ 上的任一区间 $U$ 的质量 $\mu(U)$, 设 $I$ 是包含 $U$ 的最小基本区间, 且设 $I$ 是 $k$ 水平区间, 若 $I_1,\cdots,I_m$ 是包含在 $I$ 中的 $k+1$ 水平区间, 则 $U$ 与 $j\geqslant 2$ 个 $I_i$ 相交, 否则 $U$ 就包含在更小的基本区间内了. 利用式 (4.4), 两个相邻的 $I_i$ 之间的间隔是:

$$(|I|-m|I_i|)/(m-1)=|I|(1-m|I_i|/|I|)/(m-1)=|I|(1-m^{1-1/s})/(m-1)\geqslant c_s|I|/m,$$

这里 $m\geqslant 2$, $0<s<1, c_s=(1-2^{1-1/s})$, 于是

$$|U|\geqslant\frac{j-1}{m}c_s|I|\geqslant\frac{j}{2m}c_s|I|.$$

由式 (4.4) 可得

$$\mu(U)\leqslant j\mu(I_i)=j|I_i|^s=\frac{j}{m}|I|^s\leqslant 2^s c_s^{-s}\left(\frac{j}{m}\right)^{1-s}|U|^s\leqslant 2^s c_s^{-s}|U|^s. \tag{4.6}$$

上面的不等式对任一端点在 $F$ 内的区间 $U$ 都成立, 因此对任何区间 $U$ 也成立 (只要应用式 (4.6) 到包含 $U\bigcap F$ 的最小区间上), 由质量分布原理 4.2, $\mathcal{H}^s(F)>0$. □

对例 4.4 中的 $\mu(U)$ 的更细微的估计可以得到 $\mathcal{H}^s(F)=1$.

在例 4.4 构造的过程中, 如果 $m$ 始终保持常数而得到的集称为均匀康托尔集(见图 4.2). 这给出了三分康托尔集的一个自然推广.

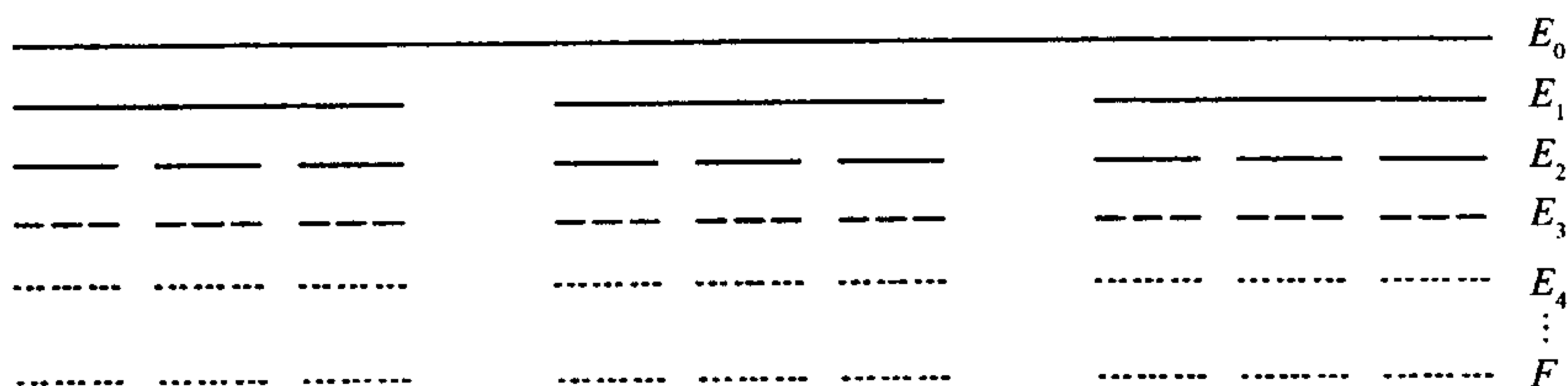



图 4.2 一个 $m=3, r=4/15$, 维数 $\dim_{\mathrm{H}} F=\dim_{\mathrm{B}} F=\ln 3/-\ln(4/15)=0.831$ 的均匀康托尔集

**例 4.5 均匀康托尔集** 设 $m$ 是大于或等于 2 的整数, 且 $0<r<1/m$, 与上题类似, 但在构造的每一步, 把每个基本区间 $I$ 都用 $m$ 个间隔长度相等、长度为 $r|I|$ 的子区间取代, 同时使两端的子区间与 $I$ 各同有一个端点, 由这样构造而得到了集 $F$, 则 $\dim_{\mathrm{H}} F=\dim_{\mathrm{B}} F=\ln m/(-\ln r)$, 且 $0<\mathcal{H}^{\ln m/(-\ln r)}(F)<\infty$.

**计算** 集 $F$ 是在例 4.4 中, 取 $m$ 为常数, $s=\ln m/(-\ln r)$ 而得到的一般康托尔集, 此时方程 (4.4) 变成恒等式 $(r|I|)^s=\dfrac{1}{m}|I|^s$, 因此 $\dim_{\mathrm{H}} F=s$. 至于盒维数, 注意到对每个 $k$, $F$ 被 $m^k$ 个长度为 $r^{-k}$ 的 $k$ 水平基本区间覆盖, 用通常的方法可得 $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F\leqslant \ln m/-\ln r$.

中间去掉 $\lambda$ 的康托尔集, 是由单位区间出发, 每次迭代都按 $0<\lambda<1$ 的比例, 去掉区间中间部分而得到的集, 它是上述均匀康托尔集在 $m=2$ 和 $r=(1-\lambda)/2$ 时的特殊情形, 于是它的豪斯多夫维数和盒维数都为 $\ln 2/\ln(2/(1-\lambda))$.

下一个例子是一般构造的另一种情形.

**例 4.6** 假定在一般构造式 (4.3) 中, 每个 $k-1$ 水平区间至少包含 $m_k\geqslant 2$ 个 $k$ 水平区间 $(k=1,2,\cdots)$, 对任意的 $k$, $k$ 水平区间之间的间隔最小为 $\varepsilon_k$, 且 $0<\varepsilon_{k+1}<\varepsilon_k$, 则

$$\dim_{\mathrm{H}} F\geqslant \varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln(m_1\cdots m_{k-1})}{-\ln(m_k\varepsilon_k)}. \tag{4.7}$$

**计算** 可以假定式 (4.7) 的右边是正的, 否则式 (4.7) 显然成立. 同时也可以假定每个 $k-1$ 水平区间包含 $m_k$ 个 $k$ 水平区间, 否则, 可以抛掉多出的区间, 而得到较小的 $E_k$, 相应的 $F$ 也较小, 对这样的 $F$ 证明即可. 可以定义 $F$ 上的质量分布 $\mu$, 使 $m_1\cdots m_k$ 个 $k$ 水平区间的每一个都具有质量 $(m_1\cdots m_k)^{-1}$.

设 $U$ 是满足 $0<|U|<\varepsilon_1$ 的任一区间; 下面估计 $\mu(U)$. 设 $k$ 是使 $\varepsilon_k\leqslant|U|<\varepsilon_{k-1}$ 的整数, 则 $k$ 水平区间与 $U$ 相交的区间数应当满足下列两点:

(i) 最多 $m_k$ 个, 因为 $U$ 最多与一个 $k-1$ 水平区间相交;

(ii) 最多为 $|U|/\varepsilon_k+1\leqslant 2|U|/\varepsilon_k$, 因为 $k$ 水平区间之间最小的间隙为 $\varepsilon_k$. 每个 $k$ 水平区间上有质量 $(m_1\cdots m_k)^{-1}$, 因此对任意 $0\leqslant s\leqslant 1$, 有

$$\mu(U)\leqslant(m_1\cdots m_k)^{-1}\min\{2|U|/\varepsilon_k,m_k\}\leqslant(m_1\cdots m_k)^{-1}(2|U|/\varepsilon_k)^s m_k^{1-s}.$$

所以
$$\frac{\mu(U)}{|U|^s}\leqslant\frac{2^s}{(m_1\cdots m_{k-1})m_k^s\varepsilon_k^s}.$$

如果
$$s<\varliminf_{k\to\infty}\ln(m_1\cdots m_{k-1})/(-\ln(m_k\varepsilon_k)),$$

则对充分大的 $k$, $(m_1\cdots m_{k-1})m_k^s\varepsilon_k^s>1$, 所以 $\mu(U)\leqslant 2^s|U|^s$, 由质量分布原理 4.2, $\dim_{\rm H}F\geqslant s$, 即得式 (4.7). □

现在设例 4.6 中的每个 $k$ 水平区间的长度都为 $\delta_k$, 并且每个 $k-1$ 水平区间都恰好包含 $m_k$ 个 $k$ 水平区间, $E_k$ 的区间之间都有 "粗略相等的间隔", 即 $m_k\varepsilon_k\geqslant c\delta_{k-1}$, 其中 $c$ 是大于 0 的常数. 则式 (4.7) 变成

$$\dim_{\rm H}F\geqslant\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln(m_1\cdots m_{k-1})}{-\ln c-\ln\delta_{k-1}}=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln(m_1\cdots m_{k-1})}{-\ln\delta_{k-1}}.$$

但是 $E_{k-1}$ 包含有 $m_1\cdots m_{k-1}$ 个长度为 $\delta_{k-1}$ 的区间, 所以由命题 4.1 知, 这个表达式等于 $\dim_{\rm H}F$ 的上界. 因此在这种区间之间有较好间隔的情况下, 得到取等号的式 (4.7).

下面形式的例子出现在数论中, 见 10.3 节.

**例 4.7** 固定 $0<s<1$, 且设 $n_0,n_1,n_2,\cdots$ 是迅速增加的整数序列, 比如对每个 $k,n_{k+1}\geqslant\max\{n_k^k,4n_k^{1/s}\}$. 又设对每个 $k$, $H_k\subset\mathbf{R}$ 都是由 $\mathbf{R}$ 的子区间组成的区间类, 组成 $H_k$ 的区间长度都等于 $n_k^{-1/s}$, 它的任意相邻的两区间的间隔都相等, 且这样两个区间中点之间的距离都为 $n_k^{-1}$. 记 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}H_k$, 则 $\dim_{\rm H}F=s$.

**计算** 因为对每个 $k,F\subset H_k$, 所以集 $F\bigcap[0,1]$ 最多包含在 $n_k+1$ 个长度为 $n_k^{-1/s}$ 的区间内, 由命题 4.1 即得

$$\dim_{\rm H}(F\bigcap[0,1])\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\ln(n_k+1)/(-\ln n_k^{-1/s})=s.$$

类似地有 $\dim_{\rm H}(F\bigcap[n,n+1])\leqslant s$ 对任意 $n\in\mathbf{Z}$ 成立, 所以, 作为这类集的可数并, 有 $\dim_{\rm H}F\leqslant s$.

现在设 $E_0=[0,1]$, 并对 $k\geqslant 1$ 设 $E_k$ 是由 $H_k$ 中那些完全包含在 $E_{k-1}$ 中的区间组成. 则只要 $k$ 充分大, $E_{k-1}$ 的每个区间 $I$ 至少包含 $E_k$ 中的 $n_k|I|-2\geqslant n_kn_{k-1}^{-1/s}-2\geqslant 2$ 个区间, 这些区间之间的间隔最少为 $n_k^{-1}-n_k^{-1/s}\geqslant\frac{1}{2}n_k^{-1}$. 利用例

4.6 的结论并且注意到用 $m_k = n_k n_{k-1}^{-1/s}$ 代替 $m_k = n_k n_{k-1}^{-1/s} - 2$ 不影响极限, 即有

$$\begin{aligned}\dim_{\mathrm{H}}(F\bigcap[0,1]) \geqslant \dim_{\mathrm{H}} \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \geqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln((n_1\cdots n_{k-2})^{1-1/s} n_{k-1})}{-\ln(n_k n_{k-1}^{-1/s}\frac{1}{2}n_k^{-1})} \\ = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(n_1\cdots n_{k-2})^{1-1/s} + \ln n_{k-1}}{\ln 2 + (\ln n_{k-1})/s}.\end{aligned}$$

如果 $n_k$ 增加的充分快, 上式分子和分母中的 $\ln n_{k-1}$ 项起主要作用, 故得到所要求的结论 $\dim_{\mathrm{H}}(F\bigcap[0,1]) \geqslant s$. □

虽然质量分布原理 4.2 只基于简单的思想, 但已经可以看到对求豪斯多夫维数和盒维数, 它是非常有用的, 现在推导出这个方法的一些重要变化.

条件式 (4.1) 只要求对球心在 $F$ 的任一点的充分小的球成立就可以了, 这是命题 4.9(a) 所表达的思想. 虽然质量分布方法是很少对求维数上界有用的, 但因为在某种意义下它是 4.9(a) 的对偶形式, 因此把它列为 4.9(b). 注意到像 $\lim_{r\to 0}\mu(B(x,r))/r^s$ 这样的密度表达式在研究分形的局部性质中起了重要的作用 ( 见第 5 章). ($B(x,r)$ 为球心在 $x$, 半径为 $r$ 的闭球.)

在证明命题 4.9(b) 中, 需要下面的覆盖引理.

**覆盖引理 4.8** 设 $\mathbb{C}$ 是在 $\mathbf{R}^n$ 的有界区域内的球族, 则存在 (有限或可数) 不交的子球族 $\{B_i\}$ 使得:

$$\bigcup_{B\in\mathbb{C}} B \subset \bigcup_i \tilde{B}_i \tag{4.8}$$

其中 $\tilde{B}_i$ 是与 $B_i$ 同心, 且半径为 $B_i$ 半径的 4 倍的闭球.

**证明** 为简单起见, 只给出 $\mathbb{C}$ 是有限族情形下的证明, 对于一般情况, 证明的基本思想是一样的. 下面用归纳法来选择 $\{B_i\}$, 设 $B_1$ 为 $\mathbb{C}$ 中半径最大的球. 假定 $B_1,\cdots,B_{k-1}$ 已经选定, 则取 $B_k$ 为 $\mathbb{C}$ 中与 $B_1,\cdots,B_{k-1}$ 都不交的半径最大的球 (或者最大球中的一个), 如果没有这样的球, 那么选择过程就结束. 显然, 这样选出来的球是不交的; 还必须验证式 (4.8) 成立. 如果 $B\in\mathbb{C}$, 则或者对某个 $i, B = B_i$ 或者 $B$ 与某个满足 $|B_i| \geqslant |B|$ 的 $B_i$ 相交, 否则 $B$ 就已经被选为代替第一个满足 $|B_k| < |B|$ 的 $B_k$. 两种情况下都有 $B\subset\tilde{B}_i$, 因此有式 (4.8) 成立.(易见如果取 $\tilde{B}_i$ 与 $B_i$ 同心, 而半径为 $B_i$ 半径的 $3+\varepsilon$ 倍, $\varepsilon$ 是大于零的任意数, 则引理的结论仍然成立. 如果 $\mathbb{C}$ 是有限的, 可以取 $\varepsilon = 0$.) □

**命题 4.9** 设 $\mu$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的质量分布, $F\subset\mathbf{R}^n$ 是博雷尔集, 又设 $0 < c < \infty$ 是常数.

(a) 如果对任意 $x\in F, \varlimsup_{r\to 0}\mu(B(x,r))/r^s < c$, 则 $\mathcal{H}^s(F) \geqslant \mu(F)/c$;

(b) 如果对任意 $x\in F, \varlimsup_{r\to 0}\mu(B(x,r))/r^s > c$, 则 $\mathcal{H}^s(F) \leqslant 2^s\mu(\mathbf{R}^n)/c$.

**证明** (a) 对任意 $\delta > 0$, 令.

$$F_\delta = \{x \in F : \mu(B(x,r)) < cr^s \quad 对任意0 < r \leqslant \delta成立了.$$

设 $\{U_i\}$ 是 $F$ 的 $\delta$ 覆盖, 因此也是 $F_\delta$ 的 $\delta$ 覆盖. 对每个包含 $F_\delta$ 的点 $x$ 的 $U_i$, 以 $x$ 为球心, 以 $|U_i|$ 为半径的球肯定包含这个 $U_i$, 由 $F_\delta$ 的定义

$$\mu(U_i) \leqslant \mu(B) < c\,|U_i|^s,$$

所以

$$\mu(F_\delta) \leqslant \sum_i \{\mu(U_i) : U_i与F_\delta相交\} \leqslant c\sum_i |U_i|^s.$$

因为 $\{U_i\}$ 是 $F$ 的任意 $\delta$ 覆盖, 由此得 $\mu(F_\delta) \leqslant c\mathcal{H}^s_\delta(F) \leqslant c\mathcal{H}^s(F)$.
但当 $\delta$ 递减趋于 0 时, $F_\delta$ 递增趋于 $F$, 因此由式 (1.7) 可得 $\mu(F) \leqslant c\mathcal{H}^s(F)$.

(b) 为简单起见, 证明一个比 (b) 弱一些的结论, 即用 $8^s$ 代替结论中的 $2^s$, 但基本思想是类似的. 首先假设 $F$ 是有界的, 固定 $\delta > 0$, 并设 $\mathbb{C}$ 是球族:

$$\{B(x,r) : x \in F, 0 < r \leqslant \delta \text{ 且 } \mu(B(x,r)) > cr^s\}.$$

则由 (b) 的假设知 $F \subset \bigcup_{B\in\mathbb{C}} B$. 应用覆盖引理 4.8 到球族 $\mathbb{C}$, 存在不交的球序列 $B_i \in \mathbb{C}$, 使得 $\bigcup\limits_{B\in\mathbb{C}} B \subset \bigcup_i \tilde{B}_i$, 其中 $\tilde{B}_i$ 是与 $B_i$ 同心, 但半径是 $B_i$ 半径的 4 倍的球, 则 $\{\tilde{B}_i\}$ 是 $F$ 的一个 $8\delta$ 覆盖, 所以

$$\mathcal{H}^s_{8\delta}(F) \leqslant \sum_i \left|\tilde{B}_i\right|^s \leqslant 4^s \sum_i |B_i|^s \leqslant 8^s c^{-1} \sum_i \mu(B_i) \leqslant 8^s c^{-1} \mu(\mathbf{R}^n).$$

令 $\delta \to 0$, 得到 $\mathcal{H}^s(F) \leqslant 8^s c^{-1}\mu(\mathbf{R}^n) < \infty$. 最后, 如果 $F$ 不是有界的, 并且 $\mathcal{H}^s(F) > 8^s c^{-1}\mu(\mathbf{R}^n)$, 则 $F$ 的某个有界子集的 $s$ 维豪斯多夫测度也将大于 $8^s c^{-1}\mu(\mathbf{R}^n)$ 这个值, 这与上面的论证矛盾. □

注意, 由命题 4.9 立即可以得出, 对任意 $x \in F$, 如果 $\lim\limits_{r\to 0} \ln \mu(B(x,r))/\ln r = s$, 则 $\dim_{\mathrm{H}} F = s$.

命题 4.9 的应用将贯穿全书.

作为本节的总结, 记住这些计算要结合第 2 章和第 3 章讨论过的维数的基本性质: 例如, 因为函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0,1]$ 上是利普希茨的, 而在区间 $[2/3,1]$ 上是双利普希茨的, 所以就有 $\dim_{\mathrm{H}}\left\{x^2 : x \in \mathbb{C}\right\} = \dim_{\mathrm{H}} f(\mathbb{C}) = \ln 2/\ln 3$, 这里 $\mathbb{C}$ 是三分康托尔集.

## 4.2 有限测度子集

这一节似乎已经超出了本章关于求维数的范围, 然而定理 4.10 是 4.3 节引出的重要的位势理论方法所需要的. 具有无穷测度的集合是难于处理的, 如果能将它们削减成正有限测度集, 应当是非常有用的简化.

定理 4.10 保证了任何满足 $\mathcal{H}^s(F)=\infty$ 的 (博雷尔) 集 $F$ 包含一个子集 $E$ 满足 $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$(即 $E$ 是 $s$ 集). 乍看起来, 这似乎是显然的, 只要削减 $F$ 一直到留下的部分具有正的有限测度. 遗憾的是, 事情并不是那么简单, 测度可能从无限测度跳到零测度而不经过任何中间值. 用数学语言来叙述它, 即可能有递减的集序列 $E_1\supset E_2\supset\cdots$, 对所有的 $k$ 满足 $\mathcal{H}^s(E_k)=\infty$, 但却有 $\mathcal{H}^s(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)=0$(举一个简单的例子, 例如取 $E_k=[0,1/k]\subset\mathbf{R}$ 且 $0<s<1$, 就是这样的情形). 为了证明这个定理, 要更精细地考察豪斯多夫测度的构造. 读者主要关心的是定理的应用, 而不是证明.

**定理 4.10** 设 $F$ 是满足 $0<\mathcal{H}^s(F)\leqslant\infty$ 的 $\mathbf{R}^n$ 的博雷尔子集, 则存在紧集 $E\subset F$ 使 $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$.

*** 证明梗概** 完整的证明是非常复杂的, 这里只对 $0<s<1$ 和 $F$ 是 $[0,1]\subset\mathbf{R}$ 上的紧子集的情形说明证明的思想.

利用式 (2.17)~(2.18) 定义的网测度 $\mathcal{M}^s$ 来证明, 网测度是利用二进制区间 $[r2^{-k},(r+1)2^{-k})$ 定义的, 并由式 (2.19) 与豪斯多夫测度联系起来.

用归纳法定义一个 $F$ 的递减的紧子集序列 $E_0\supset E_1\supset E_2\supset\cdots$, 设 $E_0=F$, 对 $k\geqslant 0$, 利用确定与每个长度为 $2^{-k}$ 的二进区间的交的方法来定义 $E_{k+1}$. 如果 $\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k\bigcap I)\leqslant 2^{-sk}$, 就令 $E_{k+1}\bigcap I=E_k\bigcap I$, 由于在计算 $\mathcal{M}^s_{2^{-k}}$ 中, 利用 $I$ 本身作为一个覆盖区间给出的估计, 至少与用较短的二进区间时的估计一样大, 因此有

$$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1}\bigcap I)=\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k\bigcap I) \tag{4.9}$$

另一方面, 如果 $\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1}\bigcap I)>2^{-sk}$, 则取 $E_{k+1}\bigcap I$ 为 $E_k\bigcap I$ 的一个满足 $\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1}\bigcap I)=2^{-sk}$ 的紧子集. 这样的子集存在是因为 $\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k\bigcap I\bigcap[0,u])$ 是有限的, 并对 $\mu$ 连续 (这就是为什么利用 $\mathcal{M}^s_\delta$ 而不是 $\mathcal{M}^s$ 进行证明的原因), 因为 $\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k\bigcap I)=2^{-sk}$, 式 (4.9) 仍然成立. 把式 (4.9) 对全部长度为 $2^{-k}$ 的二进制区间求和, 可以得到

$$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1})=\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k). \tag{4.10}$$

反复应用式 (4.10) 可以得到对所有的 $k,\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k)=\mathcal{M}^s_1(E_0)$. 设 $E$ 是紧集 $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}E_k$, 令 $k\to\infty$, 取极限, 即有 $\mathcal{M}^s(E)=\mathcal{M}^s_1(E_0)$(这一步的论证当然需要较复杂的

证明). 用单个区间 [0,1] 覆盖 $E_0 = F$ 可以得出 $\mathcal{M}^s(E) = \mathcal{M}_1^s(E_0) \leqslant 1$; 因为 $\mathcal{M}^s(E_0) \geqslant \mathcal{H}^s(E_0) > 0$, 如果 $k$ 充分大, 就有 $\mathcal{M}_{2^{-k}}^s(E_0) > 0$. 于是或者就有 $\mathcal{M}^s(E) = \mathcal{M}_1^s(E_0) \geqslant 2^{-ks}$, 或者在 $\mathcal{M}^s(E) = \mathcal{M}_1^s(E_0) = \mathcal{M}_{2^{-k}}^s(E_0) > 0$ 时, $\mathcal{M}_1^s(E_0) < 2^{-ks}$, 于是 $0 < \mathcal{M}^s(E) < \infty$, 且由式 (2.19) 定理得证. □

一些结论, 比如说第 5 章中的结论, 只能应用到 $s$ 集, 即满足 $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ 的集 $F$ 上. 解决具有 $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ 的 $s$ 维集的一个方法是利用定理 4.10 去选取一个具有有限正测度的子集, 把它作为 $s$ 集研究它的性质, 然后在一定意义上去解释大的集合 $F$ 的性质. 类似地, 如果 $0 < s < t$, 任意一个具有豪斯多夫维数 $t$ 的集 $F$, 有 $\mathcal{H}^s(F) = \infty$, 所以 $F$ 包含一个 $s$ 集.

下面的命题实际上是命题 4.9 的一个推论, 它进一步加强了定理 4.10 的结论.

**命题 4.11**　设 $F$ 是满足 $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ 的博雷尔集, 则存在一个常数 $b$ 和一个紧子集 $E \subset F$, 满足 $\mathcal{H}^s(E) > 0$ 使得对任意 $x \in \mathbf{R}^n$ 和 $r > 0$, 都有

$$\mathcal{H}^s(E \bigcap B(x,r)) \leqslant br^s. \tag{4.11}$$

**证明**　在命题 4.9(b) 中取 $\mu$ 为 $\mathcal{H}^s$ 在 $F$ 上的限制, 即 $\mu(A) = \mathcal{H}^s(F \bigcap A)$, 如果

$$F_1 = \{x \in \mathbf{R}^n : \overline{\lim_{r\to 0}} \mathcal{H}^s(F \bigcap B(x,r))/r^s > 2^{1+s}\},$$

则有 $\mathcal{H}^s(F_1) \leqslant 2^s 2^{-(1+s)} \mu(F) = \dfrac{1}{2}\mathcal{H}^s(F)$, 于是 $\mathcal{H}^s(F \backslash F_1) \geqslant \dfrac{1}{2}\mathcal{H}^s(F) > 0$, 因此, 如果 $E_1 = F \backslash F_1$, 则有 $\mathcal{H}^s(E_1) > 0$ 和对 $x \in E_1$, $\overline{\lim_{r\to 0}} \mathcal{H}^s(F \bigcap B(x,r))/r^s \leqslant 2^{1+s}$, 由 Egoroff 定理 (见 1.3 节) 知存在一个紧集 $E \subset E_1$ 满足 $\mathcal{H}^s(E) > 0$, 并存在数 $r_0 > 0$ 使对任意的 $x \in E$ 及任意的 $0 < r \leqslant r_0, \mathcal{H}^s(F \bigcap B(x,r))/r^s \leqslant 2^{2+s}$. 但是如果 $r \geqslant r_0$, 有 $\mathcal{H}^s(F \bigcap B(x,r))/r^s \leqslant \mathcal{H}^s(F)/r_0^s$, 因此, 对任意 $r > 0$, 式 (4.11) 成立.□

**推论 4.12**　设 $F$ 是使 $0 < \mathcal{H}^s(F) \leqslant \infty$ 的 $\mathbf{R}^n$ 的博雷尔子集, 则存在紧集 $E \subset F$ 使 $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$, 并存在常数 $b$, 使对任意 $x \in \mathbf{R}^n$ 及 $r > 0$,

$$\mathcal{H}^s(E \bigcap B(x,r)) \leqslant br^s.$$

**证明**　定理 4.10 保证了 $F$ 有一个具有有限正测度的子集, 然后再应用命题 4.11 即得结论. □

推论 4.12 可以看成是质量分布原理 4.2 的逆命题, 经常被称为 “Frostman 引理”.

## 4.3　位势理论方法

这一节中引出一种计算豪斯多夫维数的技巧, 它无论在理论上还是在实践中都

是重要的. 这个方法只需验证某个积分的收敛性, 而不需要像在质量分布原理中那样, 估计大量的小集合的质量.

位势与能的思想对那些具有引力与静电学知识的读者来说是熟识的. 对 $s \geqslant 0$, 由 $\mathbf{R}^n$ 上的质量分布 $\mu$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上的一点 $x$ 引起的 $s$ 位势($s$-potential) 定义为:

$$\phi_s(x) = \int \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s}. \tag{4.12}$$

(如果我们在 $\mathbf{R}^3$ 中考虑问题, 并且 $s=1$, 则 $\phi_s(x)$ 本质上就是熟知的牛顿引力势). $\mu$ 的 $s$ 能($s$-energy) 是

$$I_s(\mu) = \int \phi_s(s)\mathrm{d}\mu(x) = \iint \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s}. \tag{4.13}$$

下面的关于豪斯多夫维数的定理表面上似乎与位势理论思想没有关系, 实际上, 如果在一个集 $F$ 上的质量分布 $\mu$ 具有有限的 $s$ 能, 则 $F$ 的维数至少是 $s$.

**定理 4.13** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集,

(a) 如果 $F$ 上的质量分布 $\mu$ 满足 $I_s(\mu) < \infty$, 则 $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ 且 $\dim_{\mathrm{H}} F \geqslant s$.

(b) 如果 $F$ 是满足 $\mathcal{H}^s(F) > 0$ 的博雷尔集, 则存在 $F$ 上的一个质量分布 $\mu$, 使得对任意的 $0 < t < s$ 有 $I_t(\mu) < \infty$.

**证明** (a) 假定对某个支撑包含在 $F$ 内的质量分布 $\mu, I_s(\mu) < \infty$. 定义

$$F_1 = \{x \in F : \overline{\lim_{r\to 0}}\mu(B(x,r))/r^s > 0\}.$$

如果 $x \in F_1$, 由于 $\mu(\{x\}) = 0$(否则 $I_s(\mu) = \infty$), 可以找到 $\varepsilon > 0$ 和一列递减到 0 的数列 $\{r_i\}$, 使得 $\mu(B(x,r_i)) \geqslant \varepsilon r_i^s$; 由 $\mu$ 的连续性, 可以取充分小的 $q_i (0 < q_i < r_i)$ 使得 $\mu(A_i) \geqslant \dfrac{1}{4}\varepsilon r_i^s (i = 1, 2, \cdots)$, 其中 $A_i$ 是环 $B(x,r_i)\backslash B(x,q_i)$, 如果必要的话可以取子序列, 假定对所有的 $i$, $r_{i+1} < q_i$, 因此 $A_i$ 是中心在 $x$ 的不交的环, 所以对 $x \in F_1$, 由于在 $A_i$ 上 $|x-y|^{-s} \geqslant r_i^{-s}$, 可以得到

$$\phi_s(x) = \int \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4}\varepsilon r_i^s r_i^{-s} = \infty.$$

但是 $I_s(\mu) = \int \phi_s(x)\mathrm{d}\mu(x) < \infty$, 所以对 $\mu$ 几乎处处的 $x$, $\phi_s(x) < \infty$, 于是可以断言 $\mu(F_1) = 0$. 又由于如果 $x \in F\backslash F_1$, $\overline{\lim_{r\to 0}}\, \mu(B(x,r))/r^s = 0$, 命题 4.9(a) 告诉我们, 对任意的 $c > 0$ 有

$$\mathcal{H}^s(F) \geqslant \mathcal{H}^s(F\backslash F_1) \geqslant \mu(F\backslash F_1)/c \geqslant (\mu(F) - \mu(F_1))/c = \mu(F)/c.$$

因此 $\mathcal{H}^s(F) = \infty$.

(b) 设 $\mathcal{H}^s(F) > 0$, 可以利用 $s$ 维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^s$ 在 $F$ 上构造一个质量分布 $\mu$, 使对任意的 $t < s$, $I_t(\mu) < \infty$.

由推论 4.12 知存在紧集 $E \subset F$, 满足 $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$, 并对某常数 $b$ 有

$$\mathcal{H}^s(E \bigcap B(x,r)) \leqslant br^s,$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$.
令 $\mu$ 为 $\mathcal{H}^s$ 在 $E$ 上的限制, 使 $\mu(A) = \mathcal{H}^s(E \bigcap A)$, 则 $\mu$ 是 $F$ 上的质量分布, 固定 $x \in \mathbf{R}^n$, 记

$$m(r) = \mu(B(x,r)) = \mathcal{H}^s(E \bigcap B(x,r)) \leqslant br^s. \tag{4.14}$$

则, 如果 $0 < t < s$, 分部积分后并利用式 (4.14) 有

$$\begin{aligned}
\phi_t(x) &= \int_{|x-y|\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^t} + \int_{|x-y|>1} \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^t} \leqslant \int_0^1 r^{-t}\mathrm{d}m(r) + \mu(\mathbf{R}^n) \\
&= [r^{-t}m(r)]_{0+}^1 + t\int_0^1 r^{-(t+1)}m(r)\mathrm{d}r + \mu(\mathbf{R}^n) \\
&\leqslant b + bt\int_0^1 r^{s-t-1}\mathrm{d}r + \mu(\mathbf{R}^n) \\
&= b\left(1 + \frac{t}{s-t}\right) + \mathcal{H}^s(F) = c,
\end{aligned}$$

于是对任意 $x \in \mathbf{R}^n$, $\phi_t(x) \leqslant c$, 即

$$I_t(\mu) = \int \phi_t(x)\mathrm{d}\mu(x) \leqslant c\mu(\mathbf{R}^n) < \infty. \qquad \square$$

定理 4.13 的重要应用在书的稍后部分给出, 例如第 6 章中的射影定理的证明和在第 16 章中确定布朗轨道的维数等. 这个定理也经常用来求依赖于参数 $\theta$ 的分形 $F_\theta$ 的维数, 对每个 $\theta$, 可以用自然的方法定义一个质量分布 $\mu_\theta$. 如果我们可以证明对某个 $s$

$$\int I_s(\mu_\theta)\mathrm{d}\theta = \iiint \frac{\mathrm{d}\mu_\theta(x)\mathrm{d}\mu_\theta(y)\mathrm{d}\theta}{|x-y|^s} < \infty,$$

则对几乎所有的 $\theta, I_s(\mu_\theta) < \infty$, 也即对几乎所有的 $\theta, \dim_{\mathrm{H}} F_\theta \geqslant s$.

熟悉位势理论的读者一定已经遇见过集 $F$ 的 $s$ 容度的定义:

$C_s(F) = \sup\limits_{\mu}\{1/I_s(\mu) : \mu\text{是使}\mu(F) = 1\text{的}F\text{上的质量分布}\}$

(约定 $1/\infty = 0$), 于是定理 4.13 的另一表达方法是:

$$\dim_{\mathrm{H}} F = \inf\{s \geqslant 0 : C_s(F) = 0\} = \sup\{s \geqslant 0 : C_s(F) > 0\}.$$

而这又让人想起通过豪斯多夫测度定义的豪斯多夫维数的定义式 (2.11), 但应当注意容度的性质与测度有很大的不同, 特别是它不具有一般的可加性.

## *4.4 傅里叶变换法

这一节中, 我们只是指出傅里叶变换可以是分析维数的有力工具.

可积函数 $f$ 和 $\mathbf{R}^n$ 上的质量分布 $\mu$ 的 $n$ 维傅里叶变换分别定义为:

$$\hat{f}(u) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\exp(\mathrm{i}x\cdot u)\mathrm{d}x \quad (u\in\mathbf{R}^n) \tag{4.15}$$

$$\hat{\mu}(u) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp(\mathrm{i}x\cdot u)\mathrm{d}\mu(x) \quad (u\in\mathbf{R}^n) \tag{4.16}$$

其中 $x\cdot u$ 表示通常的数量积. (利用分布理论可以把傅里叶变换延拓到很广的函数类上.)

式 (4.12) 的质量分布 $\mu$ 的 $s$ 位势恰好是卷积

$$\phi_s(x) = (|\cdot|^{-s} * \mu)(x) \equiv \int |x-y|^{-s}\mathrm{d}\mu(y).$$

形式上, $|x|^{-s}$ 的变换可以表成 $c|u|^{s-n}$, 其中 $c$ 依赖于 $n$ 和 $s$, 卷积定理告诉我们, 两个函数的卷积的变换等于这两个函数变换的乘积, 这就给出了:

$$\hat{\phi}_s(u) = c\,|u|^{s-n}\,\hat{\mu}(u).$$

由 Parseval 定理, 又有

$$\int \phi_s(x)\mathrm{d}\mu(x) = (2\pi)^n \int \hat{\phi}_s(u)\overline{\hat{\mu}(u)}\mathrm{d}u,$$

其中横线表示共轭复数, 因此

$$I_s(\mu) = (2\pi)^n c\int |u|^{s-n}\,|\hat{\mu}(u)|^2\,\mathrm{d}u. \tag{4.17}$$

这个关于 $I_s(\mu)$ 的公式也可以由更严格的方法建立起来, 它有时是定理 4.13 所需要的, 用来表示能的式 (4.13) 的更方便的形式. 因此, 如果 $\mu$ 是 $F$ 上的一个质量分布, 并且在集 $F$ 上的积分式 (4.17) 是有限的, 则 $\dim_{\mathrm{H}} F \geqslant s$. 特别地, 如果

$$|\hat{\mu}(u)| \leqslant b\,|u|^{-t/2} \tag{4.18}$$

对某个常数 $b$ 成立, 则注意到式 (4.16), 对任意 $u, |\hat{\mu}(u)| \leqslant \mu(\mathbf{R}^n)$, 则由式 (4.17), 有

$$I_s(\mu) \leqslant c_1 \int_{|u| \leqslant 1} |u|^{s-n} \mathrm{d}u + c_2 \int_{|u|>1} |u|^{s-n} |u|^{-t} \mathrm{d}u,$$

且当 $0 < s < t$ 时上式右边收敛. 于是, 如果式 (4.18) 成立, 任何支撑 $\mu$ 的集 $F$ 的维数最小为 $t$. 使 $F$ 上有满足式 (4.18) 的质量分布 $\mu$ 的最大值 $t$ 有时称为 $F$ 的**傅里叶维数**, 傅里叶维数不会超过豪斯多夫维数.

## 4.5 注记和参考文献

许多论文专门研究了各种分形的不同类型维数的计算, 比如有 Eggleston (1952), Beardon(1965) 和 Peyriere(1977) 讨论了一般的结构.

位势论处理方法本质上要归于 Frostman(1935) 的工作, 比较近的论述可见 Taylor(1961), Hayman and Kennedy(1976), Carleson(1967) 或 Kahane(1985). 而关于傅里叶变换的介绍可见 Papoulis(1962) .

有关有限测度子集的工作开始于 Besicovitch (1952), 而 Rogers(1998) 给出了一个非常一般的处理. 关于定理 4.10 的完整证明可以在 Falconer(1985a) 和 Mattila(1995) 找到.

Joyce and Preiss(1995) 研究了有限正填充测度子集.

### 练　习

**4.1** 已知 $F$ 是三分康托尔集, 求下面集的豪斯多夫维数

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \text{或者}x \in F,\ \text{或者}y \in F\}$$

**4.2** 用质量分布原理和自然上界估计方法, 证明由 [0,1] 中那些十进制展开式中只有偶数的数组成的集, 它的豪斯多夫维数等于 $\ln 5/\ln 10$.

**4.3** 利用质量分布方法证明图 0.4 中的 "康托尔尘" 的豪斯多夫维数等于 1. (提示: 注意, 在构造过程中, 正方形 $E_0$ 的边长取 1, 且在 $E_k$ 中的两个正方形之间的距离最少为 $4^{-k}$. )

**4.4** 固定 $0 < \lambda \leqslant 1/2$, 设 $F$ 是下面的实数集

$$F = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^k : a_k = 0\text{或}1, k = 1, 2, \cdots \right\}$$

求 $F$ 的豪斯多夫维数.

**4.5** 若 $F$ 是三分康托尔集, 则集合 $F \times F \subset \mathbf{R}^2$ 的豪斯多夫维数是多少?

**4.6** 设 $F$ 是三分康托尔集, 由式 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x\in F$ 且 $0\leqslant y\leqslant x^2\}$ 给出的平面集的豪斯多夫维数是多少?

**4.7** 利用质量分布方法, 不通过例 4.4 而直接求出例 4.5 的结论.

**4.8** 证明: 每个 $x\geqslant 0$ 的数 $x$, 可以表成 $x=m+\dfrac{a_2}{2!}+\dfrac{a_3}{3!}+\cdots$ 的形式, 其中 $m\geqslant 0$ 是整数, 对每个 $k$, $a_k$ 是满足 $0\leqslant a_k\leqslant k-1$ 的整数. 设 $F=\{x\geqslant 0 : m=0,$ 且对 $k=2,3,\cdots,a_k$ 是偶数$\}$, 求 $\dim_{\mathrm{H}} F$.

**4.9** 证明: 存在豪斯多夫维数为 1, 但 1 维豪斯多夫测度为 0 的 [0,1] 上的子集 $F$.(提示: 试着按 "康托尔集" 的构造过程, 但在每一步去掉区间的长度比例逐步减少. )

**4.10** 从定理 4.10 推导: 如果 $F$ 是满足 $\mathcal{H}^s(F)=\infty$ 的 $\mathbf{R}^n$ 的博雷尔子集, $c$ 是一个正数, 则存在 $F$ 的博雷尔子集 $E$ 使 $\mathcal{H}^s(E)=c$.

**4.11** 设 $\mu$ 是三分康托尔集上的自然质量分布 (见原理 4.2 后), 对 $s<\ln 2/\ln 3$ 估计 $\mu$ 的 $s$ 能, 并由此从定理 4.13 推出 $\dim_{\mathrm{H}} F\geqslant \ln 2/\ln 3$.

# 第 5 章　分形的局部结构

经典的微积分通过切线和切平面来寻找曲线和曲面的局部逼近. 粗略地看, 光滑曲线上任一点的邻域近似是一直线段; 对于像分形一样很散乱的一类集合的局部结构, 是不是也可以探索研究些什么呢? 令人惊奇的是, 在很多情况下, 答案是肯定的, 我们能够沿着某种途径确定分形在普通点的邻域的形状. 特别地, 对于典型点可以研究分形的集中程度, 也就是说, 研究它们的局部密度; 还有分形在这类点周围的方向分布, 以及切线是否存在的问题. 无论在理论发展上, 还是在应用中, 对分形局部形式的了解都是很有用的.

为了认识豪斯多夫维数的强大作用, 有必要把注意力限制在 $s$ 集上, 也就是具有正有限 $s$ 维豪斯多夫测度的博雷尔集上. (更一般地, 可以研究对某个维数函数 $h$, 具有正有限的 $\mathcal{H}^h$ 测度的 $s$ 集 (见 2.5 节), 这里不考虑这个一般化的情形.) 这并不像它初看起来那么受限制, 在实际中遇到的很多分形都是 $s$ 集, 即使 $\mathcal{H}^s(F)=\infty$, 那么由定理 4.10, 可以利用这个定理知道 $F$ 有一个作为子集的 $s$ 集; 或者, 有时 $s$ 维集 $F$ 是可数个 $s$ 集的并集, 而且这些构成 $F$ 的 $s$ 集的性质经常可以传递到 $F$ 上.

本章中概述的材料是几何测度论的核心, 几何测度论中的严格证明经常是很复杂和困难的, 这里将略去较难的证明. 希望这些材料可以被认为是具有指导意义的, 而且能表现出这个学科的特色. 本章主要把注意力限制在平面的子集上, 更高维的类似结论尽管也是成立的, 但证明将是十分困难.

## 5.1　密　　度

设 $F$ 是平面的子集, $F$ 在 $x$ 点的密度是

$$\lim_{r\to 0}\frac{\operatorname{area}(F\bigcap B(x,r))}{\operatorname{area}(B(x,r))}=\lim_{r\to 0}\frac{\operatorname{area}(F\bigcap B(x,r))}{\pi r^2}, \tag{5.1}$$

这里 $B(x,r)$ 是以 $x$ 为圆心, 以 $r$ 为半径的闭圆盘. 经典的勒贝格密度定理告诉我们, 对于博雷尔集 $F$, 除去 $x$ 的一个面积为零的集外, 这个极限存在, 并且当 $x\in F$ 时, 极限为 1; 当 $x\notin F$ 时, 极限为 0. 也就是说, 对于 $F$ 的一个典型点 $x$, 以 $x$ 为圆心的小圆盘几乎全部由 $F$ 覆盖, 但对于 $F$ 外的点 $x$, 以 $x$ 为圆心的小圆盘一般极少包含 $F$ 的点 (见图 5.1).

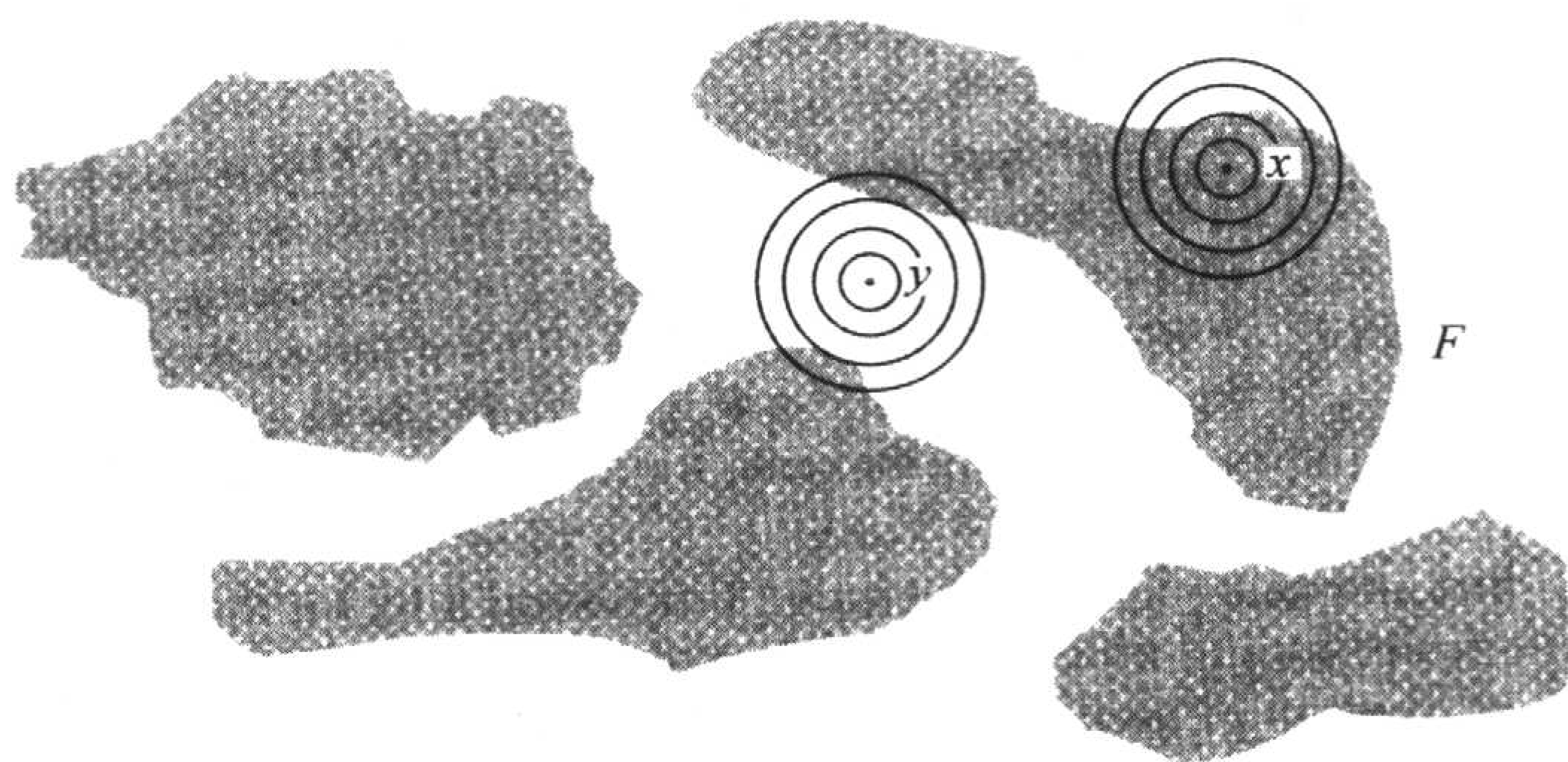



图 5.1 勒贝格密度定理. 点$x$在$F$中, 如果$r$很小的话, $\text{area}(F\bigcap B(x,r))/\text{area}(B(x,r))$ 接近于 1. 点$y$在$F$外, 如果$r$很小的话, $\text{area}(F\bigcap B(y,r))/\text{area}(B(y,r))$ 接近于 0

类似地, 如果 $F$ 是平面上的光滑曲线, 并且 $x$ 是 $F$ 上的点 (不是端点), 那么, 对于很小的 $r$, $F\bigcap B(x,r)$ 接近于 $B(x,r)$ 的直径, 且

$$\lim_{r\to 0}\frac{\text{length}(F\bigcap B(x,r))}{2r}=1.$$

如果 $x\notin F$, 那么这个极限显然是 0.

在面积或长度的意义下, 上面的这些密度定理告诉我们集 $F$ 在 $x$ 附近的集中程度. 按同样的方法来研究分形密度是自然的, 如果 $F$ 的维数是 $s$, 那么当 $r\to 0$ 时, 集 $F\bigcap B(x,r)$ 的 $s$ 维豪斯多夫测度的状况如何呢? 在 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上满足 $0<s<2$ 的 $s$ 集的情形, 考虑这个问题. (0 集只是有限个点的集合, 那没有什么可谈的, $\mathcal{H}^2$ 基本上是面积, 所以如果 $s=2$, 那只是式 (5.1) 的勒贝格密度情况.)

分别定义 $s$ 集 $F$ 在点 $x\in\mathbf{R}^n$ 上的下密度和上密度如下:

$$\underline{D}^s(F,x)=\varliminf_{r\to 0}\frac{\mathcal{H}^s(F\bigcap B(x,r))}{(2r)^s}\tag{5.2}$$

和

$$\overline{D}^s(F,x)=\varlimsup_{r\to 0}\frac{\mathcal{H}^s(F\bigcap B(x,r))}{(2r)^s}\tag{5.3}$$

(注意 $|B(x,r)|=2r$). 如果 $\underline{D}^s(F,x)=\overline{D}^s(F,x)$, 就说 $F$ 的密度在点 $x$ 存在, 并且用 $D^s(F,x)$ 来表示这个共同值.

使 $\underline{D}^s(F,x)=\overline{D}^s(F,x)=1$ 的点 $x$ 叫做 $F$ 的规则点, 否则就叫做不规则点. 一个 $s$ 集叫做规则集, 如果 $\mathcal{H}^s$ 几乎所有的点都是规则的 (也就是除去一个 $\mathcal{H}^s$ 测度为 0 的集以外的所有点). 而不规则集就是如果 $\mathcal{H}^s$ 几乎所有的点都是不规则的. 将看到一个基本结果是: $s$ 集一定是不规则的, 除非 $s$ 是整数. 然而, 如果 $s$ 是整数, $s$ 集可以分解成规则部分和不规则部分. 粗略地说, 规则 1 集是由一些具有有限长度的可

求长曲线的部分构成, 而不规则 1 集是全不连通的和似尘的, 并且典型地具有分形形式.

由定义, 规则集是这样的一个集合, 对它有一个直接类似于勒贝格密度定理的结论成立. 然而, 即使是不规则集, 密度也不会太不稳定.

**命题 5.1** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个 $s$ 集, 那么

(a) $\underline{D}^s(F,x)=\overline{D}^s(F,x)=0$ 对于 $\mathcal{H}^s$ 几乎所有的 $x\notin F$ 成立.

(b) $2^{-s}\leqslant\overline{D}^s(F,x)\leqslant 1$ 对于 $\mathcal{H}^s$ 几乎所有的 $x\in F$ 成立

**部分证明** (a) 设 $F$ 是闭集, $x\notin F$, 如果 $r$ 充分小, 则 $B(x,r)\bigcap F=\varnothing$. 因此

$$\lim_{r\to 0}\mathcal{H}^s(F\bigcap B(x,r))/(2r)^s=0.$$

如果 $F$ 不是闭的, 证明会稍微复杂一些, 这里把它略去.

(b) 为了证明, 可以取 $\mu$ 为 $\mathcal{H}^s$ 在 $F$ 上的限制, 即 $\mu(A)=\mathcal{H}^s(F\bigcap A)$: 如果

$$F_1=\{x\in F:\overline{D}^s(F,x)=\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{\mathcal{H}^s(F\bigcap B(x,r))}{(2r)^s}<2^{-s}c\}$$

则由命题 4.9(a) 立即得出: $\mathcal{H}^s(F_1)\geqslant\mathcal{H}^s(F)/c\geqslant\mathcal{H}^s(F_1)/c$. 如果 $0<c<1$, 则只有 $\mathcal{H}^s(F_1)=0$ 才是可能的; 于是对几乎所有的 $x\in F$, 有 $\overline{D}^s(F,x)\geqslant 2^{-s}$. 应用同样的方法, 上界可以由命题 4.9(b) 得到. □

注意, 从命题 5.1(b) 能立即得到的结论是: 不规则集几乎处处有严格小于 1 的下密度.

有时将需要把一个集的密度与某些子集的密度联系在一起. 设 $F$ 是一个 $s$ 集, $E$ 是 $F$ 的一个博雷尔子集, 那么

$$\frac{\mathcal{H}^s(F\bigcap B(x,r))}{(2r)^s}=\frac{\mathcal{H}^s(E\bigcap B(x,r))}{(2r)^s}+\frac{\mathcal{H}^s((F\backslash E)\bigcap B(x,r))}{(2r)^s}.$$

对 $E$ 中几乎所有的点 $x$, 由命题 5.1 (a), 当 $r\to\infty$ 时

$$\frac{\mathcal{H}^s((F\backslash E)\bigcap B(x,r))}{(2r)^s}\to 0.$$

所以令 $r\to 0$, 得到

$$\underline{D}^s(F,x)=\underline{D}^s(E,x);\quad \overline{D}^s(F,x)=\overline{D}^s(E,x) \tag{5.4}$$

对于 $E$ 中的 $\mathcal{H}^s$ 几乎所有的 $x$ 成立. 于是, 由规则性的定义, 如果 $E$ 是 $s$ 集 $F$ 的子集, 且 $\mathcal{H}^s(E)>0$, 那么如果 $F$ 是规则的, 则 $E$ 也是规则的; 如果 $F$ 是不规则的,

则 $E$ 也是不规则的. 特别地, 一个规则集与一个不规则集的交集既是规则的, 又是不规则的, 因此测度为 0.

对于下密度的估计总是很难得到的, 这里不打算对此讨论.

一般来说, 要证明一个非整数维的 $s$ 集是不规则的是相当困难的, 但是当 $0 < s < 1$ 时, 下面的 "圆环" 法证明是相当吸引人的.

**定理 5.2** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的 $s$ 集, 那么 $F$ 是不规则的, 除非 $s$ 是一个整数.

**部分证明** 如果 $0 < s < 1$, 通过证明在 $F$ 上几乎所有的点, 密度 $D^s(F,x)$ 不存在, 而推出 $F$ 是不规则的. 假设相反, 那么存在一个有正测度的集 $F_1 \subset F$, 且在其上密度存在, 因此由命题 5.1(b), 可知 $(1/2) < 2^s \leqslant D^s(F,x)$, 由 Egoroff 定理 (见 1.3 节), 能找到 $r_0 > 0$, 和博雷尔集 $E \subset F_1 \subset F$, 满足 $\mathcal{H}^s(E) > 0$ 使得

$$\mathcal{H}^s(F \cap B(x,r)) > \frac{1}{2}(2r)^s \tag{5.5}$$

对所有的 $x \in E$ 和 $r < r_0$ 成立. 设 $y \in E$ 是 $E$ 的聚点 (也就是 $y$ 可以与 $E$ 中的另一些点任意接近), 设 $\eta$ 是一个满足 $0 < \eta < 1$ 的数, 并设 $A_{r,\eta}$ 是环 $B(y, r(1+\eta)) \setminus B(y, r(1-\eta))$(见图 5.2). 那么当 $r \to 0$ 时

$$\begin{aligned}(2r)^{-s}\mathcal{H}^s(F \cap A_{r,\eta}) &= (2r)^{-s}\mathcal{H}^s(F \cap B(y, r(1+\eta))) \\ &\quad - (2r)^{-s}\mathcal{H}^s(F \cap B(y, r(1-\eta))) \\ &\quad \to D^s(F,y)((1+\eta)^s - (1-\eta)^s).\end{aligned} \tag{5.6}$$

对于趋于 0 的 $r$ 的序列, 可以找到满足 $|x-y| = r$ 的 $E$ 中的 $x$. 于是 $B\left(x, \frac{1}{2}r\eta\right) \subset A_{r,\eta}$, 所以由式 (5.5) 知

$$\frac{1}{2}r^s\eta^s < \mathcal{H}^s\left(F \cap B\left(x, \frac{1}{2}r\eta\right)\right) \leqslant \mathcal{H}^s(F \cap A_{r,\eta}).$$

结合式 (5.6), 意味着

$$\begin{aligned}2^{-s-1}\eta^s &\leqslant D^s(F,y)((1+\eta)^s - (1-\eta)^s) \\ &= D^s(F,y)\left(2s\eta + \eta^2\text{或更高阶的}\right).\end{aligned}$$

令 $\eta \to 0$, 易见当 $0 < s < 1$ 时, 这是不可能的, 这矛盾表明定理的结论成立. □

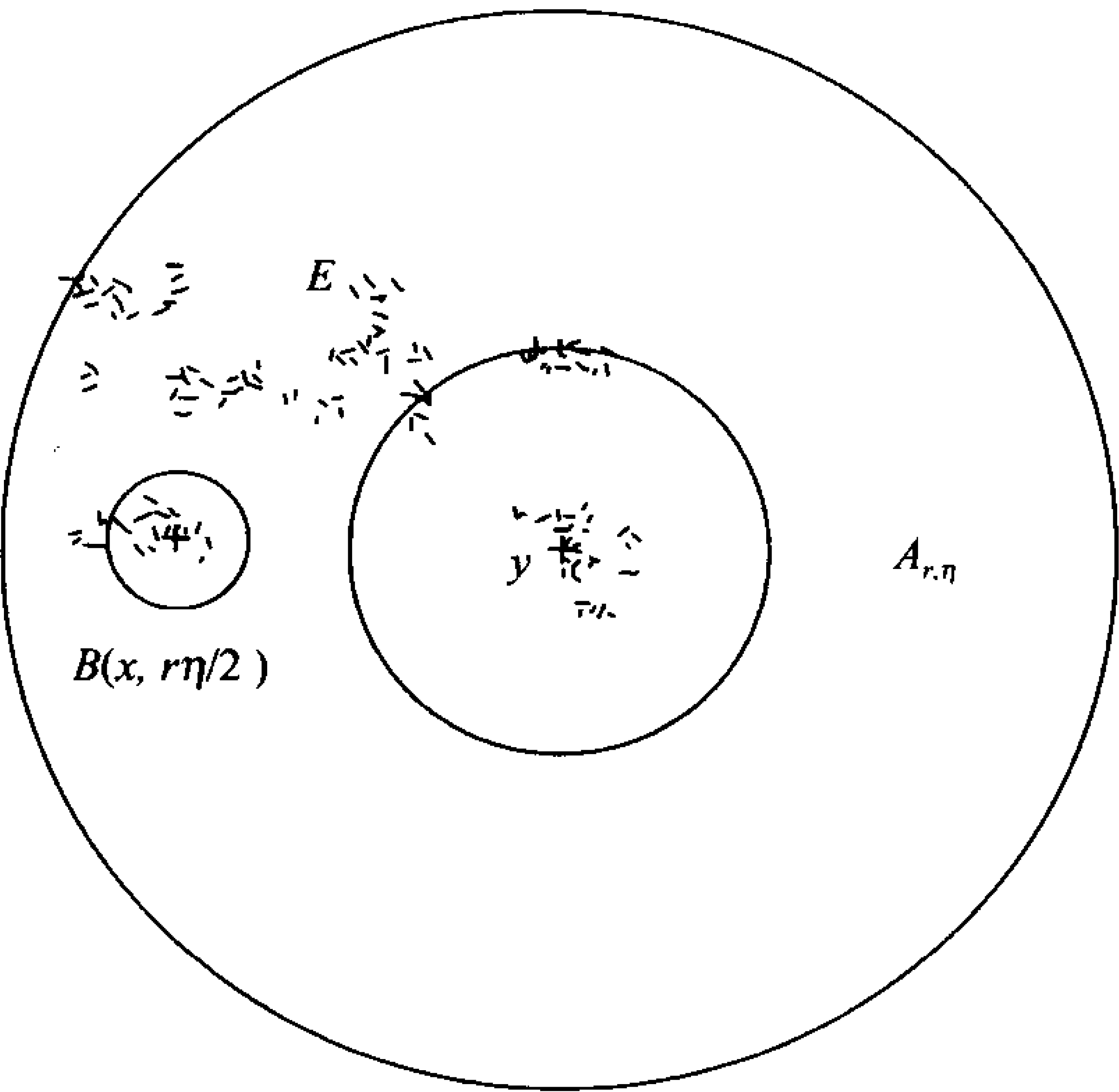



图 5.2　定理 5.2 的 "圆环" 法证明

## 5.2　1 集的结构

正如前面已经指出的那样, 非整数维的集一定是不规则的. 对于整数维的集, 情况更复杂. 下面的分解定理, 如图 5.3 所示, 可以把 1 集分解成规则的部分与不规则的部分, 因此可以分别进行分析, 并且在不影响密度性质的前提下, 再把它们结合在一起.

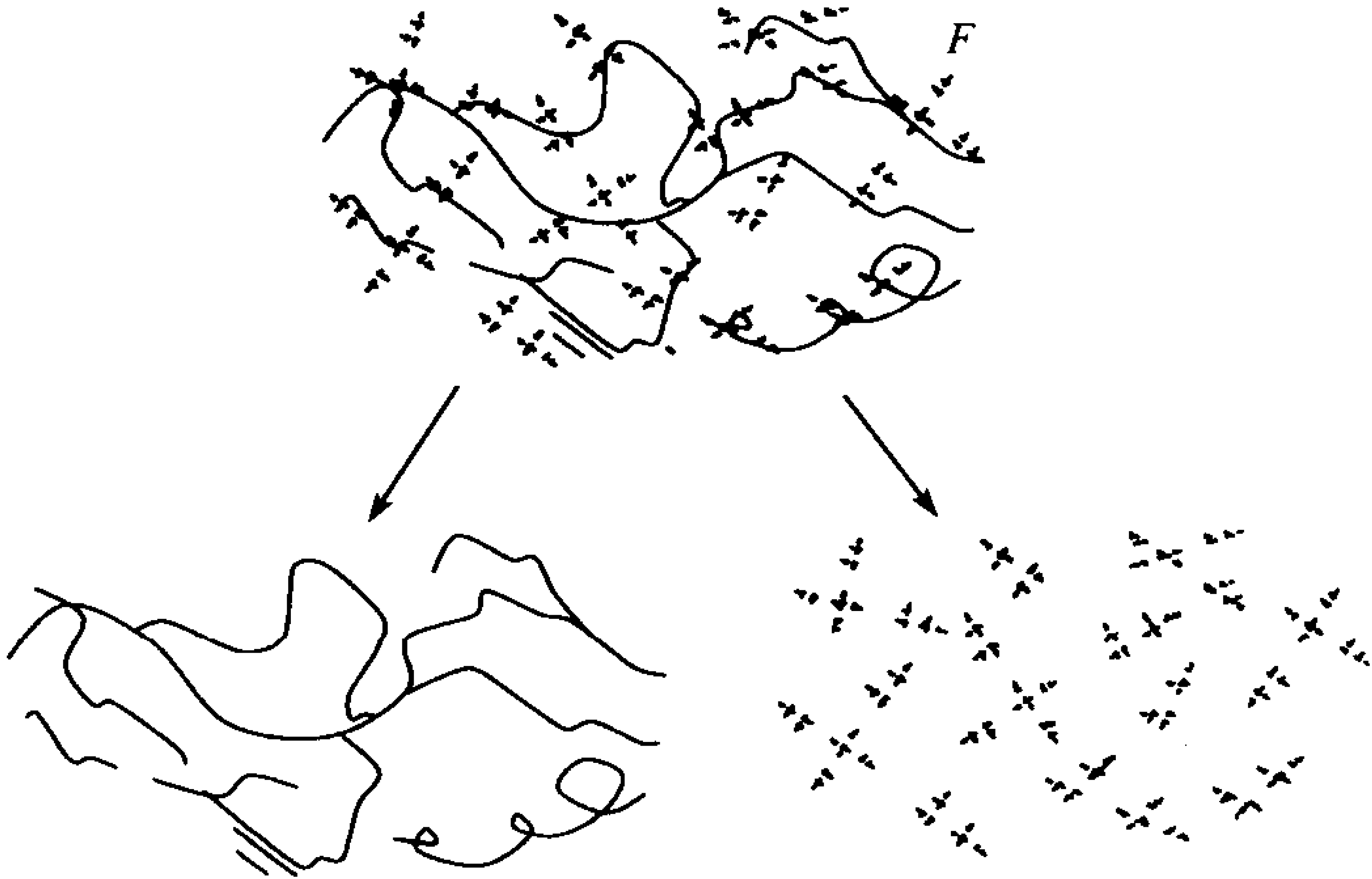



图 5.3　1 集的分解变成一个规则的 "似曲线的" 部分和一个不规则的 "非曲线的" 部分

**分解定理 5.3** 设 $F$ 是 1 集, $F$ 的规则点集构成规则集, 不规则点集构成不规则集.

**证明** 在式 (5.4) 中, 分别取 $E$ 为规则点与不规则点所组成的集合, 即得结论. □

规则和不规则 1 集的例子是很丰富的, 光滑曲线是规则的, 并且包含了一些经典几何中的图形, 像圆周和椭圆周等. 另一方面, 图 0.4 的迭代构造给出了一个不规则的 1 集, 它是一个全不连通的分形; 这是典型的, 如同将要见到的一样, 规则 1 集是由一些曲线的部分构成的, 而不规则 1 集是 "似尘的" 和 "非曲线的 (curve-free)", 也就是与任何 (有限长度的) 曲线的交都是零长度.

为了研究 1 集, 需要一些关于曲线的知识. 为了这个目的, 一条曲线或称若尔当曲线$C$ 是连续双射 (一一对应的函数) $\psi:[a,b]\to\mathbf{R}^2$ 的像, 这里 $[a,b]\subset\mathbf{R}$ 是真正的闭区间. 根据定义, 曲线是不自交的, 它有两个端点, 并且是平面上的紧连通子集. 曲线 $C$ 的长度 $\mathcal{L}(C)$ 由折线逼近得到

$$\mathcal{L}(C)=\sup\sum_{i=1}^{m}|x_i-x_{i-1}|$$

这里的上确界是对延着曲线按次序任取 $x_0,x_1,\cdots x_m$ 所得到的所有折线而取的. 如果长度 $\mathcal{L}(C)$ 是正的且是有限的, 则称 $C$ 是可求长曲线.

正如所期待的, 曲线的长度就等于它的 1 维豪斯多夫测度.

**引理 5.4** 如果 $C$ 是可求长曲线, 那么 $\mathcal{H}^1(C)=\mathcal{L}(C)$.

**证明** 对于 $x,y\in C$, 用 $C_{x,y}$ 表示 $C$ 介于 $x,y$ 之间的部分. 因为到通过 $x,y$ 的直线的垂直映射并不增加距离, 式 (2.9) 给出 $\mathcal{H}^1(C_{x,y})\geqslant\mathcal{H}^1([x,y])=|x-y|$, 这里 $[x,y]$ 是连接 $x$ 和 $y$ 的直线段. 因此对于 $C$ 的任何部分 $x_0,x_1,\cdots x_m$,

$$\sum_{i=1}^{m}|x_i-x_{i-1}|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\mathcal{H}^1(C_{x_i,x_{i-1}})\leqslant\mathcal{H}^1(C))$$

所以 $\mathcal{L}(C)\leqslant\mathcal{H}^1(C)$. 另一方面, 设 $f:[0,\mathcal{L}(C)]\to C$ 是一个映射, 它把 $t$ 映射到与 $C$ 的一个端点沿曲线的距离正好等于 $t$ 的 $C$ 上的一个点, 显然对 $0\leqslant t,u\leqslant\mathcal{L}(C)$ 有,

$$|f(t)-f(u)|\leqslant|t-u|,$$

即 $f$ 是利普希茨函数, 所以由式 (2.9) 可知, $\mathcal{H}^1(C)\leqslant\mathcal{H}^1(0,\mathcal{L}(C))=\mathcal{L}(C)$, 引理得证. □

证明可求长曲线是规则的则是比较简单的.

**引理 5.5** 可求长曲线是规则的 1 集.

**证明**　如果 $C$ 是可求长的, $\mathcal{L}(C)<\infty$, 由 $C$ 有不同的端点 $p$ 和 $q$, 可知 $\mathcal{L}(C)\geqslant|p-q|>0$, 由引理 5.4, $0<\mathcal{H}^1(C)<\infty$, 所以 $C$ 是 1 集.

$x$ 是 $C$ 的内点, 它把 $C$ 分成两部分 $C_{p,x}$ 和 $C_{q,x}$. 如果 $r$ 充分小, 于是从 $x$ 开始沿着 $C_{q,x}$ 向前延伸, 到达 $C$ 上的第一个使 $|x-y|=r$ 的点 $y$, 那么 $C_{x,y}\subset B(x,r)$ 并且还有,

$$r=|x-y|\leqslant\mathcal{L}(C_{x,y})=\mathcal{H}^1(C_{x,y})\leqslant\mathcal{H}^1(C_{x,q}\bigcap B(x,r)).$$

类似地, $r\leqslant\mathcal{H}^1(C_{p,x}\bigcap B(x,r))$, 与上式相加, 可得当 $r$ 充分小时, $2r\leqslant\mathcal{H}^1(C\bigcap B(x,r))$. 于是

$$\underline{D}^1(C,x)=\varliminf_{r\to0}\frac{\mathcal{H}^1(C\bigcap B(x,r))}{2r}\geqslant1,$$

由命题 5.1(b), $\underline{D}^1(C,x)\leqslant\overline{D}^1(C,x)\leqslant1$, 因此, 对除去两个端点的所有 $x\in C$, $D^1(C,x)$ 存在并且等于 1, 所以 $C$ 是规则的. □

其他的规则集是很容易构造的. 由式 (5.4), 规则集的子集及规则集的并也应该是规则的. 知道了这些, 就可以定义, 如果一个 1 集是包含在可数个可求长曲线的并之中的, 则称它为*似曲线集*.

**命题 5.6**　*一个似曲线 1 集是规则 1 集.*

**证明**　如果 $F$ 是似曲线的 1 集, 那么 $F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$, 这里 $C_i$ 是可求长曲线. 对任意 $i$ 和 $\mathcal{H}^1$ 几乎所有的 $x\in F\bigcap C_i$, 利用引理 5.5 和式 (5.4), 就有

$$1=\underline{D}^1(C_i,x)=\underline{D}^1(F\bigcap C_i,x)\leqslant\underline{D}^1(F,x),$$

因此对几乎所有的 $x\in F$ 有 $1\leqslant\underline{D}^1(F,x)$. 但对于几乎所有的 $x\in F$, 由命题 5.1 又有 $\underline{D}^1(F,x)\leqslant\overline{D}^1(F,x)\leqslant1$, 所以 $D^1(F,x)=1$ 对几乎所有的 $x$ 成立, 即知 $F$ 是规则集. □

很自然地引进一个补充定义: 称与任一可求长曲线的交都有零 $\mathcal{H}^1$ 测度的 1 集为*非曲线的*.

**命题 5.7**　*一个不规则 1 集是非曲线的.*

**证明**　如果 $F$ 是不规则的, $C$ 是可求长的, 那么 $F\bigcap C$ 同时是规则集和不规则集的子集, 所以有零 $\mathcal{H}^1$ 测度.

这两个命题已经蕴含着规则集和不规则集可以分别用似曲线的和非曲线的来特征化. 事实的确如此, 但这不是很容易证明的. 这个问题的关键是下面的下密度估计, 它取决于对曲线和连通集的性质的深入研究和一些巧妙的几何论证.

**命题 5.8**　*设 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的非曲线 1 集, 那么对几乎所有的 $x\in F$ 有*

$$\underline{D}^1(F,x)\leqslant3/4$$

**证明** 略. □

有了这个命题, 就可以相对比较容易地分别给出规则集和不规则集的完整刻划.

**定理 5.9** (a) $\mathbf{R}^2$ 上的 1 集是不规则的, 当且仅当它是非曲线的.

(b) $\mathbf{R}^2$ 上的 1 集是规则的, 当且仅当它是一个似曲线的集与一个 $\mathcal{H}^1$ 测度为零的集的并.

**证明** (a) 由命题 5.8 知, 一个非曲线集一定是不规则的. 命题 5.7 给出了相应的逆命题.

(b) 由命题 5.6, 一个似曲线集是规则的, 加进一个零测度的集并不影响密度, 因此也不影响规则性.

如果 $F$ 是规则的, 那么它的任何一个具有正测度的博雷尔子集 $E$ 也是规则的, 且对几乎所有的 $x \in E, \underline{D}^1(E,x) = 1$. 由命题 5.8, 集 $E$ 不能是非曲线的, 所以一些可求长曲线与 $E$ 的交集具有正长度. 利用这个事实, 用归纳法逐步定义一系列可求长曲线 $\{C_i\}$. 首先选择 $C_1$ 去覆盖 $F$ 的相当大的部分, 比如说使

$$\mathcal{H}^1(F \bigcap C_1) \geqslant \frac{1}{2}\sup\left\{\mathcal{H}^1(F \bigcap C) : C\text{是可求长的}\right\} > 0.$$

假如 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 已经选择好了, 并且 $F_k = F \backslash \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ 有正的测度, 设 $C_{k+1}$ 是满足条件

$$\mathcal{H}^1(F_k \bigcap C_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2}\sup\left\{\mathcal{H}^1(F_k \bigcap C) : C\text{是可求长的}\right\} > 0 \tag{5.7}$$

的可求长曲线, 假如这个过程在某个 $k$ 终止了, 那么曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 覆盖了几乎所有的 $F$, 而且 $F$ 是似曲线, 否则

$$\infty > \mathcal{H}^1(F) \geqslant \sum_k \mathcal{H}^1(F_k \bigcap C_{k+1}).$$

因为 $F_k \bigcap C_{k+1}$ 是不交的, 所以当 $k \to \infty$ 时, $\mathcal{H}^1(F_k \bigcap C_{k+1}) \to 0$. 如果 $\mathcal{H}^1\left(F \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) > 0$, 那么存在一个可求长曲线 $C$ 使得对某个 $d > 0$, $\mathcal{H}^1\left(\left(F \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \bigcap C\right) = d$, 但是 $\mathcal{H}^1(F_k \bigcap C_{k+1}) < d/2$ 对某个 $k$ 成立, 所以, 根据式 (5.7), $C$ 应已在 $C_{k+1}$ 之前被选择了. 因此 $\mathcal{H}^1\left(F \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = 0$, 于是 $F$ 包含似曲线集 $F \bigcap \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, 还有 $F \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, 这是一个零测集. □

于是规则 1 集本质上是可求长曲线的子集的并集, 但不规则 1 集根本不包含任何可求长曲线. 这个二分法的惊人之处在于规则性完全是由密度来定义的, 并没有参照曲线. 命题 5.6 和命题 5.8 提供了进一步的对比. 几乎处处, 规则集的下密度为

1, 而不规则集的下密度最大为 3/4. 这样, 在任何 1 集 $F$ 中, 使 $3/4 < \underline{D}^1(F,x) < 1$ 的点 $x$ 构成的集有零测度.

规则 1 集可能是连通的, 但像维数小于 1 的集一样, 不规则 1 集一定是全不连通的. 至少已经知道, 在不规则集中, 两个不同的点不能用可求长曲线来连接, 并且进一步的研究表明: 不规则集中也没有两个点能位于同一个连通的部分之中.

规则集与不规则集的进一步的差别还有切线的存在性 (见 5.3 节) 和投影性质 (见第 6 章); 在所有这些方面, 规则 1 集与不规则 1 集都是大相径庭的. 对于 1 集这个特殊的情形, 把不规则集定义为分形是很有数学意义的.

## 5.3 $s$ 集的切线

假设一个光滑曲线 $C$ 在点 $x$ 有切线 (在经典的意义下), 这意味着在接近点 $x$ 时, 集 $C$ 正好沿相反的两个方趋向 $x$. 关于 $s$ 集典型点上的方向分布, 我们能说些什么呢? 对于 $s$ 集定义切线有意义吗? 而且什么时候这样的曲线确实存在呢?

任何推广的切线定义都应该反映具有正测度的集的局部方向分布, 对已考虑过的很复杂的集, 不可能要求对所有的邻近点成立, 只要对几乎所有的点成立, 就令人满意了. 称 $\mathbf{R}^n$ 中的 $s$ 集 $F$ 在$x$ 点有方向$\boldsymbol{\theta}$($\boldsymbol{\theta}$ 是一单位向量)上的切线, 如果

$$\overline{D}^s(F,x) > 0 \tag{5.8}$$

并且, 对每个角 $\varphi > 0$,

$$\lim_{r\to 0} r^{-s}\mathcal{H}^s(F\bigcap(B(x,r)\backslash S(x,\boldsymbol{\theta},\varphi))) = 0 \tag{5.9}$$

这里 $S(x,\boldsymbol{\theta},\varphi)$ 是顶点在 $x$, 包含使得线段 $[x,y]$ 与 $\boldsymbol{\theta}$ 或 $-\boldsymbol{\theta}$ 最大成 $\varphi$ 角的那些 $y$ 构成的双锥体(见图 5.4). 这样, 对于在 $\boldsymbol{\theta}$ 方向的切线, 式 (5.8) 要求有 $F$ 的一段有效部分接近点 $x$, 而由式 (5.9), $F$ 在任何双锥体 $S(x,\boldsymbol{\theta},\varphi)$ 外的接近点 $x$ 的部分都是可以忽略的 (见图 5.5).

下面先讨论平面上规则 1 集的切线, 这是一种与曲线的经典微积分相差不远的情形.

**命题 5.10** 可求长曲线 $C$, 在几乎所有点上都有切线.

**证明** 由引理 5.5, 上密度 $\overline{D}^1(C,x) = 1 > 0$ 对几乎所有的 $x \in C$ 成立. 可以用弧的长度作为参数来重新定义 $C$ 的函数 $\psi : [0,\mathcal{L}(C)] \to \mathbf{R}^2$, 给出的 $\psi(t)$ 是从 $C$ 的端点 $\psi(0)$ 出发, 沿着 $C$ 的与 $\psi(0)$ 距离为 $t$ 的点. $\mathcal{L}(C) < \infty$ 意味着 $\psi$ 有有界的变差, 也就是说 $\sup\sum_{i=1}^m |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| < \infty$, 这里上确界是对所有的分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \mathcal{L}(C)$ 取的. 引用函数论中的一个熟知的结论, 即

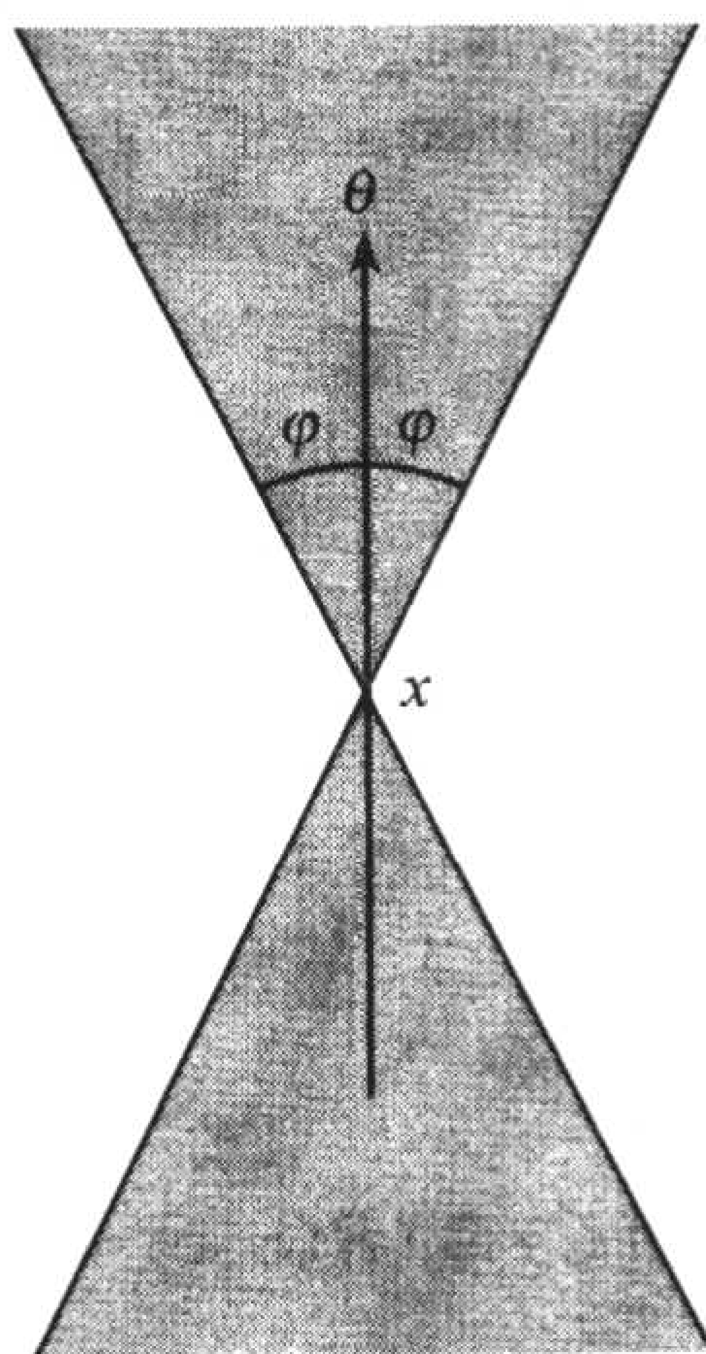



图 5.4 双锥体 $S(x,\boldsymbol{\theta},\varphi)$

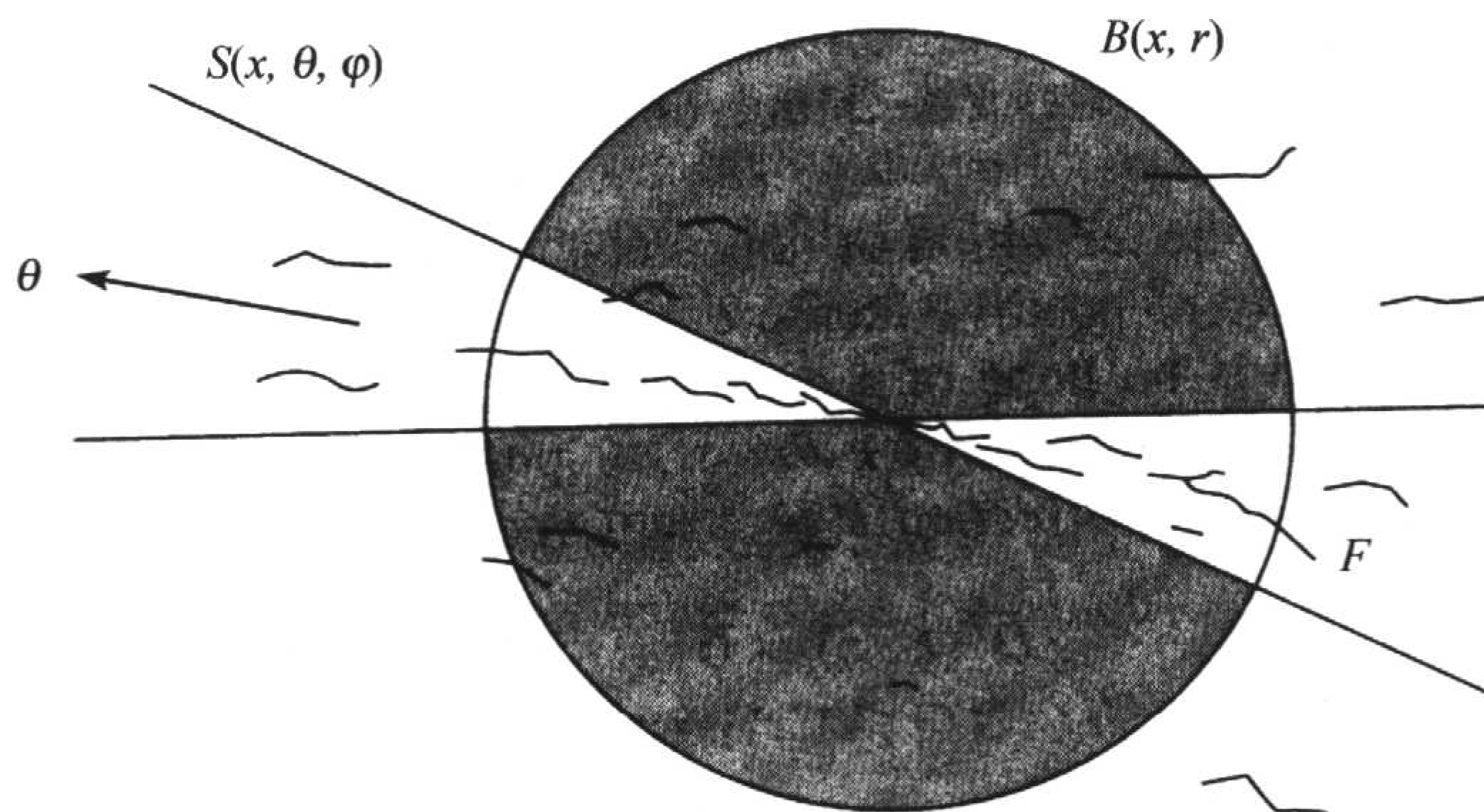



图 5.5 $F$ 在点 $x$ 有方向为 $\boldsymbol{\theta}$ 的切线, 则对于很小的 $r$, 在 $B(x,r)\backslash S(x,\boldsymbol{\theta},\varphi)$ (阴影部分) 上 $F$ 的部分是可以忽略的

有界变差函数是几乎处处可微的, 所以对几乎所有的 $t$, $\psi'(t)$ 做为一个向量是存在的. 由于是以弧长来参数化, 对这样的 $t$, $|\psi'(t)| = 1$. 在 $C$ 上的几乎所有点 $\psi(t)$, 存在单位向量 $\boldsymbol{\theta}$ 使得 $\lim_{u\to t}(\psi(u) - \psi(t))/(u-t) = \boldsymbol{\theta}$. 这样, 给定 $\varphi > 0$, 存在数 $\varepsilon > 0$ 使得当 $|u-t| < \varepsilon$ 时, $\psi(u) \in S(\psi(t), \boldsymbol{\theta}, \varphi)$. 因为 $C$ 没有二重点, 可以找到 $r$ 使得, 当 $|u-t| \geqslant \varepsilon$ 时, $\psi(u) \notin B(\psi(t), r)$, 所以 $C \bigcap B(\psi(t), r) \backslash S(\psi(t), \boldsymbol{\theta}, \varphi)$ 是空集. 由式 (5.8) 和式 (5.9) 的定义, 曲线 $C$ 在 $\psi(t)$ 有切线, 这样的点包括了 $C$ 上的几乎所有点. □

就像密度一样, 可以把切线性质从曲线平行地推广到似曲线集上.

**命题 5.11**　$\mathbf{R}^2$ 的规则 1 集在几乎所有点都有切线.

**证明**　由规则性的定义, 对几乎所有的点 $x \in F$ 有 $\overline{D}^1(F,x) = 1 > 0$.

如果 $C$ 是任何可求长曲线, 由命题 5.10, 对 $C$ 上几乎所有的点存在 $\boldsymbol{\theta}$, 使得当 $\varphi > 0$ 时有

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0} r^{-1}\mathcal{H}^1\left(\left(F\bigcap C\right)\bigcap\left(B(x,r)\backslash S\left(x,\boldsymbol{\theta},\varphi\right)\right)\right)\\ \leqslant &\lim_{r\to 0} r^{-1}\mathcal{H}^1\left(\left(C\bigcap B(x,r)\backslash S\left(x,\boldsymbol{\theta},\varphi\right)\right)\right) = 0.\end{aligned}$$

此外, 由性质 5.1(a), 对几乎所有的 $x \in C$ 有

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0} r^{-1}\mathcal{H}^1\left(\left(F\backslash C\right)\bigcap\left(B(x,r)\backslash S\left(x,\boldsymbol{\theta},\varphi\right)\right)\right)\\ \leqslant &\lim_{r\to 0} r^{-1}\mathcal{H}^1\left(\left(F\backslash C\right)\bigcap B(x,r)\right) = 0.\end{aligned}$$

把上两式加起来可知, 对几乎所有的 $x \in C$, 因此对几乎所有的 $x \in F\bigcap C$ 有

$$\lim_{r\to 0} r^{-1}\mathcal{H}^1\left(F\bigcap\left(B(x,r)\backslash S\left(x,\boldsymbol{\theta},\varphi\right)\right)\right) = 0$$

因为这种曲线的可数并覆盖 $F$ 的几乎所有点, 所以命题成立. □

与规则集相反, 不规则 1 集一般不存在切线.

**命题 5.12**　在不规则 1 集的几乎所有点, 没有切线存在.

**证明**　这个证明依赖于不规则集作为非曲线集的特性, 证明过程太复杂了, 所以只好把它略去. □

现在转而研究 $\mathbf{R}^2$ 上非整数维的 $s$ 集, 同前面已经看到的一样, 它不一定是规则的. 对于 $0 < s < 1$, 我们对切线问题没有特别的兴趣, 因为任何包含在光滑曲线中的集将自动满足式 (5.9), 且以 $\boldsymbol{\theta}$ 为曲线在点 $x$ 的切线方向. 例如, 做为平面的子集的三分康托尔集 $F$, 是 $s = \ln 2/\ln 3$ 的 $s$ 集, 且对 $\varphi > 0$, $F$ 中的所有 $x$ 满足式 (5.8) 和式 (5.9), 这里 $\boldsymbol{\theta}$ 是方向沿着集合的向量. 另一方面, 如果 $F$ 是两个均匀康托尔集的笛卡儿乘积, 每个均匀康托尔集都是由反复从区间的中间去掉长度为 $a > 1/2$ 的一部分而得到的, 那么通过稍许计算 (见第 7 章) 可知 $F$ 是一个维数 $s = 2\ln 2/\ln\left(2/\left(1-a\right)\right) < 1$ 的 $s$ 集, 在它的任何点上都没有切线.

对于 $\mathbf{R}^2$ 上满足 $1 < s < 2$ 的 $s$ 集, 它没有切线至少看来是合理的, 因为这样的集太大了, 以至在每个方向上都呈现辐射状分布. 对此, 式 (5.9) 不能成立, 这在下面的命题中得到了严格的证明.

**命题 5.13**　如果 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的 $s$ 集, 其中 $1 < s < 2$, 那么 $F$ 上的几乎所有点都没有切线存在.

**证明**　对于 $r_0 > 0$, 令

$$E = \left\{y \in F : \mathcal{H}^s\left(F\bigcap B(y,r)\right) < 2\left(2r\right)^s \text{对任意的} r < r_0 \text{成立}\right\}. \tag{5.10}$$

对于任意 $x \in E$, 任意单位向量 $\boldsymbol{\theta}$ 和满足 $0 < \varphi < \pi/2$ 的角 $\varphi$, 下面先估计有多少 $E$ 的部分在 $B(x,r)\bigcap S(x,\boldsymbol{\theta},\varphi)$ 内. 对于 $r < r_0/20$ 和 $i = 1,2,\cdots$, 设 $A_i$ 是由下式给出的环与双扇面的交

$$A_i = (B(x,ir\varphi)\backslash B(x,(i-1)r\varphi))\bigcap S(x,\boldsymbol{\theta},\varphi),$$

那么对 $m < 2/\varphi$ 的整数 $m$ 有, $B(x,r)\bigcap S(x,\boldsymbol{\theta},\varphi) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i \bigcup \{x\}$. 每个 $A_i$ 都包含两部分, 而每部分的直径最大为 $10r\varphi < r_0$, 所以应用式 (5.10) 到包含 $E$ 中的点的那些部分上, 然后相加得:

$$\mathcal{H}^s(E\bigcap B(x,r)\bigcap S(x,\boldsymbol{\theta},\varphi)) \leqslant 2m2(20r\varphi)^s \leqslant \left(4\varphi^{-1}\right)2(20r\varphi)^s,$$

所以, 如果 $r < r_0/20$, 则

$$(2r)^{-s}\mathcal{H}^s(E\bigcap B(x,r)\bigcap S(x,\boldsymbol{\theta},\varphi)) \leqslant 8.10^s\varphi^{s-1} \tag{5.11}$$

现在, 由命题 5.1(a) 知, 几乎所有的 $x \in E$, 满足 $\overline{D}^1(F\backslash E,x) = 0$. 分解 $F\bigcap B(x,r)$ 成三部分, 可以得到

$$\mathcal{H}^s(F\bigcap B(x,r)) = \mathcal{H}^s\big((F\backslash E)\bigcap(B(x,r)) + \mathcal{H}^s(E\bigcap B(x,r)\bigcap S(x,\boldsymbol{\theta},\varphi)).$$

$$+\mathcal{H}^s(E\bigcap B(x,r)\backslash S(x,\boldsymbol{\theta},\varphi))\big).$$

上式两边同除以 $(2r)^s$, 然后在 $r \to 0$ 时取上极限, 应用式 (5.11), 对几乎所有的 $x \in E$ 有

$$\overline{D}^s(F,x) \leqslant 0 + 8.10^s\varphi^{s-1} + \overline{\lim_{r\to 0}}(2r)^{-s}\mathcal{H}^s(F\bigcap(B(x,r)\backslash S(x,\theta,\varphi))).$$

选择 $\varphi$ 充分小, 可见对任何 $\theta$ 式 (5.8) 和式 (5.9) 不会同时成立, 所以在点 $x$ 不存在切线. 为了完成证明, 我们注意到, 由命题 5.1(b), 对某个 $r_0 > 0$, 几乎所有的 $x \in F$, $x$ 都属于由 (5.10) 定义的 $E$. □

这一章的结论首先给作为 $s$ 集的分形提供了一个局部的描述. 通过进一步使用这种方法, 可能得到密度的更精确的估计, 以及关于在典型点上 $s$ 集的方向分布的估计. 例如, 可以证明, 当 $s > 1$ 时, 经过 $s$ 集 $F$ 的 $\mathcal{H}^s$ 几乎所有的点, 几乎所有的直线与 $F$ 的交集是 $s-1$ 维的.

最近, 填充测度 (见 3.4 节) 已被用来研究局部性质, 而且已经证明: 一个集的规则性近乎对应于填充测度与 (稍做改动的) 豪斯多夫测度的等价性.

再做些努力, 上面的思想可以推广到更高维的情形. $\mathbf{R}^n$ 中的规则 $s$ 集可以用密度来定义, 同样, $s$ 集只有当 $s$ 是整数时才可能是规则的. 规则的 $s$ 集几乎所有点都有切线, 并且在除去一个 $\mathcal{H}^s$ 测度为零的子集的意义下是 "$s$ 维似曲面的", 它们可以用可数个 $\mathbf{R}^s$ 中的子集的利普希茨映射的并来覆盖.

## 5.4 注记和参考文献

这一章只涉及了深奥的领域 —— 几何测度论的一点皮毛. 文献中有奠基性的文章 Besicovitch(1928,1938) 的原文, 此文章包含了对平面上的 1 集的引人注目的完整分析. 平面上非整数维的 $s$ 集的结果归功于 Marstrand(1954a). 以后的一些学者们把这些工作推广到了高维空间的子集上; 尤其是 Priess(1987) 使这一工作达到了顶峰, Priess 解决了很多著名的问题. 有关平面上规则集和不规则集的更详尽的讨论也可以在 Falconer(1985a) 中找到, 或见 Mattila(1995) 和 Federer(1969). 利用现代的方法运用*切线测度*是由 Preiss(1987) 引进的, 在 Mattila(1995) 和 Falconer(1997) 中有介绍. 大家都相信命题 5.8 中的 "3/4" 可以用 "1/2" 取代; 这方面内容的很多情形, 在 Farag(2002) 中都有讨论, 而 Preiss and Tiser(1992) 得到了一般情况下, 这个值等于 $(2+\sqrt{46})/12=0.732\ldots$的结果.

### 练　习

**5.1** 通过在 $s=n=2$ 时应用命题 5.1, 推导勒贝格密度定理 (5.1).

**5.2** 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续且可微的函数, 对任意 $x$, 还满足 $0<c_1\leqslant f'(x)\leqslant c_2$. 证明: 如果 $F$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 $s$ 集, 那么 $\underline{D}^s(f(F),f(x))=\underline{D}^s(F,x)$ 对 $\mathbf{R}$ 上的所有 $x$ 成立, 并且对于上密度也有类似的结果.

**5.3** 设 $F$ 是三分康托尔集, 证明 $\underline{D}^s(F,x)\leqslant 2^{-s}$ 对所有 $x$ 成立, 这里 $s=\ln 2/\ln 3$. 由此推出 $F$ 是不规则的.

**5.4** 估计由图 0.4 给出的 1 集上点的上、下密度, 并且说明它是不规则的.

**5.5** 应用定理 5.2 的证明, 说明: 如果 $F$ 是 $s$ 集, $0<s<1$, 那么对几乎所有的 $x$, 有 $\underline{D}^s(F,x)\leqslant\left(1+2^{s/(s-1)}\right)^{s-1}$.

**5.6** 构造一个全不连通的规则 1 集 (提示: 由可求长曲线开始).

**5.7** 设 $E$ 和 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的 $s$ 集, 且对每个圆盘 $B(x,r)$, 有 $\mathcal{H}^s(B(x,r)\bigcap E)\leqslant\mathcal{H}^s(B(x,r)\bigcap F)$, 证明: $\mathcal{H}^s(E\backslash F)=0$. 这里是否需要条件 $E\subset F$?

**5.8** 设 $F_1,F_2,\cdots$ 是平面上的 1 集且 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$ 也是 1 集, 证明: 如果对所有的 $k$, $F_k$ 是规则的, 则 $F$ 也是规则的; 如果对所有 $k$, $F_k$ 是不规则的, 则 $F$ 也是不规则的.

**5.9** 证明: 如果 $E$ 是规则的 1 集, $F$ 是非规则的 1 集, 那么 $\mathcal{H}^1(E\bigcap F)=0$.

# 第 6 章　分形的射影

本章研究 $\mathbf{R}^n$ 中的分形到低维子空间的正交射影, 或称 "影子". $\mathbf{R}^3$ 中的一条光滑 (1 维的) 曲线在平面上的影子一般是一条 (1 维的) 曲线, 但一个 (2 维的) 曲面或 (3 维的) 立方体却一般有 2 维的影子, 如图 6.1 上部所示. 相应地, 也可以对分形验证类似的结果. 直观地说, 可以期望 $\mathbf{R}^3$ 中的集 $F$, 当 $\dim_{\mathrm{H}} F > 2$ 时, 它有 2 维的平面影子; 而当 $\dim_{\mathrm{H}} F < 2$ 时, 其平面影子的维数即为 $\dim_{\mathrm{H}} F$, 如图 6.1 下部所示. 粗看起来, 这是正确的; 但要做更细致的工作才能够得到关于分形射影性质的精确公式.

首先在最简单的情形下证明射影定理, 即平面中的点集到直线的射影这情形, 然后阐述高维情形的类似结果.

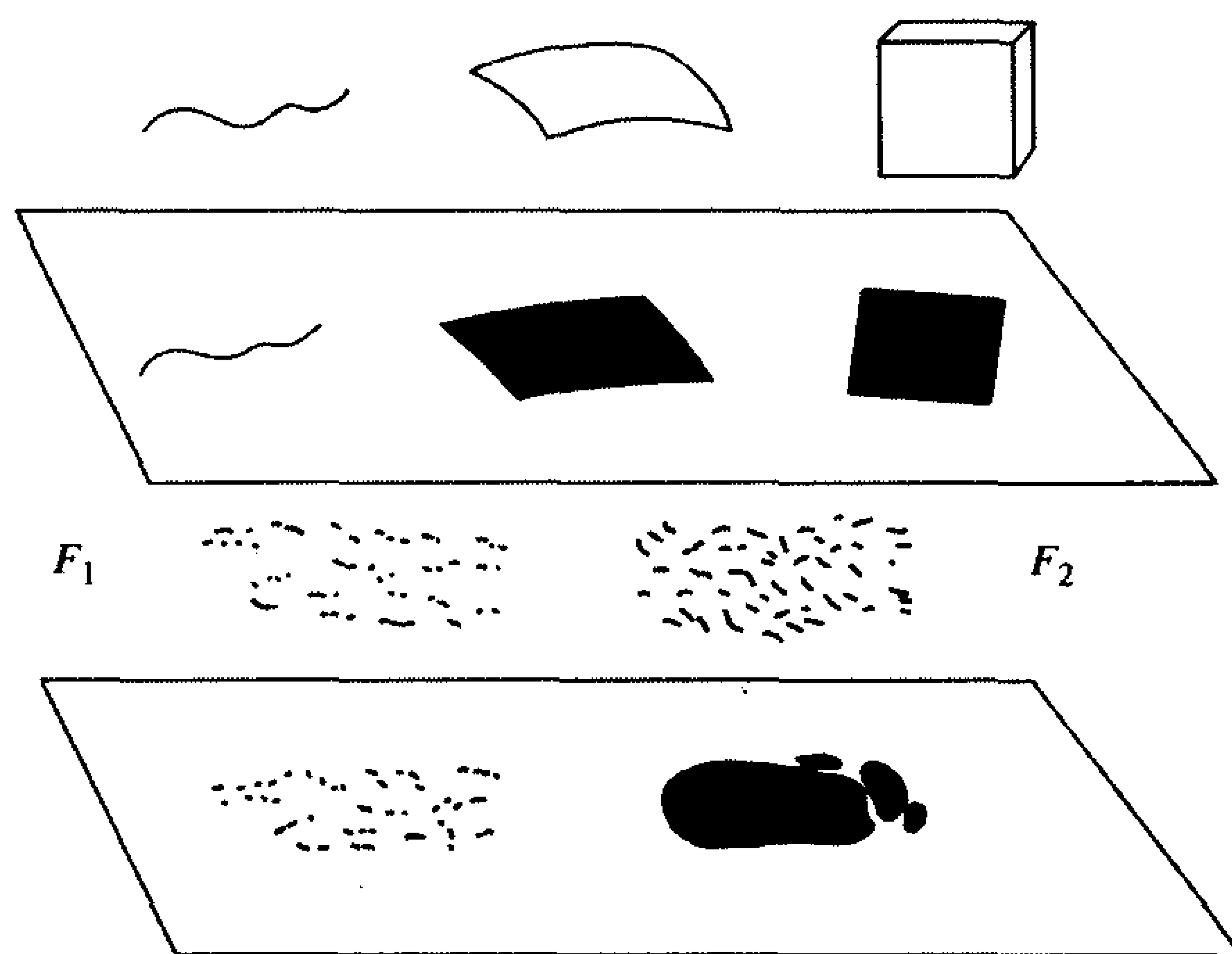



图 6.1　上面: 经典集在平面上的射影, 曲线 "典型地" 有维数为 1 的射影, 而曲面和立方体有具有正面积的维数为 2 的射影. 下面: 分形集到平面的射影, 若 $\dim_{\mathrm{H}} F_1 < 2$, 而 $\dim_{\mathrm{H}} F_2 > 2$, 则典型地 $F_1$ 的射影的维数等于 $\dim_{\mathrm{H}} F_1$, 且有零面积, $F_2$ 的射影维数为 2 且有正面积

## 6.1　任意集的射影

令 $L_\theta$ 表示过 $\mathbf{R}^2$ 的原点并与水平轴夹角为 $\theta$ 的一条直线, 用 $\mathrm{proj}_\theta$ 表示到 $L_\theta$

上的正交射影; 所以, 如果 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的子集, 则 $\mathrm{proj}_\theta F$ 是 $F$ 到 $L_\theta$ 上的射影 (见图 6.2). 显然, 当 $x, y \in \mathbf{R}^2$, 有不等式 $|\mathrm{proj}_\theta x - \mathrm{proj}_\theta y| \leqslant |x-y|$, 即 $\mathrm{proj}_\theta$ 是一个利普希茨映射. 于是根据推论 2.4(a), 对任意集 $F$ 和角 $\theta$, 有

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_\theta F) \leqslant \min\{\dim_{\mathrm{H}} F, 1\}. \tag{6.1}$$

(由于 $\mathrm{proj}_\theta F$ 是直线 $L_\theta$ 的子集, 所以它的维数不会大于 1. ) 有趣的问题是反方向的不等式是否成立? 射影定理告诉我们, 对于几乎所有的 $\theta \in [0, \pi]$, 这是正确的, 也就是使不等式 (6.1) 严格成立的例外值 $\theta$ 组成的集具有零长度 (1 维勒贝格测度).

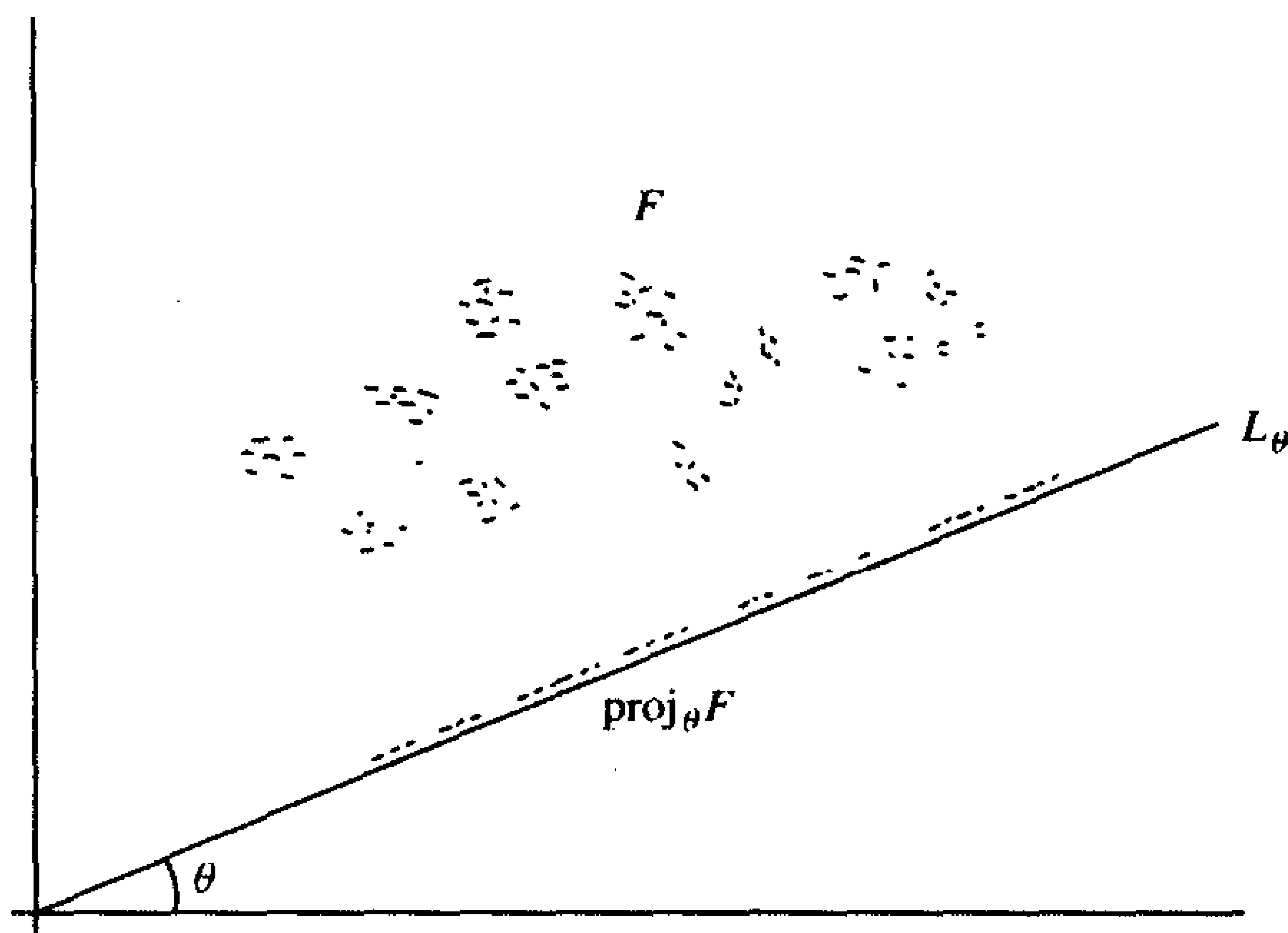



图 6.2 集 $F$ 到直线 $L_\theta$ 的射影

**射影定理 6.1** 设 $F \subset \mathbf{R}^2$ 是博雷尔集,

(a) 如果 $\dim_{\mathrm{H}} F \leqslant 1$, 则对几乎所有的 $\theta \in [0, \pi]$ 有 $\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_\theta F) = \dim_{\mathrm{H}} F$;

(b) 如果 $\dim_{\mathrm{H}} F > 1$, 则对几乎所有的 $\theta \in [0, \pi]$, $\mathrm{proj}_\theta F$ 有正长度 (作为 $L_\theta$ 的子集) 而且维数为 1.

**证明** 利用豪斯多夫维数的位势理论特征可以给出一个非常有效的证明: 如果 $s < \dim_{\mathrm{H}} \leqslant 1$, 则根据定理 4.13(b), 存在 (紧子集)$F$ 上的质量分布 $\mu$, 满足 $0 < \mu(F) < \infty$ 和

$$\int_F \int_F \frac{\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s} < \infty. \tag{6.2}$$

对每个 $\theta$, 把质量分布 $\mu$ "投影" 到直线 $L_\theta$ 上, 从而得到 $\mathrm{proj}_\theta F$ 上的质量分布 $\mu_\theta$, 这里 $\mu_\theta$ 是按下面的式子定义的: 即对每一区间 $[a, b]$, 令

$$\mu_\theta([a, b]) = \mu\{\boldsymbol{x} : a \leqslant \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\theta} \leqslant b\}$$

或者等价地, 对每一非负函数 $f$, 有等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}\mu_\theta(t) = \int_F f(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

(这里 $\boldsymbol{\theta}$ 是方向角为 $\boldsymbol{\theta}$ 的单位向量, $\boldsymbol{x}$ 表示它的位置向量, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\theta}$ 而是通常的内积). 那么

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\mu_\theta(u)\,\mathrm{d}\mu_\theta(v)}{|u-v|^s}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} &= \int_0^{\pi}\left[\int_F\int_F\frac{\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\theta}|^s}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\\ &= \int_0^{\pi}\left[\int_F\int_F\frac{\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{y})}{|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{\theta}|^s}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \qquad (6.3)\\ &= \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}|^s}\int_F\int_F\frac{\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^s}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为任意固定的单位向量 (注意 $|(x-y)\cdot\boldsymbol{\theta}|^{-s}$ 对 $\theta$ 的积分仅依赖于 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$). 如果 $s<1$, 则由式 (6.2) 和

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}|^s} = \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\cos(\boldsymbol{\tau}-\theta)|^s} < \infty$$

知式 (6.3) 是有限的, 所以对几乎所有的 $\theta\in[0,\pi)$ 有

$$\int_F\int_F\frac{\mathrm{d}\mu_\theta(u)\,\mathrm{d}\mu_\theta(v)}{|u-v|^s} < \infty$$

根据定理 4.13(a), 由于在 $\mathrm{proj}_\theta F$ 上存在这样的质量分布 $\mu_\theta$, 故有 $\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_\theta F)\geqslant s$; 又因为这个结果对任意的 $s<\dim_{\mathrm{H}} F$ 都成立, 所以结论 (a) 成立.

结论 (b) 可以类似证明, 但要引入傅里叶变换来说明射影有正长度. □

这些射影定理可以自然地推广到高维情形, 设 $G_{n,k}$ 为通过 $\mathbf{R}^n$ 的原点的 $k$ 维子空间或 “$k$ 维平面”, 这些子空间自然地以 $k(n-k)$ 个坐标 (一般方向余弦) 来参数化, 所以此时称 “几乎所有的” 子空间是指在 $k(n-k)$ 维勒贝格测度意义下的. 用 $\mathrm{proj}_\Pi$ 表示到 $k$ 维平面 $\Pi$ 的正交射影.

**定理 6.2 高维射影** 设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 为博雷尔集,

(a) 如果 $\dim_{\mathrm{H}} F\leqslant k$, 则对几乎所有的 $\Pi\in G_{n,k}$, 有 $\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_\Pi F)=\dim_{\mathrm{H}} F$.

(b) 如果 $\dim_{\mathrm{H}} F>k$, 则对几乎所有的 $\Pi\in G_{n,k}$, $\mathrm{proj}_\Pi F$ 有正 $k$ 维测度且维数为 $k$.

**证明** 不难把定理 (6.1) 的证明方法推广到高维情形.

于是, 如果 $F$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的子集, $F$ 的平面射影的维数一般为 $\min\{2,\dim_{\mathrm{H}} F\}$. 这个结果有重要的实际意义：我们可以通过估计在某个随机方向的相片图的维数来估计空间物体的维数, 如果相片图的维数小于 2, 则可以认为物体的维数等于相片图的维数. 这样一个简化能使空间物体的维数的估计易于处理, 因为计盒维数方法在 3 维空间中很难应用, 而在平面中却可以相当成功地应用.

## 6.2 整数维 $s$ 集的射影

如果 $\mathbf{R}^2$ 中的子集的豪斯多夫维数为 1, 则定理 6.1 告诉我们, 在几乎所有的 $L_\theta$ 上, $F$ 的射影都是 1 维的. 然而在这个重要情形中仍然无法判定这些射影具有零长度还是正长度, 但在 $F$ 为 1 集的特殊情形下, 即 $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ 时, 则可以进行分析研究. 回顾定理 5.3, 即 1 集能分解为规则的类似曲线的部分和不规则的非曲线的部分, 下面两个定理说明了这两类集是完全不相同的.

**定理 6.3** 设 $F$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的规则 1 集, 则至多除了一个例外值 $\theta \in [0,\pi]$ 外, $\mathrm{proj}_\theta F$ 有正长度.

**证明梗概** 由定理 5.9(b), 只需证明 $F$ 是具有正长度可求长曲线 $C$ 的子集. 利用勒贝格密度定理, 用 $C$ 的短的连续的子曲线来逼近这样的集 $F$, 本质上, 需要考虑的情形是, $F$ 本身就是连接两个不同点 $x$ 与 $y$ 的可求长曲线 $C_1$; 但是, 很明显, 除了一个使 $L_\theta$ 垂直于连接 $x,y$ 的直线的例外值 $\theta$ 外, 这样的曲线在 $L_\theta$ 上的射影都是有正长度的区间. □

(一般地, 对所有 $\theta$, $\mathrm{proj}_\theta F$ 都有正长度; 仅当 $F$ 包含于一组平行直线段时, 有一个 $\theta$ 的例外值.)

**定理 6.4** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的不规则 1 集, 则对几乎所有 $\theta \in [0,\pi)$, $\mathrm{proj}_\theta F$ 有零长度.

**证明** 这个证明相当复杂, 要涉及复杂的密度和不规则集的角密度的构造, 在此略去证明. □

这些定理可以有多种形式的组合.

**推论 6.5** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的 1 集, 若 $F$ 的规则部分的 $\mathcal{H}^1$ 测度为零, 则对几乎所有的 $\theta$, $\mathrm{proj}_\theta F$ 有零长度; 否则, 至多除了 $\theta$ 一个例外值外, $\mathrm{proj}_\theta F$ 有正长度.

下面的关于不规则集的表示特征是很有用的.

**推论 6.6** $\mathbf{R}^2$ 中 1 集 $A$ 为不规则的充分必要条件为它至少在两个方向的射影具有零长度.

**例 6.7** 图 0.4 的康托尔尘集 $F$ 是不规则 1 集.

**计算** 在例 2.6 中, 已说明 $F$ 是 1 集, 很容易看到对满足 $\tan\theta = 1/2$ 和 $\tan\theta = -2$ 的 $\theta$, $F$ 在相应的 $L_\theta$ 上的射影具有零长度 (见前几次迭代的图形). 所以由推论 6.6 知 $F$ 为不规则的. □

这一节已经阐述的结果是对于满足 $0 < \mathcal{H}^1(F) < \infty$ 的集合 $F$ 而言的, 虽然这种情形出奇地多, 但对于一般的 1 维集这个条件已相当苛刻. 不管怎样, 这些定理的应用范围还是相当广泛的. 对于任一集 $F$, 如果其与某可求长曲线的交集具有正长度, 那么 $F$ 包含有规则子集, 因此对几乎所有的 $\theta$, $\mathrm{proj}_\theta F$ 有正长度. 此外, 如果 $F$ 是 $\sigma$ 有限不规则 1 集, 即它可以表成可数个具有有限测度的不规则 1 集的并, 则对

几乎所有的 $\theta$, $\mathrm{proj}_\theta F$ 有零长度. 这可由组成 $F$ 的可数个 1 集投影的并推出.

下面叙述定理 6.3 和定理 6.4 在高维情形上的类似结果, 当然, 它们的证明要比平面的情形更为复杂.

**定理 6.8** 设 $F$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的 $k$ 集, 这里 $k$ 为整数.

(a) 若 $F$ 为规则的, 则对几乎所有的 $\Pi \in G_{n,k}$, $\mathrm{proj}_\Pi F$ 有正 $k$ 维测度.

(b) 若 $F$ 为不规则的, 则对几乎所有的 $\Pi \in G_{n,k}$, $\mathrm{proj}_\Pi F$ 的 $k$ 维测度为零.

## 6.3 整数维任意集的射影

上节中的定理, 虽然在数学上精妙而繁复, 但仍然没给出平面集到直线的射影是具有零长度还是正长度这个问题的完整答案. $\mathbf{R}^2$ 中豪斯多夫维数为 1 的子集 $F$ 不一定是 1 集, 或者甚至未必是具有 $\sigma$ 限 $\mathcal{H}^1$ 测度的集合 (即具有有限 $\mathcal{H}^1$ 测度集的可数并); 同时, 也未必有满足 $0 < \mathcal{H}^h(F) < \infty$ 的维数函数 $h$(见 2.5 节), 在这种情形下, 进行数学的分析是非常困难的. 怎样来描述这样集的射影? 令人惊讶的答案是, 通过对豪斯多夫维数为 1、但不具有 $\sigma$ 有限 $\mathcal{H}^1$ 测度的这类相当微妙的集的研究, 能够构造出具有任何给定射影的集. 例如, $\mathbf{R}^2$ 中有这样的子集 $F$, $\mathrm{proj}_\theta F$ 对几乎所有的 $\theta \in [0, \pi/2]$ 都包含一段长度为 1 的区间; 但对于 $\theta \in [\pi/2, \pi)$, $\mathrm{proj}_\theta F$ 却具有零长度. 更一般地, 有下面的结果, 即存在这样的集, 它在所有方向的射影, 除去一个零长度集外, 是预先给定的任何集, 下面定理中方括号的可测条件是为了完备性, 但最容易被非专业人员忽视.

**定理 6.9** 对任意 $\theta \in [0, \pi)$, 设 $G_\theta$ 是 $L_\theta$ 的子集 [使得 $\bigcup_{0 \leqslant \theta < \pi} G_\theta$ 为平面上的勒贝格可测集], 则存在博雷尔集 $F \subset \mathbf{R}^2$, 使得

(a) 对所有 $\theta$, $\mathrm{proj}_\theta F \supset G_\theta$

(b) 对几乎所有 $\theta$, $\mathrm{length}(\mathrm{proj}_\theta \backslash G_\theta) = 0$.

特别地, 对几乎所有 $\theta$, $L_\theta$ 中属于 $G_\theta$ 或 $\mathrm{proj}_\theta F$, 但不同时属于两者的点的集合有零长度.

**证明思想** 粗略地说明这类集的基本构造, 这就是所谓的 "迭代的活动百叶窗 (iterated Venetian blind)", 如图 6.3 所示. 设 $E$ 是长度为 $\lambda$ 的直线段, $\varepsilon$ 为一个小角, $k$ 是一个充分大的整数. 用长度大约为 $\lambda/k$ 且与 $E$ 都成 $\varepsilon$ 角, 端点都延着 $E$ 的

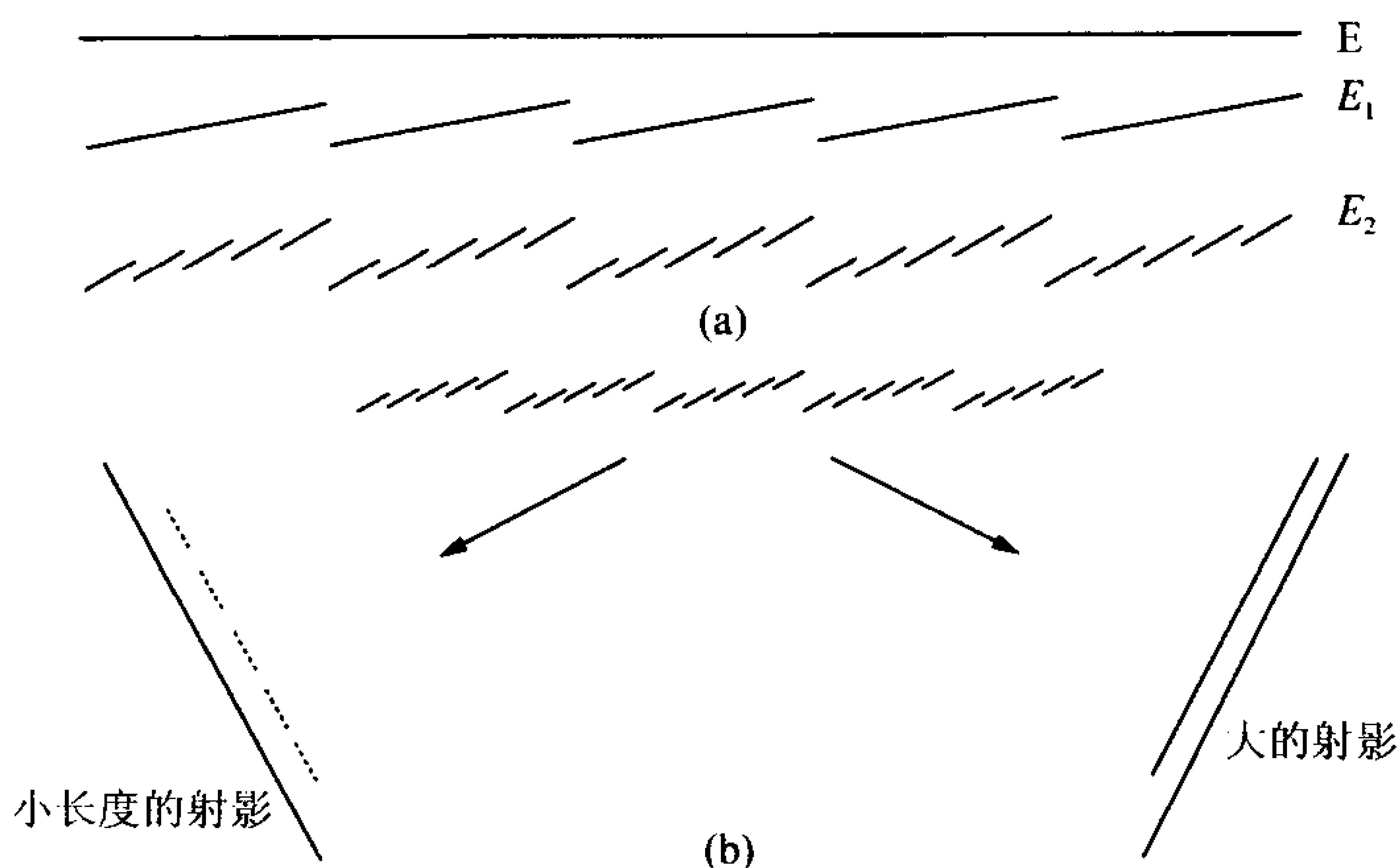



图 6.3 (a) "迭代的活动百叶窗" 的构造. (b) 在某一方向束的射影有较大的长度, 同时在其他方向束的射影长度很小

方向等距排列的 $k$ 个平行直线段组成一个新集合 $E_1$, 来代替原来的 $E$ ; 对 $E_1$ 中的所有直线段重复上面的过程而得到集合 $E_2$, 它包含 $k^2$ 个长度大约为 $\lambda/k^2$ 且与 $E$ 都成 $2\varepsilon$ 角的直线段; 这样继续下去, 可以得到 $E_r$, 它包含 $k^r$ 个长度大约为 $\lambda/k^r$ 且都与 $E$ 都成 $r\varepsilon$ 角的直线段. 当 $r\varepsilon$ 大约为 $\pi/4$ 时, 构造过程就停止. 比较 $E_r$ 的射影与原直线段 $E$ 的射影, 可以看到, 若 $0 \leqslant \theta < \pi/2$, 则 $\text{proj}_\theta E$ 与 $\text{proj}_\theta E_r$ 是几乎相同的 (因与 $L_\theta$ 垂直的直线同时截 $E$ 与 $E_r$), 然而, 若 $-(1/4)\pi < \theta < 0$, 则 $\text{proj}_\theta E_r$ 将有非常小的长度, 因为垂直于 $L_\theta$ 的许多直线将在构造中的适当缝隙中通过, 所以 $E_r$ 的射影与 $E$ 的射影在某些方向上非常相似, 但在其他方向几乎被忽略. 这个想法适合用来求出所需要的集, 它在一个窄带内的方向上的射影很接近 $G_\theta$, 但在其他方向上其射影几乎是空集. 各方向窄带内的集的并集近似满足所要求的性质. 取近似程度越来越好的集序列的极限, 就可以得到具有所叙述性质的集合. □

这个构造能够推广到高维情形: 在 $\mathbf{R}^n$ 中存在集 $F$ 与任意给定的其他集不同, $F$ 到 $k$ 维子空间的几乎所有的射影都具有 $k$ 维零测度. 特别地, 在 3 维空间中存在这样的集, 其任意平面射影均匀零面积. 如若选取阳光从一个垂直的方向射来时, 得到表示时间数字的粗阴影, 在理论上可以得到一个数字日晷 (见图 6.4). 随着太阳从天空中穿过, 可以得到这个集的不同射影 (面积发生变化). 这里引进的数字日晷的概念只为直观说明所得结论, 别把它当成方便的计时方法. 有趣的是, 现实中数字日晷仪已经发明出来, 不过采用了别的原理!

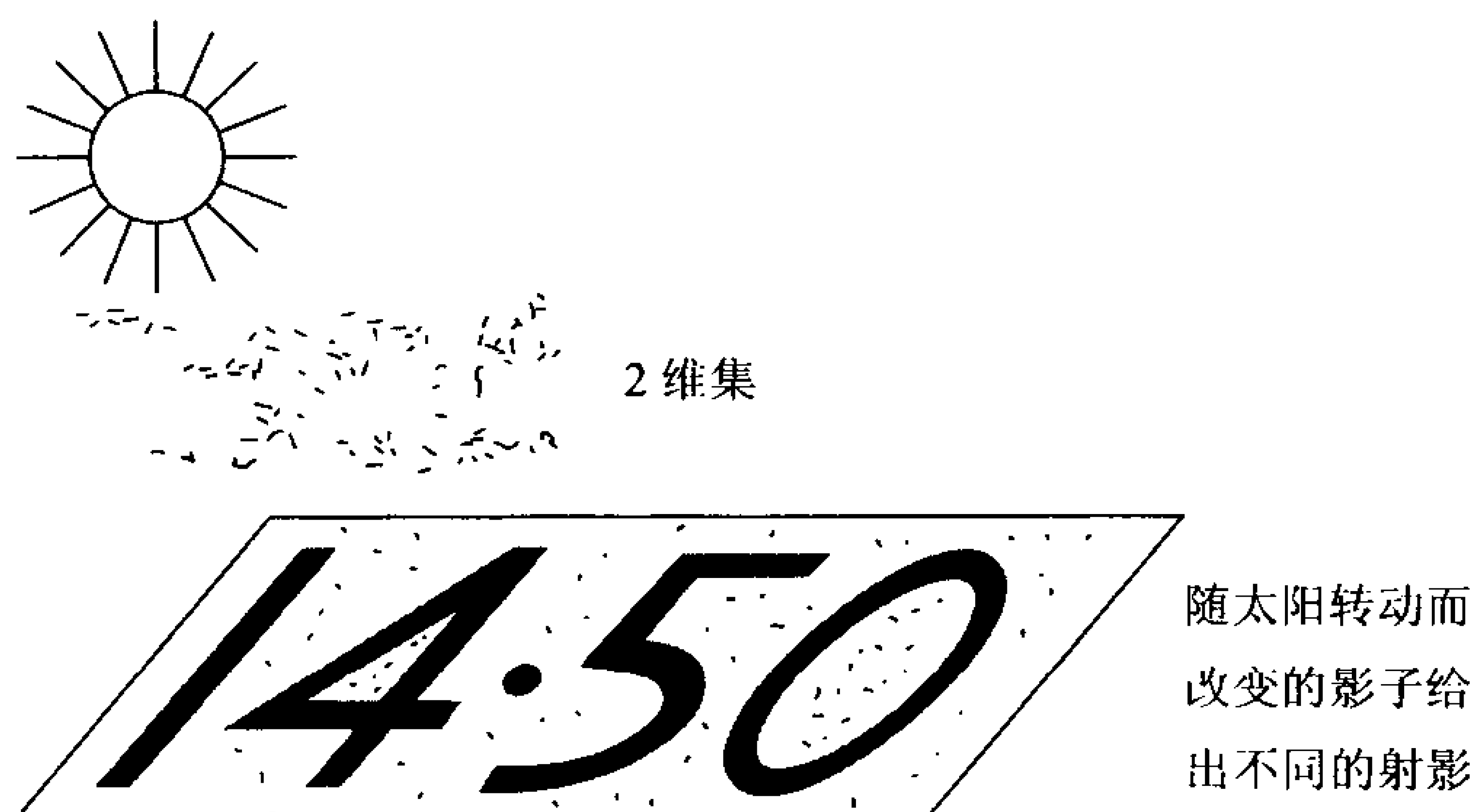



图 6.4 数字日晷

## 6.4 注记和参考文献

平面中的任意子集的射影定理的几何证明由 Marstrand(1954a) 给出; 位势理论的证明归功于 Kaufman(1968). Mattila(1975) 得到了包含高维情形的各种推广. 关于平面中规则和不规则 1 集的射影结果是非常古老的, 可追溯到 Besicovitch(1939) 的工作, 而关于 $\mathbf{R}^n$ 中 $s$ 集的类似结果由 Federer(1947) 给出. 关于射影定理的更详细的论述在 Falconer(1985a) 和 Mattila(1995) 中给出. 而盒维数和填充维数的射影结果是更精巧的, 可参见 Falconer 和 Howroyd (1997) 以及 Howroyd(2001). 定理 6.9 的对偶形式由 Davies(1952) 给出, 而对于高维推广的直接证明由 Falconer(1986a) 给出.

### 练　习

**6.1**　设 $E = F \times F \subset \mathbf{R}^2$, 这里 $F$ 是一个在每次迭代中, 按比例 $\lambda$ 去掉中间一段的康托尔集 ($E$ 的豪斯多夫维数等于 $2\ln 2/\ln(2/(1-\lambda))$, 见例 4.5 和例 7.6), 问在下面两种情况下: (a) $\theta$ 是一般的值; (b)$\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/2$; $\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_\theta E$ 各是什么?

**6.2**　设 $E$ 是 "圆周康托尔集", 即是由形式 $E = \{e^{2\pi i\varphi} : \varphi \in F\}$ 给出的复数集, 其中 $F$ 是三分康托尔集, 对任意 $\theta$, 问 $\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_\theta E$ 等于什么?

**6.3**　对 $0 < s < 1$, 举出 $\mathbf{R}^2$ 中的一个 $s$ 集的例子, 使得对所有的 $\theta$, $\mathrm{proj}_\theta F$ 为 $s$ 集.

**6.4**　设 $E$ 和 $F$ 分别为 $\mathbf{R}$ 的豪斯多夫维数严格在 0 与 1 之间的子集, 已经知道 $\mathbf{R}^2$ 的子集 $E \times F$ 的豪斯多夫维数至少为 $\dim_{\mathrm{H}} E + \dim_{\mathrm{H}} F$(见第 7 章). 证明 $E \times F$ 到一坐标轴射影总是射影定理 6.1 的 "例外" 情形.

**6.5**　证明对任意 $\theta$ 和任意 $F \subset \mathbf{R}^2$, $\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_\theta F \geqslant \dim_{\mathrm{H}} F - 1$ .

**6.6**　设 $F$ 是平面上的不规则 1 集, 利用定理 6.4 证明 $F$ 是全不连通的.

**6.7** 设 $F$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中多于 1 点的连通子集, 证明除去可能的一个例外值 $\theta$, 对几乎所有的 $\theta$, $\mathrm{proj}_\theta F$ 有正长度.(所以平面中的射影定理只对非连通的集才真正使人感兴趣.)

**6.8** 设 $E$ 和 $F$ 为 $\mathbf{R}$ 的子集, 证明对几乎所有的实数 $\lambda$, $\dim_{\mathrm{H}}(E+\lambda F)=\min\{1,\dim_{\mathrm{H}}(E\times F)\}$, 这里 $E+\lambda F$ 表示实数集 $\{x+\lambda y : x\in E, y\in F\}$.

**6.9** 证明如果 $F$ 为非规则 1 集的可数并, 则定理 6.4 的结论仍然成立.

**6.10** 设 $E$ 及 $F$ 为 $\mathbf{R}$ 的具有零长度 (1 维勒贝格测度) 的子集, 证明 $\mathbf{R}^2$ 中可求长曲线与乘积集 $E\times F$ 的交具有零长度.

**6.11** 若 $F$ 为一集合, $x$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的一点, $F$ 在 $x$ 的射影用 $\mathrm{proj}_x F$ 表示, 其定义 $[0,2\pi)$ 中 $\theta$ 的集合, 它使得从 $x$ 出发的方向为 $\theta$ 的半直线与 $F$ 相交. 设 $L$ 为一直线. 证明: 若 $\dim_{\mathrm{H}} F\leqslant 1$, 则对 $L$ 上几乎所有的 $x$(在勒贝格测度意义下), $\dim_{\mathrm{H}}\mathrm{proj}_x F=\dim_{\mathrm{H}} F$; 若 $\dim_{\mathrm{H}} F>1$, 则对 $L$ 上的几乎所有 $x$, $\mathrm{proj}_x F$ 有正长度.(提示: 考虑一个与平面相切的球面, 以及一个使平面中的点 $x$ 映射到过球心和 $x$ 的直线与球面的交点的变换.)

**6.12** 设 $F\subset\mathbf{R}^2$, 对任意 $\theta$, 证明 $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}\mathrm{proj}_\theta F\leqslant\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\mathrm{proj}_\theta F\leqslant\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$ 和 $\dim_{\mathrm{p}}\mathrm{proj}_\theta F\leqslant\dim_{\mathrm{p}} F$ ; 并证明, 如果对几乎所有的 $\theta$, $\dim_{\mathrm{p}} F=\dim_{\mathrm{H}} F$, 则 $\dim_{\mathrm{p}}\mathrm{proj}_\theta F=\dim_{\mathrm{p}} F$.

# 第 7 章　分形的乘积

由已知的分形构造新的分形的一种方法就是利用笛卡儿乘积. 确实, 在实际中出现的很多分形就是乘积形式的, 或者至少是局部类似乘积形式, 例如某些动力系统的吸引子. 本章主要介绍分形的乘积维数公式.

## 7.1　乘 积 公 式

回忆一下, 如果 $E$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的子集, $F$ 为 $\mathbf{R}^m$ 的子集, 笛卡儿乘积或简称乘积$E\times F$定义为第一个坐标在 $E$ 中, 第二个坐标在 $F$ 中的点集, 即

$$E \times F = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^{n+m} : x \in E, y \in F\right\}. \tag{7.1}$$

所以, 如果 $E$ 为 $\mathbf{R}$ 的单位区间, $F$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的单位区间, 那么, $E\times F$ 就是 $\mathbf{R}^3$ 中的单位正方形 (见图 7.1). 另外, 如果 $F$ 为三分康托尔集, 那么, $F\times F$ 就是 "康托尔积" (见图 7.2), 也就是平面上的两个坐标都在康托尔集 $F$ 中的那些点的集合.

在上面的第一个例子中, 利用经典的维数定义, 显然有

$$\dim (E\times F) = \dim E + \dim F$$

在 "光滑" 的情形下, 即当 $E$ 和 $F$ 都是光滑曲线、光滑曲面或高维流形时, 上面这个等式更普遍地成立. 遗憾的是, 对 "分形" 维数来说, 这个等式不总是成立. 关

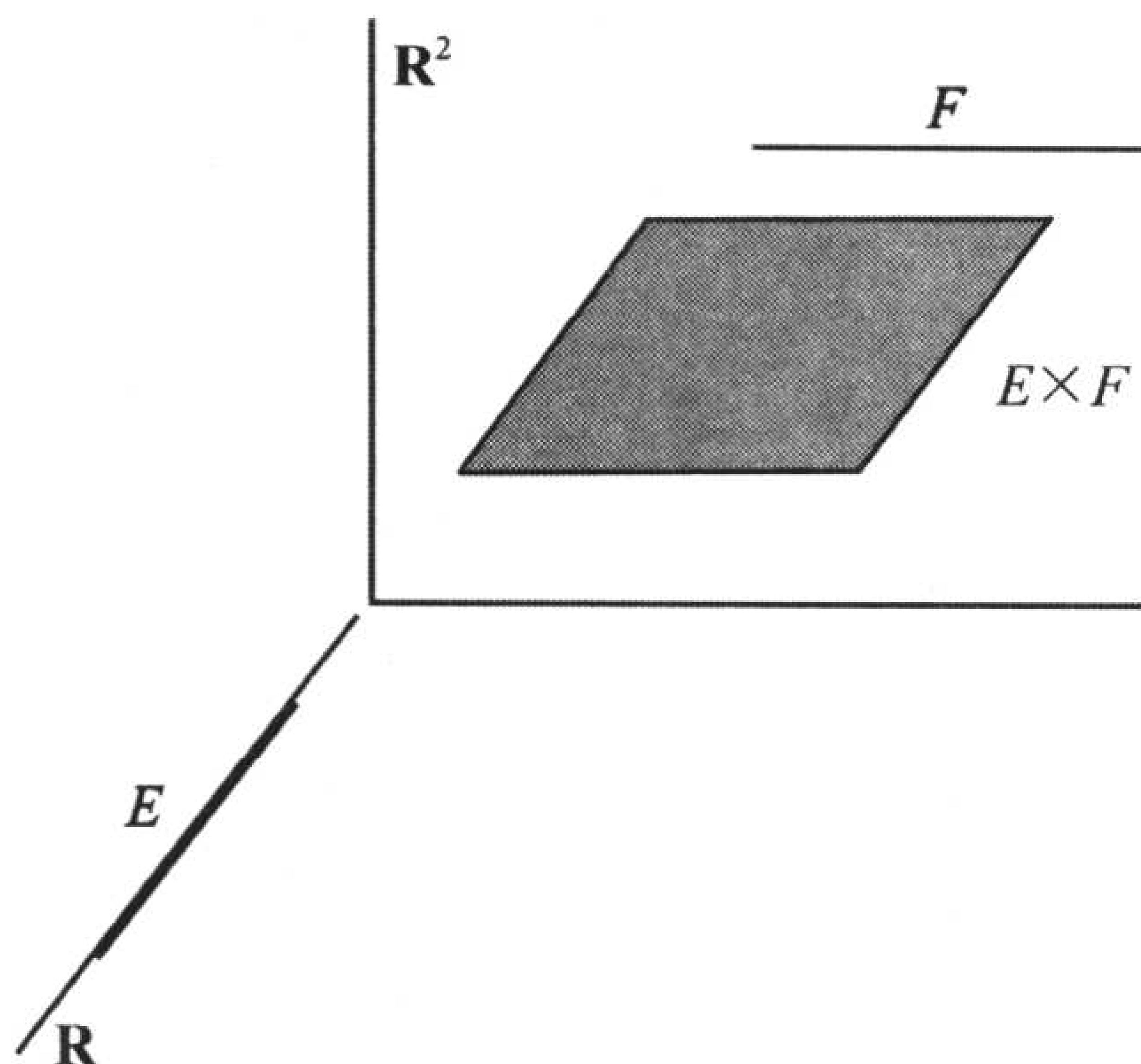



图 7.1　$\mathbf{R}$ 中的单位区间与 $\mathbf{R}^2$ 中的单位区间的笛卡儿乘积

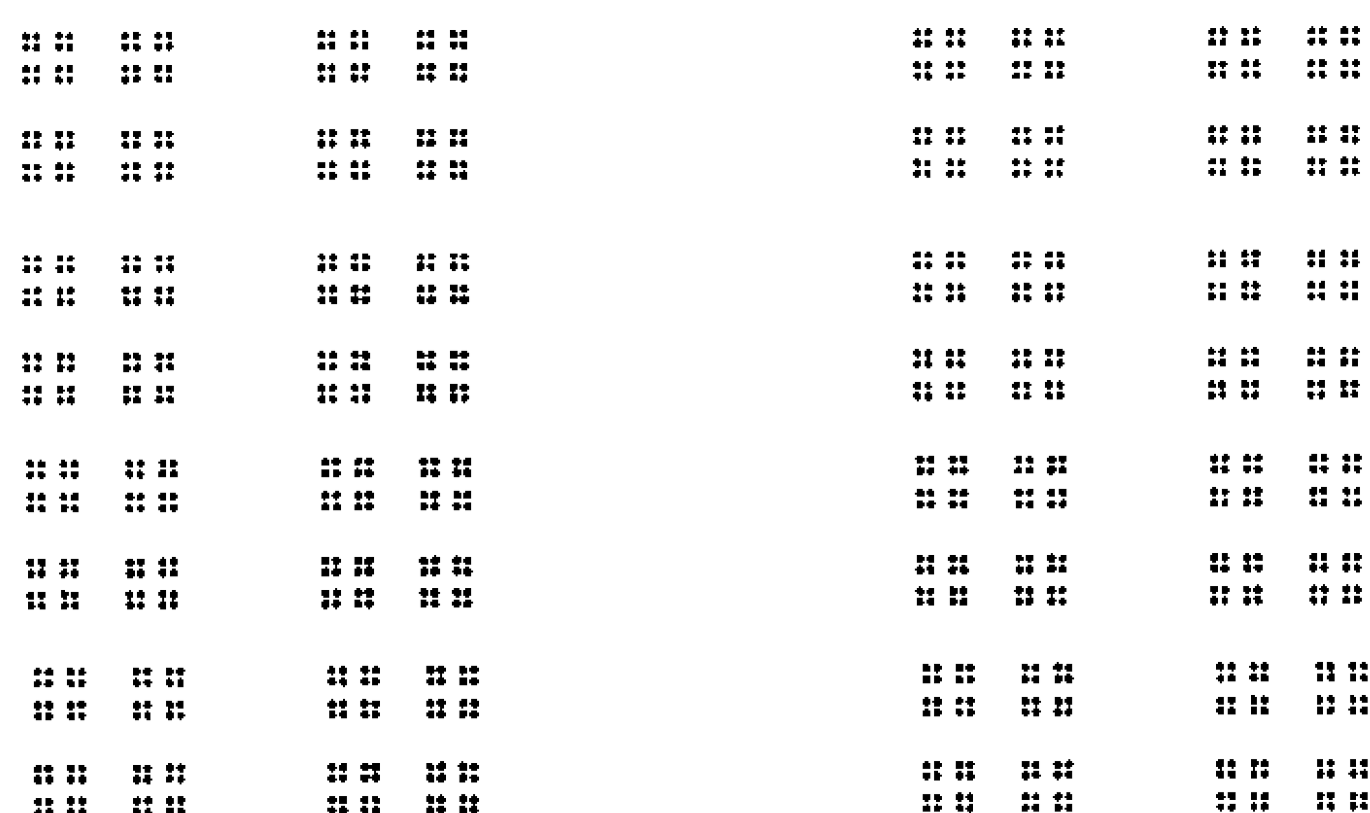


图 7.2 乘积集 $F\times F$, 其中 $F$ 是三分康托尔集, 此时 $\dim_{\mathrm{H}} F\times F=2\dim_{\mathrm{H}} F=2\ln 2/\ln 3$

于豪斯多夫维数, 最一般的结论可能是不等式 $\dim_{\mathrm{H}}(E\times F)\geqslant \dim_{\mathrm{H}} E+\dim_{\mathrm{H}} F$. 然而, 正如将要看到的, 也有很多等号确实成立的情形.

乘积定理的证明要用 $E$ 和 $F$ 上的豪斯多夫测度去定义一个在 $E\times F$ 上的质量分布 $\mu$, $E$ 和 $F$ 上密度的界将导出适合于质量分布方法的 $\mu$ 的估计.

**命题 7.1** 如果 $E\subset \mathbf{R}^n, F\subset \mathbf{R}^m$ 是博雷尔集, 且 $\mathcal{H}^s(E),\mathcal{H}^t(F)<\infty$, 则

$$\mathcal{H}^{s+t}(E\times F)\geqslant c\mathcal{H}^s(E)\,\mathcal{H}^t(F) \tag{7.2}$$

其中 $c>0$ 仅依赖于 $s$ 和 $t$.

**证明** 为简单起见, 假定 $E,F\subset \mathbf{R}$, 故 $E\times F\subset \mathbf{R}^2$, 一般情形的证明几乎是完全相同的. 若 $\mathcal{H}^s(E)$ 和 $\mathcal{H}^t(F)$ 有一个是零, 则式 (7.2) 成立是显然的, 所以假定 $E$ 是 $s$ 集, $F$ 是 $t$ 集, 即 $0<\mathcal{H}^s(E),\mathcal{H}^t(F)<\infty$. 利用 $\mathcal{H}^s$ 和 $\mathcal{H}^t$ 的 “乘积测度”, 可以定义 $E\times F$ 上的质量分布, 即如果 $I,J\subset\mathbf{R}$, 在 “矩形” $I\times J$ 上, 定义 $\mu$ 如下:

$$\mu(I\times J)=\mathcal{H}^s(E\cap I)\,\mathcal{H}^t(F\cap J) \tag{7.3}$$

可以证明这样定义的 $\mu$ 为 $E\times F$ 上的质量分布, 且 $\mu(\mathbf{R}^2)=\mathcal{H}^s(E)\,\mathcal{H}^t(F)$ .

根据命题 5.1(b) 的密度估计, 对 $\mathcal{H}^s$ 几乎所有的 $x\in E$ 都有

$$\varlimsup_{r\to 0}\mathcal{H}^s(E\cap B(x,r))\,(2r)^{-s}\leqslant 1 \tag{7.4}$$

和对 $\mathcal{H}^t$ 几乎所有的 $y\in F$, 都有

$$\varlimsup_{r\to 0}\mathcal{H}^t(F\cap B(y,r))\,(2r)^{-t}\leqslant 1 \tag{7.5}$$

(当然, 因为涉及的是 $\mathbf{R}$ 的子集, 故 $B(x,r)$ 正好是以 $x$ 为中点, 长度为 $2r$ 的区间.) 从 $\mu$ 的定义可以看出, 对 $\mu$ 几乎所有 $(x,y)\in E\times F$, 式 (7.4) 和式 (7.5) 都成立. 因为圆 $B((x,y),r)$ 包含在正方形 $B(x,r)\times B(y,r)$ 中, 这就可以得到

$$\begin{aligned}\mu(B((x,y),r))&\leqslant \mu(B(x,r)\times B(y,r))\\&=\mathcal{H}^s(E\cap B(x,r))\,\mathcal{H}^t(F\cap B(y,r))\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mu\left(B\left((x,y),r\right)\right)}{(2r)^{s+t}} \leqslant \frac{\mathcal{H}^s\left(E\bigcap B\left(x,r\right)\right)}{(2r)^s} \cdot \frac{\mathcal{H}^t\left(F\bigcap B\left(y,r\right)\right)}{(2r)^t}.$$

利用式 (7.4) 和式 (7.5), 可知对 $\mu$ 几乎所有 $(x,y) \in E \times F$,

$$\varlimsup_{r\to 0}\mu\left(B\left((x,y),r\right)\right)(2r)^{-(s+t)} \leqslant 1.$$

由命题 4.9(a)

$$\mathcal{H}^{s+t}\left(E\times F\right) \geqslant 2^{-(s+t)}\mu(E\times F) = 2^{-(s+t)}\mathcal{H}^s\left(E\right)\mathcal{H}^t\left(F\right). \qquad \square$$

**乘积公式 7.2** 设 $E \subset \mathbf{R}^n, F \subset \mathbf{R}^m$ 是博雷尔集, 则

$$\dim_{\mathrm{H}}\left(E\times F\right) \geqslant \dim_{\mathrm{H}} E + \dim_{\mathrm{H}} F. \tag{7.6}$$

**证明** 若 $s,t$ 为满足 $s < \dim_{\mathrm{H}} E, t < \dim_{\mathrm{H}} F$ 的任意数, 则 $\mathcal{H}^s\left(E\right) = \mathcal{H}^t\left(F\right) = \infty$. 由定理 4.10 知存在博雷尔集 $E_0 \subset E, F_0 \subset F$ 使 $0 < \mathcal{H}^s\left(E_0\right), \mathcal{H}^t\left(F_0\right) < \infty$. 再由命题 7.1,

$$\mathcal{H}^{s+t}\left(E\times F\right) \geqslant \mathcal{H}^{s+t}\left(E_0\times F_0\right) \geqslant c\mathcal{H}^s\left(E_0\right)\mathcal{H}^t\left(F_0\right) > 0.$$

所以, $\dim_{\mathrm{H}}\left(E\times F\right) \geqslant s+t$. 由于选择的 $s$ 和 $t$ 可以分别任意地接近 $\dim_{\mathrm{H}} E$ 和 $\dim_{\mathrm{H}} F$, 所以式 (7.6) 成立. $\square$

命题 7.1 和乘积公式 7.2 事实上对任意 (非博雷尔) 集都成立.

从式 (7.6) 即得 "康托尔积" $E\times F$ 的豪斯多夫维数至少为 $2\ln 2/\ln 3$, 这里 $F$ 为三分康托尔集 (见图 7.2).

一般地, 不等式 (7.6) 的反向不等式是不成立的, 见例 7.8 . 可是, 正如经常遇见的, 如果 $E$ 或 $F$ 是 "相当规则" 的, 即在豪斯多夫维数与上盒维数相等的情况下, 确实能够得到相应的等式.

**乘积公式 7.3** 对任意集 $E \subset \mathbf{R}^n, F \subset \mathbf{R}^m$, 则

$$\dim_{\mathrm{H}}\left(E\times F\right) \leqslant \dim_{\mathrm{H}} E + \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{7.7}$$

**证明** 为了简单起见, 取 $E \subset \mathbf{R}$, $F \subset \mathbf{R}$. 选择 $s > \dim_{\mathrm{H}} E, t > \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, 那么存在一个数 $\delta_0 > 0$, 使对任意 $\delta \leqslant \delta_0$, $F$ 可以被 $N_\delta\left(F\right) \leqslant \delta^{-t}$ 个长度为 $\delta$ 的区间覆盖. 设 $\{U_i\}$ 是 $E$ 的任意 $\delta$ 覆盖, 这里 $U_i$ 是满足 $\sum_i |U_i|^s < 1$ 的区间. 对每个 $i$, 设 $\{U_{i,j}\}$ 为覆盖 $F$ 的 $N_{|U_i|}\left(F\right)$ 个长为 $|U_i|$ 的区间, 则 $U_i \times F$ 被 $N_{|U_i|}\left(F\right)$ 个边长为 $|U_i|$ 的正方形 $\{U_i \times U_{i,j}\}$ 所覆盖. 所以 $E\times F \subset \bigcup_i \bigcup_j \left(U_i \times U_{i,j}\right)$, 即有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{s+t}_{\delta\sqrt{2}}\left(E\times F\right) &\leqslant \sum_i\sum_j \left|U_i\times U_{i,j}\right|^{s+t} \leqslant \sum_i N_{|U_i|}\left(F\right)2^{(s+t)/2}\left|U_i\right|^{s+t} \\ &\leqslant 2^{(s+t)/2}\sum_i \left|U_i\right|^{-t}\left|U_i\right|^{s+t} < 2^{(s+t)/2}.\end{aligned}$$

令 $\delta \to 0$, 只要 $s > \dim_{\mathrm{H}} E$ 且 $t > \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, 就有 $\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) < \infty$, 即得 $\dim_{\mathrm{H}}(E \times F) \leqslant s + t$. □

**推论 7.4** 若 $\dim_{\mathrm{H}} F = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, 则

$$\dim_{\mathrm{H}}(E \times F) = \dim_{\mathrm{H}} E + \dim_{\mathrm{H}} F$$

**证明** 注意到合并乘积公式 7.2 和 7.3 即得

$$\dim_{\mathrm{H}} E + \dim_{\mathrm{H}} F \leqslant \dim_{\mathrm{H}}(E \times F) \leqslant \dim_{\mathrm{H}} E + \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{7.8}$$ □

这里应当注意的是上盒维数的基本乘积不等式与豪斯多夫维数的基本乘积不等式是相反的.

**乘积公式 7.5** 对任意集 $E \subset \mathbf{R}^n, F \subset \mathbf{R}^m$

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(E \times F) \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} E + \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{7.9}$$

**证明** 这个证明留作练习 7.5, 证明的思想与公式 7.3 相同, 注意到如果 $E$ 和 $F$ 能分别被边长为 $\delta$ 的 $N_\delta(E)$ 和 $N_\delta(F)$ 个区间所覆盖, 那么 $E \times F$ 就被 $N_\delta(E)N_\delta(F)$ 个上面那些区间的乘积组成的正方形所覆盖.

**例 7.6 与均匀康托尔集的乘积**

设 $E, F$ 是 $\mathbf{R}$ 的子集, $F$ 为均匀康托尔集 (见例 4.5), 则

$$\dim_{\mathrm{H}}(E \times F) = \dim_{\mathrm{H}} E + \dim_{\mathrm{H}} F.$$

**计算** 例 4.5 证明了均匀康托尔集的豪斯多夫维数与上盒维数相等, 所以, 由推论 7.4 即得结论.

因此, 三分康托尔集与自身的 "康托尔积" 的豪斯多夫维数和盒维数都为 $2\ln 2/\ln 3$, 类似地, 如果 $E$ 为 $\mathbf{R}$ 的子集, $F$ 为一直线段, 则

$$\dim_{\mathrm{H}}(E \times F) = \dim_{\mathrm{H}} E + 1.$$

在实际中遇到的很多分形都不是精确的乘积集, 但是局部类似乘积集. 例如, Hénon 吸引子 (见式 13.5), 看起来局部像一个直线段与一个类似康托尔集 $F$ 的乘积. 更确切地说, 存在从 $[0,1] \times F$ 到 Hénon 吸引子的小邻域的光滑双射. 在适当的利普希茨变换下, 这样的分形集可以作为乘积集的像来进行分析.

**例 7.7** "康托尔靶"就是在极坐标下由表达式

$$F' = \{(r, \theta) : r \in F, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

表示的平面集, 其中 $F$ 是三分康托尔集 (见图 7.3), 则 $\dim_{\mathrm{H}} F' = 1 + \ln 2/\ln 3$.

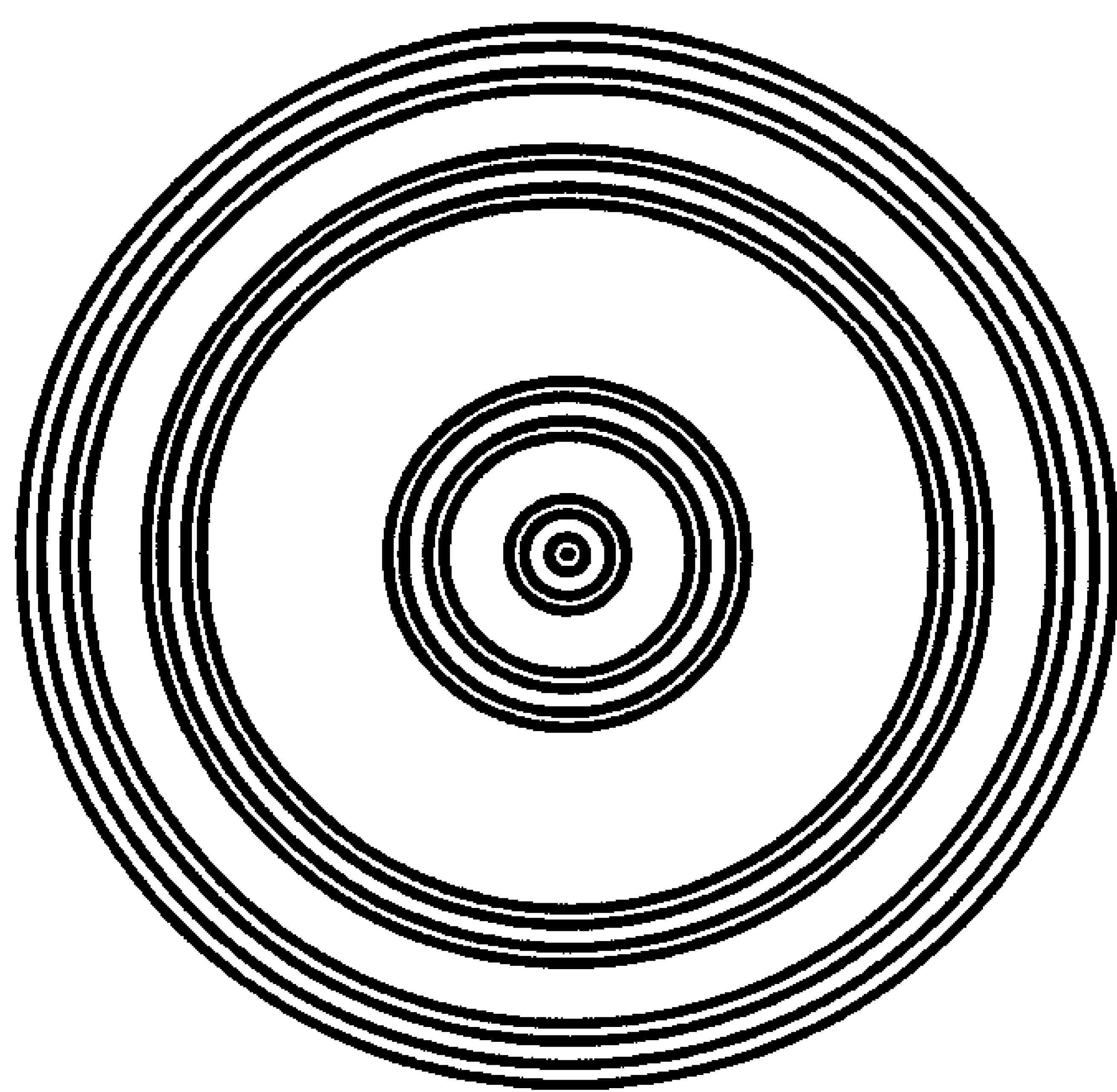


图 7.3 “康托尔靶”—— 由三分康托尔集绕它的一个端点旋转所得到的集

**计算** 设 $f$ 是由 $f(x,y)=(x\cos y, x\sin y)$ 给出的 $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的映射. 易见 $f$ 是利普希茨映射, 且 $F'=f(F\times[0,2\pi])$, 所以由推论 2.4(a) 和例 7.6

$$\begin{aligned}\dim_{\mathrm{H}} F' &= \dim_{\mathrm{H}} f(F\times[0,2\pi]) \leqslant \dim_{\mathrm{H}}(F\times[0,2\pi])\\ &= \dim_{\mathrm{H}} F + \dim_{\mathrm{H}}[0,2\pi] = (\ln 2/\ln 3)+1.\end{aligned}$$

另一方面, 如果限制 $f$ 在 $[2/3,1]\times[0,\pi]$ 上, 则 $f$ 是在这个定义域上的双利普希茨映射. 因为 $F'\supset f((F\bigcap[2/3,1])\times[0,\pi])$, 根据 2.4(b) 和例 7.6 得

$$\begin{aligned}\dim_{\mathrm{H}} F' &\geqslant \dim_{\mathrm{H}} f((F\bigcap[2/3,1])\times[0,\pi])\\ &= \dim_{\mathrm{H}}((F\bigcap[2/3,1])\times[0,\pi])\\ &= \dim_{\mathrm{H}}(F\bigcap[2/3,1]) + \dim_{\mathrm{H}}[0,\pi]\\ &= (\ln 2/\ln 3)+1\end{aligned}$$

对这个证明做很小的改动就可以得出, $F'$ 是 $s$ 集, 这里 $s=(\ln 2/\ln 3)+1$.

下面的例子表明, 在一般情况下, 豪斯多夫维数的乘积公式 (7.6) 不可能成为等式.

**例 7.8** *存在集* $E,F\subset\mathbf{R}$, *使* $\dim_{\mathrm{H}} E=\dim_{\mathrm{H}} F=0$ , *而* $\dim_{\mathrm{H}}(E\times F)\geqslant 1$

**计算** 设 $0=m_0<m_1<\cdots$ 是一个增加得非常快的整数序列, 并且满足下面的条件. $E$ 为 $[0,1]$ 中满足下列条件的数: 对偶数 $k$, 这些数的第 $r$ 位小数为零, 这里 $m_k+1\leqslant r\leqslant m_{k+1}$ ; 对应地, $F$ 为 $[0,1]$ 中满足下列条件的数: 对奇数 $k$, 这些数的第 $r$ 位小数为零, 这里 $m_k+1\leqslant r\leqslant m_{k+1}$.

对偶数 $k$, 观测前 $m_{k+1}$ 位小数, 显然存在 $10^{j_k}$ 个长为 $10^{-m_k+1}$ 的区间覆盖 $E$, 其中 $j_k=(m_2-m_1)+(m_4-m_3)+\cdots+(m_k-m_{k-1})$. 如果 $m_k$ 选择为增加得非常快的数列, 那么 $\ln 10^{j_k}/-\ln 10^{-m_{k+1}}=j_k/m_{k+1}$ , 当 $k\to\infty$ 时, 这个比值趋于零, 由命题 4.1, 可得 $\dim_{\mathrm{H}} E\leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}}E=0$. 类似地也有 $\dim_{\mathrm{H}} F=0$.

如果 $0<\omega<1$, 可以记 $\omega=x+y$, 其中 $x\in E,y\in F$, 即当 $k$ 是奇数且 $m_k+1\leqslant r\leqslant m_{k+1}$, $\omega$ 的第 $r$ 位小数正好取自于 $E$ 中; 而当 $k$ 是偶数, 且 $m_k+1\leqslant r\leqslant m_{k+1}$, 则 $\omega$ 的第 $r$ 位小数正好取自于 $F$ 中. 易见, 由 $f(x,y)=x+y$ 定义的映射 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是利普希茨的, 所以由推论 2.4(a)

$$\dim_{\mathrm{H}}(E\times F)\geqslant \dim_{\mathrm{H}} f(E\times F)\geqslant \dim_{\mathrm{H}}(0,1)=1. \qquad \square$$

乘积公式的一个很有用的推广就是把一个集合的维数与它的平行截口的维数联系起来, 下面在 $xy$ 平面上讨论这个问题: 设 $L_x$ 为平行于 $y$ 轴且过点 $(x,0)$ 的直线.

**命题 7.9** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的博雷尔子集, 如果 $1\leqslant s\leqslant 2$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{H}^{s-1}\left(F\bigcap L_x\right)\mathrm{d}x\leqslant \mathcal{H}^s(F). \tag{7.10}$$

**证明** 给定 $\varepsilon>0$, 设 $\{U_i\}$ 为 $F$ 的 $\delta$ 覆盖, 且满足

$$\sum_i |U_i|^s\leqslant \mathcal{H}^s_\delta(F)+\varepsilon.$$

每个 $U_i$ 都包含在边长为 $|U_i|$ 且各边分别平行于坐标轴的正方形 $S_i$ 中.

设 $\mathcal{X}_i$ 为 $S_i$ 的示性函数 (即若 $(x,y)\in S_i$, $\mathcal{X}_i(x,y)=1$; 若 $(x,y)\notin S_i$, $\mathcal{X}_i(x,y)=0$). 对每个 $x$, 集类 $\{S_i\bigcap L_x\}$ 构成了 $F\bigcap L_x$ 的一个 $\delta$ 覆盖, 故有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{s-1}_\delta\left(F\bigcap L_x\right)&\leqslant \sum_i \left|S_i\bigcap L_x\right|^{s-1}=\sum_i |U_i|^{s-2}\left|S_i\bigcap L_x\right|\\&=\sum_i |U_i|^{s-2}\int \mathcal{X}_i(x,y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int \mathcal{H}^{s-1}_\delta\left(F\bigcap L_x\right)\mathrm{d}x&\leqslant \sum_i |U_i|^{s-2}\iint \mathcal{X}_i(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sum_i |U_i|^s\leqslant \mathcal{H}^s_\delta(F)+\varepsilon\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意的, 故 $\int \mathcal{H}^{s-1}_\delta\left(F\bigcap L_x\right)dx\leqslant \mathcal{H}^s_\delta(F)$. 令 $\delta\to 0$ 即得式 (7.10). $\square$

**推论 7.10** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的博雷尔子集, 则对几乎所有的 $x$(在 1 维勒贝格测度的意义下), $\dim_{\mathrm{H}}\left(F\bigcap L_x\right)\leqslant \max\{0,\dim_{\mathrm{H}} F-1\}$

**证明** 取 $s > \dim_H F$, 则 $\mathcal{H}^s(F) = 0$. 若 $s > 1$, 由公式 (7.10) 得出 $\mathcal{H}^{s-1}(F \bigcap L_x) = 0$, 因此对几乎所有的 $x$, $\dim_H (F \bigcap L_x) \leqslant s - 1$ □

下面不加证明地叙述一个有用的、进一步的推广.

**命题 7.11** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的任意子集, $E$ 为 $x$ 轴的任意子集, 假设存在一个常数 $c$ 使得对任意 $x \in E$, $\mathcal{H}^t(F \bigcap L_x) \geqslant c$, 则

$$\mathcal{H}^{s+t}(F) \geqslant bc\mathcal{H}^s(E), \tag{7.11}$$

其中 $b \geqslant 0$, 且 $b$ 仅依赖于 $s$ 和 $t$.

这个结果可以表示成维数的形式.

**推论 7.12** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的任意子集, $E$ 为 $x$ 轴的子集, 如果对任意 $x \in E$, $\dim_H (F \bigcap L_x) \geqslant t$ , 则 $\dim_H F \geqslant t + \dim_H E$.

这些结论的类似的高维结果也是正确的.

下面关于命题 7.9 的实例是一个自仿射集的例子, 这类集的详细讨论将在 9.4 节进行.

**例 7.13 自仿射集** 设 $F$ 为图 7.4 所示的由迭代构造得到的集, (在第 $k$ 步, $E_k$ 的每一个矩形被 $E_1$ 中的矩形仿射相似形所取代. 于是在 "$y$" 方向的收缩率比在 "$x$" 方向要大, 当 $k \to \infty$ 时, $E_k$ 中的矩形宽与高的比趋于无穷.) 则有 $\dim_H F = \dim_B F = 1.5$.

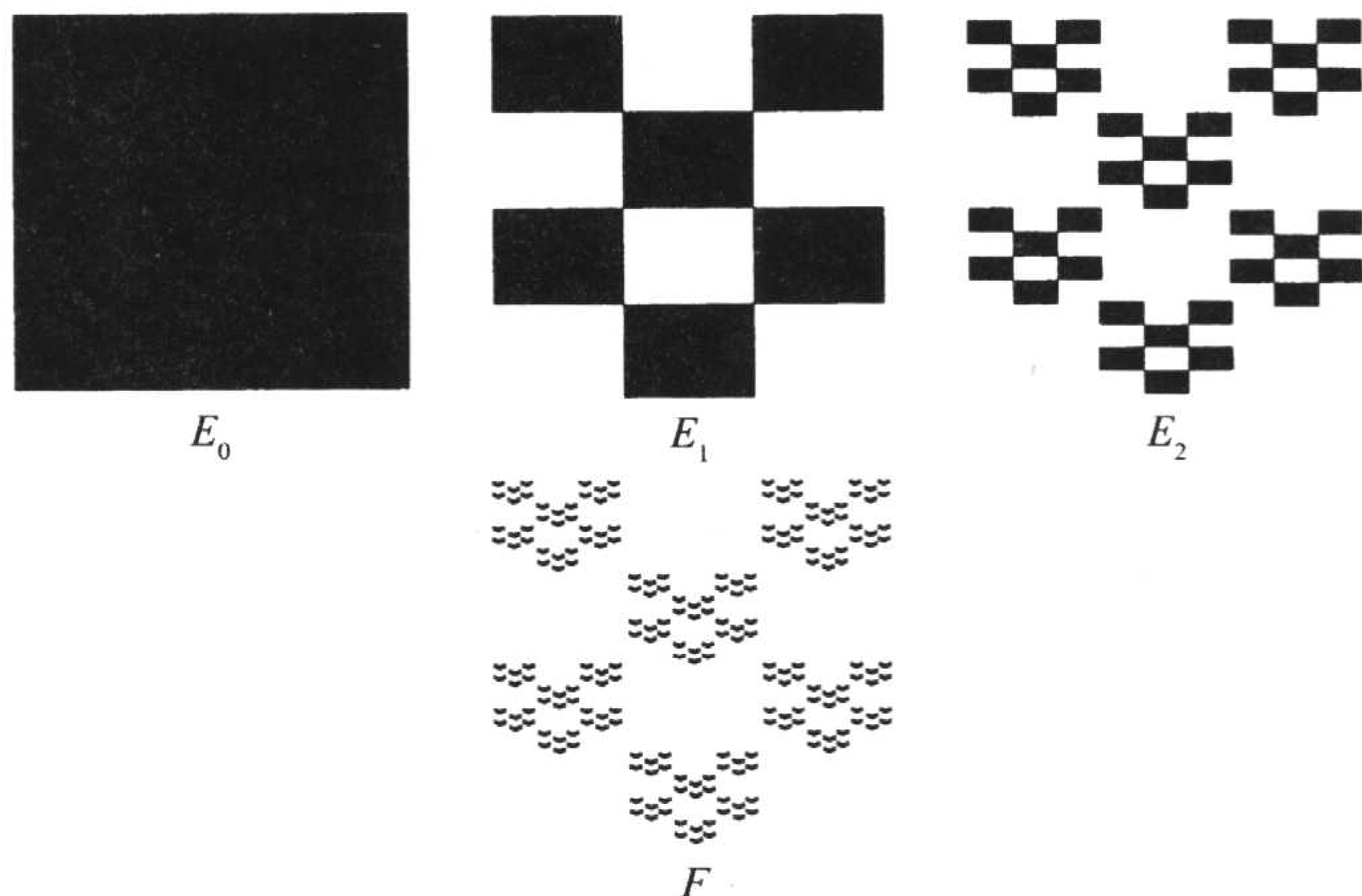



图 7.4 自仿射集的构造, $\dim_H F = 1.5$

**计算** $E_k$ 包含 $6^k$ 个大小为 $3^{-k} \times 4^{-k}$ 的矩形, 通过对每个矩形用一系列的垂直直线进行分割, 这些矩形的每一个都可以被最多 $(4/3)^k + 1$ 个边长为 $4^{-k}$ 的正方

形覆盖; 所以 $E_k$ 可以被 $6^k \times 2 \times 4^k \times 3^{-k} = 2 \times 8^k$ 个直径为 $4^{-k}\sqrt{2}$ 的正方形覆盖, 根据常用的方法, 得出 $\dim_{\rm H} F \leqslant \overline{\dim}_{\rm B} F \leqslant 1.5$.

另一方面, 除了 $x = j3^{-k}$ 的情形外 ($j$ 和 $k$ 都为整数), $E_k \bigcap L_x$ 都是由 $2^k$ 个长为 $4^{-k}$ 的区间组成, 用一般的质量分布方法可以证明, 对每一个这样的 $x$ 都满足 $\mathcal{H}^{1/2}(E_k \bigcap L_x) \geqslant 1/2$. 根据命题 7.9, $\mathcal{H}^{3/2}(F) \geqslant 1/2$, 因此,

$$\dim_{\rm H} F = \dim_{\rm B} F = 1.5. \qquad \square$$

## 7.2　注记和参考文献

乘积公式的最早形式是由 Besicovitch and Moran(1945) 提出的. 用网测度证明的一个非常一般的结论由 Marstrand(1954b) 给出. 关于乘积集的填充维数, 可参见 Tricot(1982) 和 Howroyd(1996).

### 练　习

**7.1**　证明: 对任意集 $F \subset [0,1]$, $\dim_{\rm H}(F \times [0,1]) = 1 + \dim_{\rm H} F$ .

**7.2**　设 $F_\lambda$ 表示在迭代中, 每次按比例 $\lambda$ 去掉区间中间线段而得的康托尔集, 问对 $0 < \lambda, \mu < 1$, 集 $F_\lambda \times F_\mu$ 的盒维数和豪斯多夫维数各是多少?

**7.3**　设 $F$ 是 $[0,\infty)$ 上的任意子集, $F'$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上由极坐标给出的 "靶", $F' = \{(r,\theta) : r \in F, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$. 证明: $\dim_{\rm H} F' = 1 + \dim_{\rm H} F$ .

**7.4**　证明: 存在 $\mathbf{R}^2$ 的豪斯多夫维数为 2 的子集 $F$, 在两坐标轴上的投影的长度为 0. (提示: 参见练习 4.9) 进而证明任何包含在 $F$ 中的 1 集都是不规则的; 任何可求长的曲线与 $F$ 的交都是长度为零的集.

**7.5**　推导乘积公式 7.5.

**7.6**　求平面集 $\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x + y \in F \text{ 且 } x - y \in F\right\}$ 的豪斯多夫维数与盒维数, 这里 $F$ 是三分康托尔集.

**7.7**　设 $F \subset \mathbf{R}$ 具有相等的豪斯多夫维数与上盒维数, 并设 $D$ 是集合 $\{x - y : x, y \in F\}$, 即为 $F$ 的*差集*, 证明: $\dim_{\rm H} D \leqslant \min\{1, 2\dim_{\rm H} F\}$. (提示: 考虑集合 $F \times F$.)

**7.8**　求平面集$\{(x,y) : y - x^2 \in F\}$的豪斯多夫维数和盒维数, 这里 $F$ 是三分康托尔集.

**7.9**　设 $L_x$ 与命题 7.9 中的 $L_x$ 意义相同, $F$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的子集, 对 $0 \leqslant s \leqslant 1$, 令 $E_s = \{x \in \mathbf{R} : \dim_{\rm H}(F \bigcap L_x) \geqslant s\}$, 证明: $\dim_{\rm H} F \geqslant \sup_{0 \leqslant s \leqslant 1}\{s + \dim_{\rm H} E_s\}$.

**7.10**　将单位正方形 $E_0$ 分成三列、五行得到 15 个边长为 1/3 和 1/5 的矩形, 设 $E_1$ 是在每一列中任取四个矩形得到的集合; $F$ 是由 $E_1$ 的仿射相似形反复地代替每一个矩形而得到的自仿射集 (比较例 7.13), 采用例 7.13 的方法证明:

$$\dim_{\rm H} F = 1 + \ln 4/\ln 5.$$

**7.11**　假设改变练习 7.10 中的迭代方法, 使在第一和第三列中分别任取 4 个矩形, 而不在第二列中取. 证明: $\dim_{\rm H} F = \ln 2/\ln 3 + \ln 4/\ln 5$.

# 第 8 章　分形的交集

两个分形的交集通常还是分形; 很自然, 人们试图把这个交集的维数与原来集合的维数联系起来. 在通常情况下, 立即可以看出, 一般不能得出任何结论. 因为若 $F$ 为一有界集, 存在一个与 $F$ 形状完全相同的集 $F_1$, 使得 $\dim_{\mathrm{H}}(F \bigcap F_1) = \dim_{\mathrm{H}} F$(取$F_1 = F$); 也存在 $F$ 的另一个形状完全相同的集 $F_1$, 使得 $\dim_{\mathrm{H}}(F \bigcap F_1) = \varnothing$(取 $F$ 与 $F_1$ 互不相交). 然而, 如果考虑 $F$ 和另一个与它处于 "典型" 相关位置的形状相同的集所得到的交集, 则可以论述的东西就相当多.

为了说明这一点, 设 $F$ 和 $F_1$ 都是平面上的单位直线段. 则 $F_1$ 是与 $F$ 形状相同的集, 那么 $F \bigcap F_1$ 可能是一直线段, 但这只是在 $F$ 和 $F_1$ 共线的情形才成立; 如果 $F$ 和 $F_1$ 以一个角度相交, 那么 $F \bigcap F_1$ 是一个单点; 此时如果用一个邻近 $F_1$ 的全等拷贝取代 $F_1$, 集 $F_1 \bigcap F$ 仍然是一个单点. 所以, "一般来说" $F \bigcap F_1$ 最多为一个单点的情形是 "经常" 发生的.

现在可以非常细致地讨论这个问题, 回忆一下平面上的一个刚体运动, 即直接全等映射 $\sigma$, 它不带反射地将任意集 $E$ 变换成与它形状完全相同的集 $\sigma(E)$. 刚体运动可以被三个坐标 $(x, y, \theta)$ 参数化, 其中原点变换到 $(x, y)$, $\theta$ 为一旋转角. 这样的参数化给出了刚体运动空间的一个自然测度, 即刚体运动的一个集 $A$ 的测度由在 $A$ 中的运动参数 $(x, y, \theta)$ 的 3 维勒贝格测度给出. 例如, 把矩形 $[1,2] \times [0,3]$ 的点映射到原点的所有刚体运动的测度为 $1 \times 3 \times 2\pi$.

在 $F$ 是一直线段这个例子中, 使 $F \bigcap \sigma(F)$ 为一直线段的变换 $\sigma$ 的集的测度为零; 可是, 使 $F \bigcap \sigma(F)$ 为单点的变换的集是有正测度的集合, 事实上这个集合的测度为 4.

类似的结果在高维情形下也成立, "典型的" 的情况发生在 $\mathbf{R}^3$ 中: 两个曲面相交成一条曲线, 曲线与曲面相交于一点, 两条曲线是不相交的. 在 $\mathbf{R}^n$ 中, 如果光滑流形 $E$ 和 $F$ 真的相交, 那么 "一般来说" 它们的交是维数等于 $\max\{0, \dim E + \dim F - n\}$ 的子流形. 更精确地说, 如果 $\dim E + \dim F - n > 0$, 那么对具有正测度的刚体运动 $\sigma$ 组成的集, 就有 $\dim(E \bigcap \sigma(F)) = \dim E + \dim F - n$; 对几乎所有的其他 $\sigma$, 则有 $\dim(E \bigcap \sigma(F)) = 0$.(当然, $\sigma$ 的集要用决定 $\mathbf{R}^n$ 中刚体运动所需要的 $n(n+1)/2$ 个参数来度量.)

## 8.1　分形的交集公式

如果 $E$ 和 $F$ 都是分形, 并且在讨论中用的是豪斯多夫维数, 是不是还能得到

这些类似的公式呢？特别当 $\sigma$ 取遍变换群 $G$, 比如像平移变换群, 全等变换群或相似变换群时, 是否 "一般" 都有 (见图 8.1)

$$\dim_{\mathrm{H}}(E\cap\sigma(F))\leqslant\max\{0,\dim_{\mathrm{H}}E+\dim_{\mathrm{H}}F-n\}\tag{8.1}$$

而且 "经常" 有

$$\dim_{\mathrm{H}}(E\cap\sigma(F))\geqslant\dim_{\mathrm{H}}E+\dim_{\mathrm{H}}F-n\tag{8.2}$$

当然, 这里的 "一般" 指的是 "对几乎所有的 $\sigma$", 而 "经常" 指的是相对于 $G$ 中变换的自然测度 "具有正测度的 $\sigma$ 的集". 通常, 存在整数 $m$, 使 $G$ 能以简单明了的方式被 $m$ 个坐标参数化, 并且可以在讨论中应用参数空间 $\mathbf{R}^m$ 上的勒贝格测度.

当 $G$ 为平移变换群时, 可以得到 $\dim_{\mathrm{H}}(E\cap\sigma(F))$ 的上界: 这个上界对大部分的全等变换群和相似变换群自然成立. 在问题只发生在平面且有一个集是直线的特殊情况下, 已经证明式 (8.1), 此式本质上是推论 7.10, 更一般的结论很容易由这个特殊情形推出. 回顾一下, $F+x=\{x+y:y\in F\}$ 表示集 $F$ 平移一个向量 $x$ 所得到的集.

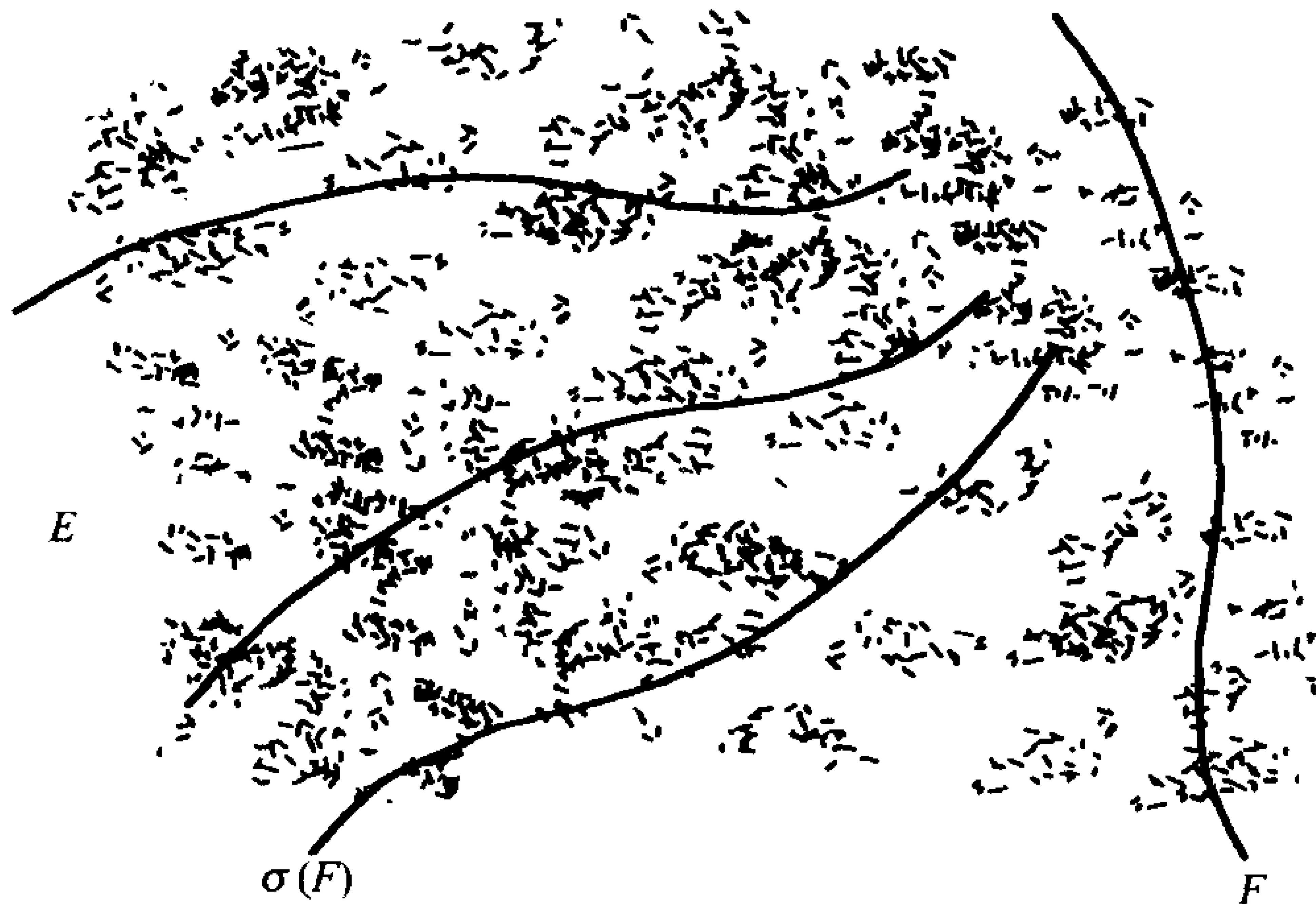



图 8.1　似尘集 $E$ 与曲线 $F$ 的各种各样全等变换下的像 $\sigma(F)$ 的交, 我们感兴趣的是对 "典型的"$\sigma$, $E\cap\sigma(F)$ 的维数

**定理 8.1**　若 $E,F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的博雷尔子集, 则对几乎所有的 $x\in\mathbf{R}^n$

$$\dim_{\mathrm{H}}(E\cap(F+x))\leqslant\max\{0,\dim_{\mathrm{H}}(E\times F)-n\}.\tag{8.3}$$

**证明**　这里只证明 $n=1$ 的情形, 对 $n>1$ 时的情形, 利用与推论 7.10 相似的高维公式可以类似证明. 设 $L_c$ 是 $xy$ 平面上满足方程 $x=y+c$ 的直线, 假设

$\dim_{\mathrm{H}}(E\times F)>1$, 从推论 7.10(将直线旋转 45°, 稍微改变记号) 得出, 对几乎所有的 $c\in\mathbf{R}$

$$\dim_{\mathrm{H}}((E\times F)\bigcap L_c)\leqslant\dim_{\mathrm{H}}(E\times F)-1. \tag{8.4}$$

但是当且仅当 $x\in E\bigcap(F+c)$ 时, 点 $(x,x-c)\in(E\times F)\bigcap L_c$. 于是, 对每一个 $c$, $(E\times F)\bigcap L_c$ 到 $x$ 轴的射影是集 $E\bigcap(F+c)$; 特别地, $\dim_{\mathrm{H}}(E\bigcap(F+c))=\dim_{\mathrm{H}}((E\times F)\bigcap L_c)$, 所以由式 (8.4) 即得结论. □

定理 8.1 是式 (8.1) 的部分情形, 但是一些例子表明即使是平移群被所有刚体运动代替, 这也是所希望取得的最好结果. 遗憾的是不等式 (7.6) 的方向与从式 (8.3) 导出的式 (8.1) 所需要的相反. 然而在很多例子中, 也确实有 $\dim_{\mathrm{H}}(E\times F)=\dim_{\mathrm{H}}E+\dim_{\mathrm{H}}F$; 例如, 如果 $\dim_{\mathrm{H}}F=\dim_{\mathrm{B}}F$, 在这样的条件下, 如果用 $\sigma(F)$ 代替平移 $F+x$ 就能得到式 (8.1)(见推论 7.4).

式 (8.2) 中对 $\dim_{\mathrm{H}}(E\bigcap\sigma(F))$ 的下界估计是相当难得到的, 已知的主要结论都包含在下面的定理中.

**定理 8.2** 设 $E,F\subset\mathbf{R}^n$ 是博雷尔集, $G$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的变换群, 如果下列条件之一成立

(a) $G$ 是相似群, $E$ 和 $F$ 为任意集.

(b) $G$ 是刚体运动群, $E$ 是任意集, $F$ 为可求长曲线、曲面或流形.

(c) $G$ 是刚体运动群, $E$ 和 $F$ 为任意集, 且 $\dim_{\mathrm{H}}E>(n+1)/2$ 和 $\dim_{\mathrm{H}}F>(n+1)/2$ 至少有一个成立.

则存在具有正测度的 $G$ 的子集, 使对这个子集中的变换 $\sigma$

$$\dim_{\mathrm{H}}(E\bigcap\sigma(F))\geqslant\dim_{\mathrm{H}}E+\dim_{\mathrm{H}}F-n. \tag{8.5}$$

*** 证明梗概** 证明用到了 4.3 节的位势理论. 在很多情形下, 论证过程很像投影定理 6.1 的证明过程, 但是各种各样的技巧上的困难使得证明变得更复杂.

简洁地, 如果 $s<\dim_{\mathrm{H}}F$ 且 $t<\dim_{\mathrm{H}}F$, 那么存在 $E$ 上的质量分布 $\mu$ 和 $F$ 上的质量分布 $\nu$, 且它们的能 $I_s(\mu)$ 和 $I_t(\nu)$ 分别都是有限的. 如果 $\nu$ 关于 $n$ 维勒贝格测度是绝对连续的, 也就是说, 如果存在一个函数 $f$, 使得对每一个集 $A$ 都有 $\nu(A)=\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$, 那么很自然地可以在 $E\bigcap\sigma(F)$ 上通过 $\eta_\sigma(A)=\int_A f\left(\sigma^{-1}(x)\right)\mathrm{d}\mu(x)$ 定义一个质量分布 $\eta_\sigma$. 如果能够证明对几乎所有的 $\sigma$, $I_{s+t-n}(\eta_\sigma)<\infty$ 成立, 则若 $\eta_\sigma(\mathbf{R}^n)>0$, 定理 4.13(a) 意味着 $\dim_{\mathrm{H}}(E\bigcap\sigma(F))\geqslant s+t-n$. 遗憾的是, 当 $F$ 是分形时, $\nu$ 的支撑在一个具有 $n$ 维零体积的集上, 所以不是绝对连续的. 为克服这个困难, 可以用支撑在 $F$ 上的 $\delta$ 平行体上绝对连续的质量分布 $\nu_\delta$ 逼近 $\nu$ . 那么, 如果 $\nu_\delta(A)=\int_A f_\delta(x)\,\mathrm{d}x$, $\eta_{\sigma,\delta}(A)=\int_A f_\delta\left(\sigma^{-1}(x)\right)\mathrm{d}\mu(x)$, 可以估计 $I_{s+t-n}(\eta_{\sigma,\delta})$, 且

在令 $\delta \to 0$ 时取极限. 简化积分 $\int I_{s+t-n}(\eta_{\sigma,\delta})\mathrm{d}\sigma$ 可得:

$$\varphi_\delta(\omega) = \int_{G_0}\int_{\mathbf{R}^n} \nu_\delta(y)\,\nu_\delta(y+\sigma(\omega))\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma,$$

其中关于 $\sigma$ 的积分是在 $F$ 的一个保持原点固定的变换子群 $G_0$ 上进行的. 如果对任意的 $\omega$ 和 $\delta$,

$$\varphi_\delta(\omega) \leqslant c^1 |\omega|^{t-n} \tag{8.6}$$

这里 $c^1$ 为常数, 就可以证明 $\int I_{s+t-n}(\eta_{\sigma,\delta})\,\mathrm{d}\sigma < c < \infty$, 其中 $c$ 与 $\delta$ 无关. 令 $\delta \to 0$, 在 $E\bigcap\sigma(F)$ 上, 测度 $\eta_{\sigma,\delta}$"收敛" 到测度 $\eta_\sigma$, 这里 $\int I_{s+t-n}(\eta_\sigma)\mathrm{d}\sigma < c$. 于是对几乎所有的 $\sigma$, 就有 $I_{s+t-n}(\eta_\sigma) < \infty$, 所以根据定理 4.13(a), 在一个正测度集上只要 $\eta_\sigma(E\bigcap\sigma(F)) > 0$, 就有

$$\dim_{\mathrm{H}}(E\bigcap\sigma(F)) \geqslant s+t-n.$$

在所列的条件 (a), (b) 和 (c) 情形下, 如果 $I_t(\nu) < \infty$, 就可以证明式 (8.6) 成立. 对 (a) 和 (b) 的情形相对较容易证明. 而在情形 (c) 下是较难处理的, 需要用到傅里叶变换理论. □

情形 (c) 中, 条件 $\dim_{\mathrm{H}} E > (n+1)/2$ 或 $\dim_{\mathrm{H}} F > (n+1)/2$ 是应用傅里叶变换的一个奇怪的结果; 而当 $n \geqslant 2$ 且 $n/2 < \dim_{\mathrm{H}} E$, $\dim_{\mathrm{H}} F \leqslant (n+1)/2$, 还不清楚对全等变换群定理是否仍然成立.

**例 8.3** 设 $F \subset \mathbf{R}$ 为三分康托尔集, 对 $\lambda, x \in \mathbf{R}$, 记 $\lambda F + x = \{\lambda y + x : y \in F\}$, 则对几乎所有的 $x \in \mathbf{R}$, $\dim_{\mathrm{H}} F\bigcap(F+x) \leqslant 2(\ln 2/\ln 3) - 1$, 而对 $(x,\lambda) \in \mathbf{R}^2$ 的具有平面正勒贝格测度的集合, $\dim_H(F\bigcap(\lambda F + x)) = 2(\ln 2/\ln 3) - 1$.

**计算** 在例 7.6 中已经证明了 $\dim_{\mathrm{H}}(E \times F) = 2(\ln 2/\ln 3)$, 所以, 所指出的维数可以从定理 8.1 和 8.2(a) 得出. □

交集的盒维数和填充维数可以有非常不规则的状况, 相应的交集的维数经常是"出乎意料地小", 参见练习 8.7

## *8.2 大 交 集

已经看到式 (8.1) 不必总是成立的, 在这一节中验证一类集, 对这类集式 (8.1) 显然不成立. 我们构造了 $\mathbf{R}$ 的一个较大的子集类 $C^s$, 使得 $C^s$ 中的集合的豪斯多夫维数至少为 $s$, 并且 $C^s$ 中的任何可数个集合的交的豪斯多夫维数也至少为 $s$. 这类集很自然地出现在数论中 ( 见 10.3 节).

集类 $C^s$ 是根据豪斯多夫测度定义中用到的和式 (2.1) 定义的. 对 $\mathbf{R}$ 的任何子集 $F$, 定义

$$\mathcal{H}_{\infty}^{s}(F)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s:\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\text{为}F\text{的任意覆盖}\right\}.$$

即在 $\mathcal{H}_{\infty}^{s}(F)$ 的定义中, 所用的覆盖对直径没有任何限制, 这就保证了如果 $I$ 是有界区间, 则 $\mathcal{H}_{\infty}^{s}(I)$ 一定是有限的, 这与考虑 $\mathcal{H}^s$ 的情形是不一样的. 易见 $\mathcal{H}_{\infty}^{s}(F_1\bigcup F_2)\leqslant\mathcal{H}_{\infty}^{s}(F_1)+\mathcal{H}_{\infty}^{s}(F_2)$, 及如果 $F_1\subset F_2$, 则 $\mathcal{H}_{\infty}^{s}(F_1)\leqslant\mathcal{H}_{\infty}^{s}(F_2)$.

回顾一下, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 是由属于无穷多个 $E_k$ 的点构成的集合, 称为上限集(lim sup sets). 设 $0<s<1$ 且 $[a,b]\subset\mathbf{R}$ 为某个闭子区间, 称 $[a,b]$ 的子集 $F$ 是集类$C^s[a,b]$ 的元, 如果

$$F\supset\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k,\tag{8.7}$$

这里 $\{E_k\}$ 是 $[a,b]$ 的子集列, 且满足

(i) 每一个 $E_k$ 是不交闭区间的有限并;

(ii) 对任意有界闭区间 $I$,

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{H}_{\infty}^{s}(I\bigcap E_k)=|I|^s.\tag{8.8}$$

(当然, $\mathcal{H}_{\infty}^{s}(I\bigcap E_k)\leqslant|I|^s$ 总是成立的, ) 下面定义 $C^s(-\infty,+\infty)$, 如果对每一个有界区间 $[a,b]$, $F\bigcap I\in C^s[a,b]$, 则称 $F$ 在 $C^s(-\infty,+\infty)$ 中. 下面的结论很容易从 $C^s[a,b]$ 推广到 $C^s(-\infty,+\infty)$ 上.

作为上面提到的集的例子, 可取 $E_k=\left\{x:|x-p/k|<k^{-3}\text{对某些整数 }P\text{ 成立}\right\}$, 所以 $F=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k$ 由那些对无穷多个正整数 $k$ 和某个 $P$, 满足不等式 $|x-p/k|<k^{-3}$ 的数 $x$ 组成. 正如将见到的, $F\in C^{1/3}(-\infty,+\infty)$.

在 $C^s[a,b]$ 中的任意集都在 $[a,b]$ 中稠; 如果 $F$ 在 $C^s[a,b]$ 中, 且 $I$ 是一个闭区间, 那么根据式 (8.8), 如果 $k_1$ 充分大, $I\bigcap E_{k_1}$ 包含一个闭区间 $I_1$. 类似地, 对 $k_2>k_1$, $I\bigcap E_{k_2}$ 包含一个闭区间 $I_2$. 这个过程一直进行下去, 可得到一个闭区间序列 $I\supset I_1\supset I_2\cdots$, 并且对每一个 $r, I_r\subset E_{k_r}$. 所以非空集 $\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}I_r$ 包含在无穷多个 $E_k$ 中, 所以也包含在 $F\bigcap I$ 中.

根据命题 3.4, $C^s[a,b]$ 中的任何集的盒维数都为 1. 现在证明这些集的豪斯多夫维数至少为 $s$; 而且, 因为 $C^s[a,b]$ 中的任何可数子集类的交仍然在 $C^s[a,b]$ 中, 所以这样的交集的维数至少也是 $s$ ; 同时, 对很大一类函数 $f$, 如果 $F$ 在 $C^s[a,b]$ 中, 则 $f(F)$ 也在 $C^s[f(a),f(b)]$ 中. 本节的证明需要一些技巧, 读者在第一次阅读时可以略去. 下面给出的引理把式 (8.8) 推广到闭区间的并上, 它是证明中必须用到的, 而且是证明的关键.

**引理 8.4**　设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbf{R}$ 的子集序列, 且对每一个有界闭区间 $I$

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{H}^s_\infty\left(I\bigcap E_k\right)=|I|^s. \tag{8.9}$$

那么, 如果 $A$ 是由闭区间的有限并得到的有界集, 则

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{H}^s_\infty\left(A\bigcap E_k\right)=\mathcal{H}^s_\infty(A). \tag{8.10}$$

**证明**　设 $A$ 包含 $m$ 个互不相交的, 且之间间隔最小为 $d>0$ 的区间, 给定 $\varepsilon>0$, 利用式 (8.9), 可以选择 $k_\varepsilon$, 使得当 $k\geqslant k_\varepsilon$ 时, 只要 $|I|\geqslant\varepsilon d$ 和 $I\subset A$ 成立就有

$$\mathcal{H}^s_\infty\left(I\bigcap E_k\right)>(1-\varepsilon)|I|^s. \tag{8.11}$$

(因为在明显的意义下 $\mathcal{H}^s_\infty(I\bigcap E_k)$ 关于 $I$ 是连续的, 可以找到 $k_\varepsilon$, 使得对所有这些 $I$, 式 (8.11) 同时成立.) 为了估计 $\mathcal{H}^s_\infty(A\bigcap E_k)$, 设 $\{U_i\}$ 是 $A\bigcap E_k$ 的覆盖, 因为 $A\bigcap E_k$ 是紧的 (见 2.4 节). 可以假设这个覆盖是有限的, 并且可以假设 $U_i$ 都是端点在 $A$ 中的闭区间, 这样, 除了可能在端点外, 这些区间还是不交的. 根据 $|U_i|\geqslant d$ 或 $|U_i|<d$ 可以把 $U_i$ 分成两组, 集 $A\backslash\bigcup_{|U_i|\geqslant d}U_i$ 包含互不相交的区间 $V_1,\cdots,V_r$, 这里 $r\leqslant m$, 且

$$A\subset\left(\bigcup_{|U_i|\geqslant d}U_i\right)\bigcup\left(\bigcup_j\overline{V}_j\right). \tag{8.12}$$

显然, 任意满足 $|U_i|<d$ 的 $U_i$ 包含在 $A$ 的一个区间中, 所以也包含在某个 $\overline{V_j}$ 中. 对任意 $j$, 包含在 $\overline{V_j}$ 中的集 $U_i$ 覆盖 $\overline{V_j}\bigcap E_k$, 所以根据式 (8.11), 如果 $|V_j|\geqslant\varepsilon d$, 则

$$\sum_{\{i:U_i\subset\overline{V_j}\}}|U_i|^s\geqslant\mathcal{H}^s_\infty\left(\overline{V_j}\bigcap E_k\right)>(1-\varepsilon)|V_j|^s.$$

因此

$$\sum_i|U_i|^s\geqslant\sum_{|U_i|\geqslant d}|U_i|^s+\sum_{|V_j|\geqslant\varepsilon d}\sum_{U_i\subset\overline{V_j}}|U_i|^s\geqslant\sum_{|U_i|\geqslant d}|U_i|^s+\sum_{|V_j|\geqslant\varepsilon d}(1-\varepsilon)|V_j|^s. \tag{8.13}$$

从式 (8.12) 得到

$$\mathcal{H}^s_\infty(A)\leqslant\sum_{|U_i|\geqslant d}|U_i|^s+\sum_{|V_j|\geqslant\varepsilon d}|V_j|^s+\sum_{|V_j|<\varepsilon d}|V_j|^s\leqslant\sum_{|U_i|\geqslant d}|U_i|^s+\sum_{|V_j|\geqslant\varepsilon d}|V_j|^s+(\varepsilon d)^s m.$$

结合式 (8.13), 得到: 对 $A\bigcap E_k$ 的任意覆盖 $\{U_i\}$, 有

$$\mathcal{H}^s_\infty(A)\leqslant(1-\varepsilon)^{-1}\sum_i|U_i|^s+(\varepsilon d)^s m.$$

于是, 如果 $k \geqslant k_\varepsilon$, 则

$$\mathcal{H}_\infty^s(A) \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}\mathcal{H}_\infty^s(A\bigcap E_k) + (\varepsilon d)^s m,$$

因此, 式 (8.10) 得证. □

反复应用这个引理可以得到需要的维数估计.

**命题 8.5** 如果 $F \in C^s[a,b]$, 那么 $\mathcal{H}^s(F) > 0$, 特别有 $\dim_{\mathrm{H}} F \geqslant s$.

**证明** 为了简化记号, 假定 $[a,b]=[0,1]$, 设 $\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k \subset F \subset \bigcup\limits_i U_i$, 这里 $U_i$ 为开集. 在式 (8.8) 中取 $I=[0,1]$, 就可以找到数 $k_1$, 使 $\mathcal{H}_\infty^s(E_{k_1}) > 1/2$. 因为 $E_{k_1}$ 是闭区间的有限并, 引理 8.4 意味着存在数 $k_2 > k_1$ 使得 $\mathcal{H}_\infty^s(E_{k_1}\bigcap E_{k_2}) > 1/2$. 这个过程继续下去, 可以得到序列 $k_1 < k_2 < \cdots$, 使得对所有 $r$, $\mathcal{H}_\infty^s(E_{k_1}\bigcap E_{k_2}\bigcap\cdots\bigcap E_{k_r}) > 1/2$, 因此有 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_{k_i} \subset F \subset \bigcup\limits_i U_i$. 因为 $E_{k_1}\bigcap E_{k_2}\bigcap\cdots\bigcap E_{k_r}$ 是紧的 (也就是闭的和有界的) 不增序列, 并且 $\bigcup\limits_i U_i$ 是开的, 存在一个整数 $r$, 使得 $E_{k_1}\bigcap E_{k_2}\bigcap\cdots\bigcap E_{k_r} \subset \bigcup\limits_i U_i$. 由此知对 $F$ 的任何开覆盖, $\sum\limits_i |U_i|^s \geqslant \mathcal{H}_\infty^s(E_{k_1}\bigcap E_{k_2}\bigcap\cdots\bigcap E_{k_r}) > 1/2$, 所以 $\mathcal{H}^s(F) \geqslant 1/2$. □

**命题 8.6** 设对 $j=1,2,\cdots$, $F_j \in C^s[a,b]$, 则 $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} F_j \in C^s[a,b]$.

**证明** 对任意 $j$, 存在集序列 $\{E_{j,\,k}\}$, $\{E_{j,\,k}\}$ 中的每一个集都是闭区间的有限并, 使得 $F_j \supset \overline{\lim_{k\to\infty}} E_{j,\,k}$, 这里, 对每个区间 $I$, $\lim\limits_{k\to\infty}\mathcal{H}_\infty^s(I\bigcap E_{j,k}) = \mathcal{H}_\infty^s(I)$. 由引理 8.4, 对任何闭区间的有限并 $A$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{H}_\infty^s(A\bigcap E_{j,\,k}) = \mathcal{H}_\infty^s(A). \tag{8.14}$$

存在可数个区间 $[c,d] \subset [a,b]$, 这里 $c$ 和 $d$ 都为有理数, 设 $I_1, I_2, \cdots$ 为这可数个区间.

对每一个 $r$, 如下定义集 $G_r$, 利用式 (8.14) 可以选择足够大的 $k_1 \geqslant r$, 使得对 $m=1,2,\cdots,r$

$$\mathcal{H}_\infty^s(I_m\bigcap E_{1,k_1}) > \mathcal{H}_\infty^s(I_m) - 1/r$$

同时成立. 再利用式 (8.14), 取 $A = I_m\bigcap E_{1,k_1}$, 可以找到 $k_2 \geqslant r$, 使得对所有 $m=1,\cdots r$

$$\mathcal{H}_\infty^s(I_m\bigcap E_{1,k_1}\bigcap E_{2,k_2}) > \mathcal{H}_\infty^s(I_m) - 1/r.$$

以这种方法继续下去, 可得到 $k_1,\cdots,k_r \geqslant r$, 使得对所有的 $m=1,\cdots r$

$$\mathcal{H}_\infty^s\left(I_m \cap \bigcap_{j=1}^{r} E_{j,k_j}\right) > \mathcal{H}_\infty^s(I_m) - 1/r. \tag{8.15}$$

对每一个 $r$, 设 $G_r$ 是闭区间的有限交

$$G_r = \bigcap_{j=1}^{r} E_{j,k_j}. \tag{8.16}$$

设 $I \subset [a,b]$ 是任意闭区间, 给定 $\varepsilon > 0$, 存在一个区间 $I_m \subset I$ 使得 $\mathcal{H}^s_\infty(I_m) > \mathcal{H}^s_\infty(I)-\varepsilon/2$. 如果 $r \geqslant m$ 且 $r > 2/\varepsilon$, 由式 (8.16) 得出 $\mathcal{H}^s_\infty(I \bigcap G_r) \geqslant \mathcal{H}^s_\infty(I_m \bigcap G_r) > \mathcal{H}^s_\infty(I_m) - 1/r > \mathcal{H}^s_\infty(I) - \varepsilon$, 所以

$$\lim_{r\to\infty} \mathcal{H}^s_\infty(I \bigcap G_r) = \mathcal{H}^s_\infty(I).$$

设 $j$ 为任意正整数, 如果 $r > j$ 且 $x \in G_r$, 则由式 (8.16) 得出 $x \in E_{j,k_j}$. 于是, 如果 $x \in \overline{\lim_{r\to\infty}} G_r$, 那么对无穷多个 $k_j$ 都有 $x \in E_{j,k_j}$, 所以 $x \in \overline{\lim_{i\to\infty}} E_{j,i} \subset F_j$. 因此对每一个 $j$, $\overline{\lim_{r\to\infty}} G_r \subset F_j$ , 即知 $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{C}^s[a,b]$. □

**推论 8.7**　设对 $j = 1,2,\cdots,F_j \in \mathcal{C}^s[a,b]$, 则 $\dim_{\mathrm{H}} \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j \geqslant s$

**证明**　由命题 8.5 和 8.6 直接得出结论.

显然, 如果 $F$ 在 $\mathcal{C}^s(-\infty,\infty)$ 中, 那么平移集 $F+x$ 也在 $\mathcal{C}^s(-\infty,\infty)$ 中. 因此, 给定 $\mathcal{C}^s(-\infty,\infty)$ 中的集 $F$ 和数列 $x_1,x_2,\cdots$, 则 $\bigcap_{i=1}^{\infty}(F+x_i)$ 是 $\mathcal{C}^s(-\infty,\infty)$ 中的元, 且这个交的维数至少为 $s$, 同样的思想可以应用到 $F$ 的比较一般的变换上.

**命题 8.8**　设 $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ 是一个具有连续导数的映射, 而且存在常数 $c > 0$, 使得 $|f'(x)| > c$, 如果 $F \in \mathcal{C}^s[a,b]$, 那么 $f(F) \in \mathcal{C}^s[f(a),f(b)]$.

**证明**　这个命题可以用证明引理 8.4 的类似方法得到, 这里略去证明的细节 (相当冗长的). □

在这个典型的集类 $\mathcal{C}^s$ 中, $E_k$ 是由区间构成的并且这些区间的长度和区间之间的距离当 $k \to \infty$ 时趋于 0.

**例 8.9**　固定 $\alpha > 2$, 设 $E_k = \left\{x : |x - p/k| \leqslant k^{-\alpha} \text{对某个整数 } p \text{ 成立}\right\}$, 即 $E_k$ 是一些长为 $2k^{-\alpha}$ 且具有相等间隔的区间的并. 则对任意的 $s < 1/\alpha$

$$F = \overline{\lim_{k\to\infty}} E_k \in \mathcal{C}^s(-\infty,+\infty).$$

**证明**　取 $0 < s < 1/\alpha$ 和一个有界闭区间 $I$, 必须证明

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \mathcal{H}^s_\infty(I \bigcap E_k) = |I|^s. \tag{8.17}$$

区间 $I$ 包含 $m$ 个 $E_k$ 中的长为 $2k^{-\alpha}$ 的完整区间, 这里 $m \geqslant k|I| - 2$. 设 $\mu$ 是 $I \bigcap E_k$ 上的质量分布, 它是把各为 $1/m$ 的质量均匀分布在包含于 $I$ 中的每一个 $E_k$ 的完

整区间上而得到的. 为了估计 $\mathcal{H}^s_\infty(I\bigcap E_k)$, 设 $U$ 是 $I\bigcap E_k$ 的覆盖中的一个集, 可以假定 $U$ 是一个闭区间且 $U$ 的端点是 $I\bigcap E_k$ 中的点. 那么 $U$ 最多与 $I\bigcap E_k$ 中的 $k|U|+2$ 个区间相交. 如果 $1/2k\leqslant|U|\leqslant|I|$, 则

$$\begin{aligned}\mu(U)&\leqslant(k|U|+2)/m\leqslant(k|U|+2)/(k|I|-2)\\&=\left(|U|+2k^{-1}\right)/\left(|I|-2k^{-1}\right)\\&=|U|^s\left(|U|^{1-s}+2k^{-1}|U|^{-s}\right)/\left(|I|-2k^{-1}\right)\\&\leqslant|U|^s\left(|U|^{1-s}+2^{s+1}k^{s-1}\right)/\left(|I|-2k^{-1}\right)\\&=\frac{|U|^s}{|I|^s}\cdot\frac{\left(|U|^{1-s}|I|^{s-1}+2^{s+1}k^{s-1}|I|^{s-1}\right)}{\left(1-2k^{-1}|I|^{-1}\right)}\\&\leqslant\frac{|U|^s}{|I|^s}\cdot\frac{\left(1+2^{s+1}k^{s-1}|I|^{s-1}\right)}{\left(1-2k^{-1}|I|^{-1}\right)}.\end{aligned}\tag{8.18}$$

另一方面, 如果 $k$ 充分大且 $|U|<1/2k$, 因为 $U$ 的端点在 $E_k$ 上, 则知 $U$ 恰好只能与 $E_k$ 中的一个区间相交, 所以 $|U|\leqslant 2k^{-\alpha}$. 质量 $1/m$ 均匀分布在长为 $2k^{-\alpha}$ 的这个区间上, 所以

$$\begin{aligned}\mu(U)&\leqslant|U|/(2k^{-\alpha}m)=|U|^s|U|^{1-s}/(2k^{-\alpha}m)\leqslant|U|^s\left(2k^{-\alpha}\right)^{1-s}/(2k^{-\alpha}(k|I|-2))\\&\leqslant|U|^s2^{-s}k^{s\alpha-1}/\left(|I|-2k^{-1}\right).\end{aligned}\tag{8.19}$$

区间 $I$ 和 $\varepsilon>0$ 是给定的, 那么如果 $k$ 足够大, 利用式 (8.18) 和式 (8.19), 则对所有覆盖区间 $U$

$$\mu(U)\leqslant(1+\varepsilon)|U|^s/|I|^s.$$

因此如果 $I\bigcap E_k\subset\bigcup_i U_i$, 那么

$$1=\mu(I\bigcap E_k)\leqslant\sum_i\mu(U_i)\leqslant(1+\varepsilon)|I|^{-s}\sum_i|U_i|^s$$

所以 $\mathcal{H}^s_\infty(I\bigcap E_k)\geqslant|I|^s/(1+\varepsilon)$, 由此, 式 (8.17) 得证. □

在这个例子中, 如果 $s<1/a$, 则 $F$ 属于 $C^s(-\infty,+\infty)$, 所以根据命题 (8.5), $\dim_{\rm H}F\geqslant 1/\alpha$. 此外, 很清楚, 对任意实数 $x$, 平移集 $F+x$ 属于 $C^s(-\infty,+\infty)$, 所以根据命题 8.6, 对任何可数集 $\{x_1,x_2,\cdots\}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(F+x_i)$ 属于 $C^s(-\infty,+\infty)$. 这意味着 $\dim_{\rm H}\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(F+x_i)\geqslant 1/\alpha$. 更一般地, 对由命题 8.8 给出的 "适当的" 函数 $f$, $f(F)$

都在 $C^s(-\infty,+\infty)$ 中, 这就得出一大类 $C^s$ 中的集, 它们的可数交的维数也至少为 $1/\alpha$

在 10.3 节中, 将指出如何改进例 8.9, 使对任意的 $s<2/\alpha$, 可以得到有相应维数结论的 $C^s(-\infty,+\infty)$ 中的集 $F$.

## 8.3　注记和参考文献

把集合的交集作为集合之间运动关系来研究, 这是众所周知的积分几何课题的一部分. 对经典情形的完整论述是由 Santaló(1976) 给出的, 8.1 节中分形的交集公式的主要参考文献是 kahane(1986) 和 Mattlia(1984,1985, 1995) .

关于交集的填充维数的奇异性质, 可以参见 Falconer, Järvenpää and Mattila(1999) 和 Csörnyei(2001).

有一些关于带有大交集类定义的论述, 由 Baker and Schmidt(1970), Falcoer(1985b) 等给出. Dodson, Rynne and Vickers(1990) 提出了一类重要的 "无处不在"(ubiquitous) 系统, 并且提出的 "无处不在定理" 为求上限集提供了一个强有力的技巧. Rynne(1942) 比较了大交集的不同定义, Falconer(1994) 给出了关于大交集的一般理论, 同时也考虑了填充维数.

### 练　习

**8.1**　设 $E$ 和 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的可求长曲线, $\sigma$ 是一个刚体运动, 证明经典积分几何的 Poincaré 公式

$$4\times \text{length}(E)\,\text{length}(F)=\int\left(\text{集 } E\cap\sigma(F)\text{ 所包含的点数}\right)\mathrm{d}\sigma$$

这里的积分是对刚体运动集上的自然测度积分.(提示: 先对 $E$ 和 $F$ 是直线段证明, 然后对多边形证明, 通过逼近得出一般结论.)

**8.2**　证明: 如果曲线 $C$ 包围平面上的一个 (紧) 凸集, 那么 $C$ 的长度由

$$\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\text{length}(\text{proj}_\theta C)\,d\theta$$

给出, 这里 $\text{length}(\text{proj}_\theta C)$ 是 $\text{proj}_\theta C$ 的长度.(提示: 在练习 8.1 中把 $E$ 取为 $C$, $F$ 取为一个长直线段).

**8.3**　在平面上, 设 $E$ 是两个三分康托尔集的乘积, $F$ 是 (i) 一个圆; (ii)vonKoch 曲线; (iii)$E$ 的全等拷贝. 在每一种情形下, 对全等变换 $\sigma$, $E\cap\sigma(F)$ 的豪斯多夫维数各是多少?

**8.4**　证明定理 8.1 的结论可以推广为: 如果 $\dim_{\text{H}}(E\times F)<n$, 则对几乎所有的 $x$, $E\cap(F+x)$ 是空的.

**8.5**　取 $E$ 是在 $\mathbf{R}^2$ 的一个区域上稠密集, $F$ 为一单位直线段, 证明: 如果用盒维数代替豪斯多夫维数, 甚至对相似群, 式 (8.5) 都不成立.

**8.6** 设 $1 < s < 2$, 在单位圆盘 $B$ 上构造一个平面 $s$ 集 $F$, 使得, 如果 $E$ 是长度为 2 的直线段与 $B$ 的内部的交, 那么 $E\bigcap F$ 是一个 $(s-1)$ 集.

**8.7** 设 $E$ 是平行线段集合:

$$E = \{(0,0)\}\bigcup\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x, n^{-1/2}) : 0 \leqslant x \leqslant n^{-1/2}\}.$$

证明: $\underline{\dim}_{\rm B}E \geqslant 4/3$, 且对任意不通过原点的直线 $L, \dim_{\rm B}(L\bigcap E) = 0$( 提示: 见例 3·5).

**8.8** 设 $E_k$ 是展开形式为 $m \cdot a_1a_2\cdots$ 其中 $a_k = 0$ 或 2 的三进制实数组成的集合, 证明: 对任意 $0 < s < 1$, $F = \overline{\lim}_{k\to\infty}E_k$ 都属于集类 $\mathcal{C}^s(-\infty, \infty)$.(注意 $F$ 是由在三进制展开式中, 有无穷多个不等于 1 的数码的数组成的集合.) 由此导出 $\dim_{\rm H} F = 1$, 以及对任何可数序列 $x_1, x_2, \cdots, \dim_{\rm H}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(F + x_i)\right) = 1$.

# 第二部分

# 应用与实例

# 第 9 章 迭代函数系 —— 自相似集与自仿射集

## 9.1 迭代函数系

许多分形是由一些与整体以某种方式相似的部分组成的，比如三分康托尔集是与它的自身相似的两部分的并；而 von Koch 曲线则是由四个与之相似的部分组成的. 这些自相似性不仅是这类分形的性质，实际上可以用来作为它们的定义. 迭代函数系通过一致的方法，经常能得到一种简单的定义维数的方法.

设 $D$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集，经常用的是 $D=\mathbf{R}^n$；映射 $S:D\to D$ 称为是 $D$ 上的压缩(contraction)，如果对任意 $x,y\in D$，存在满足 $0<c<1$ 的数 $c$，使 $|S(x)-S(y)|\leqslant c|x-y|$. 显然，任何压缩映射都是连续的. 如果等号成立，即如果 $|S(x)-S(y)|=c|x-y|$，则 $S$ 把集变成几何相似集，此时，称映射 $S$ 为*压缩相似的*(contracting similarity).

一组有限的压缩映射族 $\{S_1,\cdots,S_m\}$，其中 $m\geqslant 2$，称为一个*迭代函数系*或 IFS；称 $D$ 的非空紧子集 $F$ 为 IFS 的吸引子 (或不变集)，如果有

$$F=\bigcup_{i=1}^{m}S_i(F).$$

迭代函数系的基本性质就是它决定了唯一的一个吸引子，通常也就是分形. 一个简单的例子，当 $F$ 是三分康托尔集的情形. 设 $S_1,S_2$ 都是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的变换，分别是

$$S_1(x)=\frac{1}{3}x,\quad S_2(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}.$$

则 $S_1(F)$ 和 $S_2(F)$ 分别正好是 $F$ 的左、右各“一半”，而使 $F=S_1(F)\bigcup S_2(F)$；因此 $F$ 就是由压缩映射 $\{S_1,S_2\}$ 组成的 IFS 的吸引子，这两个映射正表现出了康托尔集的基本自相似性.

下面将证明，IFS 有唯一的 (非空紧的，即闭的而且有界的) 吸引子这个基本性质. 这意味着，比如三分康托尔集作为上面给出的映射$\{S_1,S_2\}$的吸引子是完全确定的.

这里，在 $D$ 的子集之间定义一个度量或者距离 $d$，用 $\mathcal{D}$ 表示 $D$ 的全部非空紧子集组成的集类，称所有与 $A$ 距离不大于 $\delta$ 的 $D$ 上的点组成的集为 $A$ 的 $\delta$ 平行体，即 $A_\delta=\left\{x\in D:|x-a|\leqslant\delta\text{ 对于某个 }a\in A\text{成立}\right\}$. 在 $\mathcal{D}$ 的任意两个集 $A$ 和 $B$ 之间定义距离 $d(A,B)$ 使之成为距离空间，这里 $d(A,B)$ 是定义为使 $A$ 的 $\delta$ 平行体

$A_\delta$ 包含 $B$, 同时也使 $B$ 的 $\delta$ 平行体 $B_\delta$ 也包含 $A$ 的最小 $\delta$, 即:

$$d(A,B) = \inf\left\{\delta : A \subset B_\delta \text{ 且 } B \subset A_\delta\right\}$$

(见图 9.1). 简单的验证表明 $d$ 是一般为度量或距离函数, 即它满足三个条件: 对任意 $A,B,C \in \mathcal{D}$, (i) $d(A,B) \geqslant 0$, 当且仅当 $A = B$ 时等号成立, (ii) $d(A,B) = d(B,A)$, (iii) $d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(C,B)$. 度量 $d$ 就是 $\mathcal{D}$ 上的豪斯多夫度量. 特别地, 如果 $d(A,B)$ 较小, 则作为集合, $A$ 与 $B$ 之间很接近.

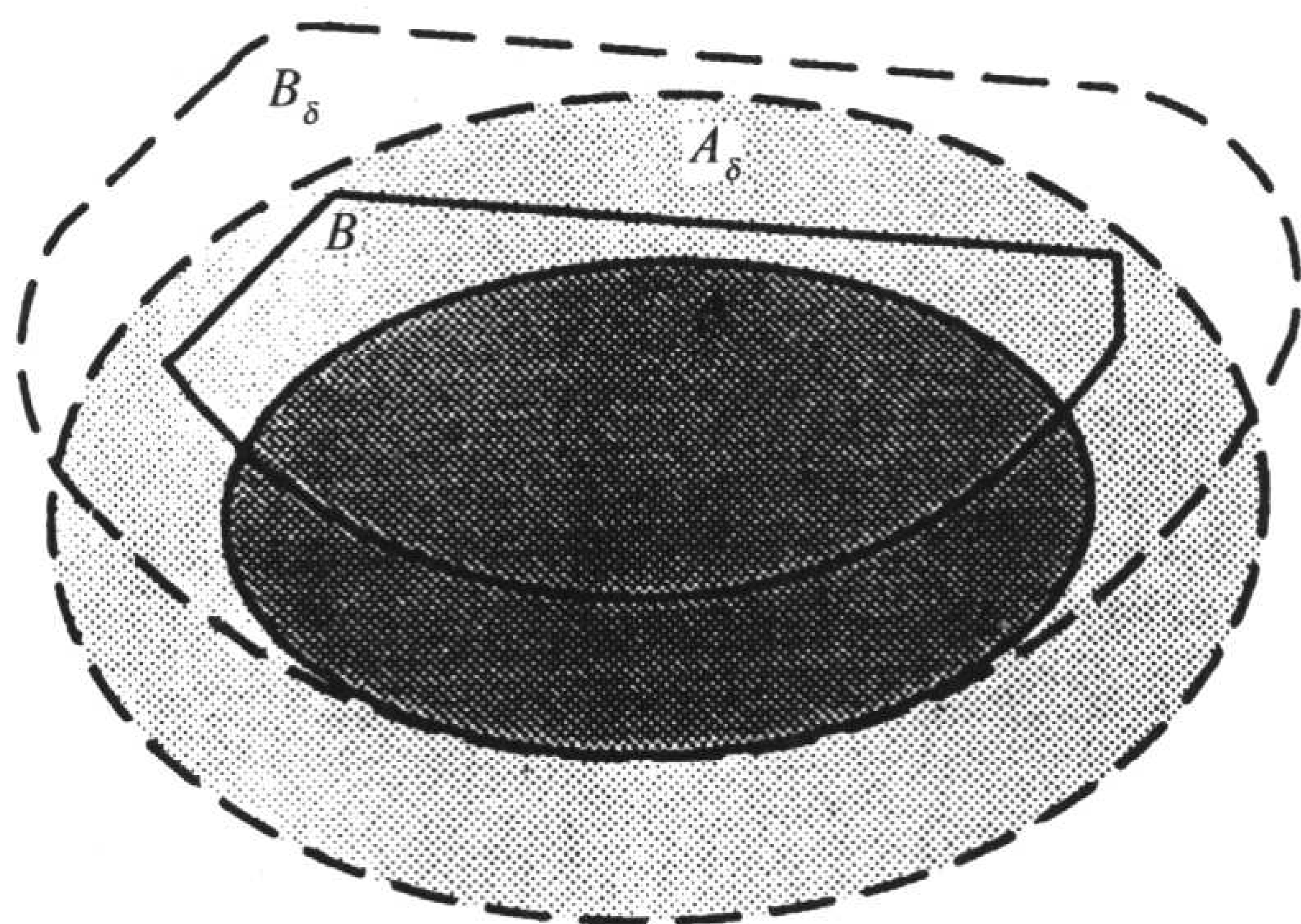



图 9.1 $A,B$ 两集之间的豪斯多夫距离是使 $A$ 的 $\delta$ 平行体 $A_\delta$ 包含 $B$, 同时 $B$ 的 $\delta$ 平行体也包含 $A$ 的最小的大于零的 $\delta$

下面给出 IFS 上基本结论的两种证明: 第一种依赖于 Banach 压缩映射定理, 第二种是直接、基本的证明.

**定理 9.1** 考虑由 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上压缩映射族 $\{S_1, \cdots, S_m\}$ 给出的迭代函数系, 即

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leqslant c_i\,|x-y| \quad (x,y \in D) \tag{9.1}$$

对每个 $i$, $c_i < 1$. 则存在唯一的吸引子, 即非空紧集 $F$, 满足:

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F). \tag{9.2}$$

而且, 如果在非空紧子集类 $\mathcal{D}$ 上定义变换 $\mathcal{S}$, 使对 $E \in \mathcal{D}$

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E) \tag{9.3}$$

且记 $S^k$ 为 $S$ 的 $k$ 次迭代 (所以, $S^0(E) = E$ 且对 $k \geqslant 1, S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$), 则对任意 $E \in \mathcal{D}$, 和任何 $i$, $S_i(E) \subset E$, 且

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E). \tag{9.4}$$

**第一种证明** 映射 $S$ 把 $\mathcal{D}$ 中的集变成 $\mathcal{D}$ 中的其他集, 如果 $A, B \in \mathcal{D}$, 则

$$d(S(A), S(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(A), \bigcup_{i=1}^{m} S_i(B)\right) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} d(S_i(A), S_i(B))$$

利用度量 $d$ 的定义, 并注意到对每个 $i$, 如果 $\delta$ 平行体 $(S_i(A))_\delta$ 都包含 $S_i(B)$, 则 $\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(A)\right)_\delta$ 也包含 $\bigcup_{i=1}^{m} S_i(B)$. 由式 (9.1)

$$d(S(A), S(B)) \leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant m} c_i\right) d(A, B). \tag{9.5}$$

可以看到, $d$ 是 $\mathcal{D}$ 上的全度量, 即 $\mathcal{D}$ 中的每个柯西列集合都收敛到 $\mathcal{D}$ 中的一个集合. 既然 $0 < \max_{1\leqslant i\leqslant m} c_i < 1$, 式 (9.5) 意味着 $S$ 是全度量空间 $(\mathcal{D}, d)$ 上的一个压缩映射. 由 Banach 压缩映射定理, $S$ 有唯一的不动点, 即存在唯一的集合 $F \in \mathcal{D}$, 使得 $S(F) = F$, 此即式 (9.2), 并且当 $k \to \infty$ 时, $S^k(E) \to F$. 特别地, 如果对任意 $i$, $S_i(E) \subset E$, 那么 $S(E) \subset E$, 因此 $S^k(E)$ 是包含 $F$ 的递减的非空紧集系列, 交集 $\bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$ 必然等于 $F$. □

**第二种证明** 设 $E$ 是 $\mathcal{D}$ 中的任意集, 使得对任意 $i$, $S_i(E) \subset E$; 例如, 只要 $r$ 充分大, $E = D \bigcap B(0, r)$ 就是这样的一个集. 则 $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$, 所以 $S^k(E)$ 是一递减的非空紧集系列, 它必定有非空的紧交集 $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$. 因为 $S^k(E)$ 是递减系列, 由此得出 $S(F) = F$, 所以 $F$ 满足式 (9.2), 是 IFS 的一个吸引子.

为证明吸引子是唯一的, 如第一种证明中那样使用式 (9.5), 假设 $A$、$B$ 都是吸引子, 那么 $S(A) = A$, $S(B) = B$; 因为 $0 < \max_{1\leqslant i\leqslant m} c_i < 1$, 从式 (9.5) 即得 $d(A, B) = 0$, 这意味着 $A = B$. □

与迭代函数系相联系的有两个主要的问题：第一个问题就是重现或“编码”一个给定的作为某些 IFS 的吸引子的集合; 第二个问题就是“解码”相应的吸引子所对应的 IFS. 在这两种情形下, 我们都希望对吸引子的结构和维数进行分析, 而 IFS 对此将起到很重大的作用.

当至少 $F$ 是自相似的或者是自仿射时, 经常可以用观察的方法来寻找一个具有给定唯一吸引子 $F$ 的 IFS. 例如, 容易看出康托尔尘 (图 0.4) 是四个相似变换的吸引子, 这些变换给出了这个集基本的自相似性：

$$S_1(x, y) = \left(\frac{1}{4}x, \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}\right), \qquad S_2(x, y) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{4}y\right),$$

$$S_3(x, y) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}\right), \qquad S_4(x, y) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}, \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}\right).$$

一般情况下则不太可能找到 IFS 使它以一个给定的集为吸引子, 但通常可以找到一个 IFS, 使它的吸引子与要求的集合非常接近. 用 IFS 重现一般物象的问题将在 9.5 节讨论.

定理 9.1 中介绍的变换 $S$ 是计算 IFS 的吸引子的关键; 式 (9.4) 也早已给出了计算的方法. 事实上, 从 $\mathcal{D}$ 中任意初始集 $E$ 开始的迭代序列 $S^k(E)$ 在 $d(S^k(E),F)\to 0$ 的意义下收敛到吸引子 $F$. 这是因为式 (9.5) 意味着 $d(S(E),F)=d(S(E),S(F))\leqslant cd(E,F)$, 使得 $d(S^k(E),F)\leqslant c^k d(E,F)$, 其中 $c=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} c_i<1$. 于是 $S^k(E)$ 给出了对 $F$ 的越来越好的逼近. 如果 $F$ 是分形, 有时称这些近似集为 $F$ 的 "先分形"(pre-fractals).

对任意 $k$

$$S^k(E)=\bigcup_{I_k} S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(E)=\bigcup_{I_k} S_{i_1}(S_{i_2}(\cdots(S_{i_k}(E))\cdots)) \tag{9.6}$$

这里是对所有 $k$ 项的序列 $(i_1,\cdots,i_k)$, $1\leqslant i_j\leqslant m$ 的集 $I_k$ 求并 (见图 9.2).($S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}$ 表示复合映射所以 $(S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k})(x)=S_{i_1}(S_{i_2}(\cdots(S_{i_k}(x))\cdots))$. 如果对每个 $i$, $S_i(E)$ 包含于 $E$ 中, 并且如果 $x$ 是 $F$ 中的点, 则由式 (9.4), 存在序列 $(i_1,i_2\cdots)$(不必唯一) 使对任意 $k$, $x\in S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(E)$. 这个序列就给出了 $x$ 的一个自然编码, 其中

$$x=x_{i_1,i_2,\cdots}=\bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(E), \tag{9.7}$$

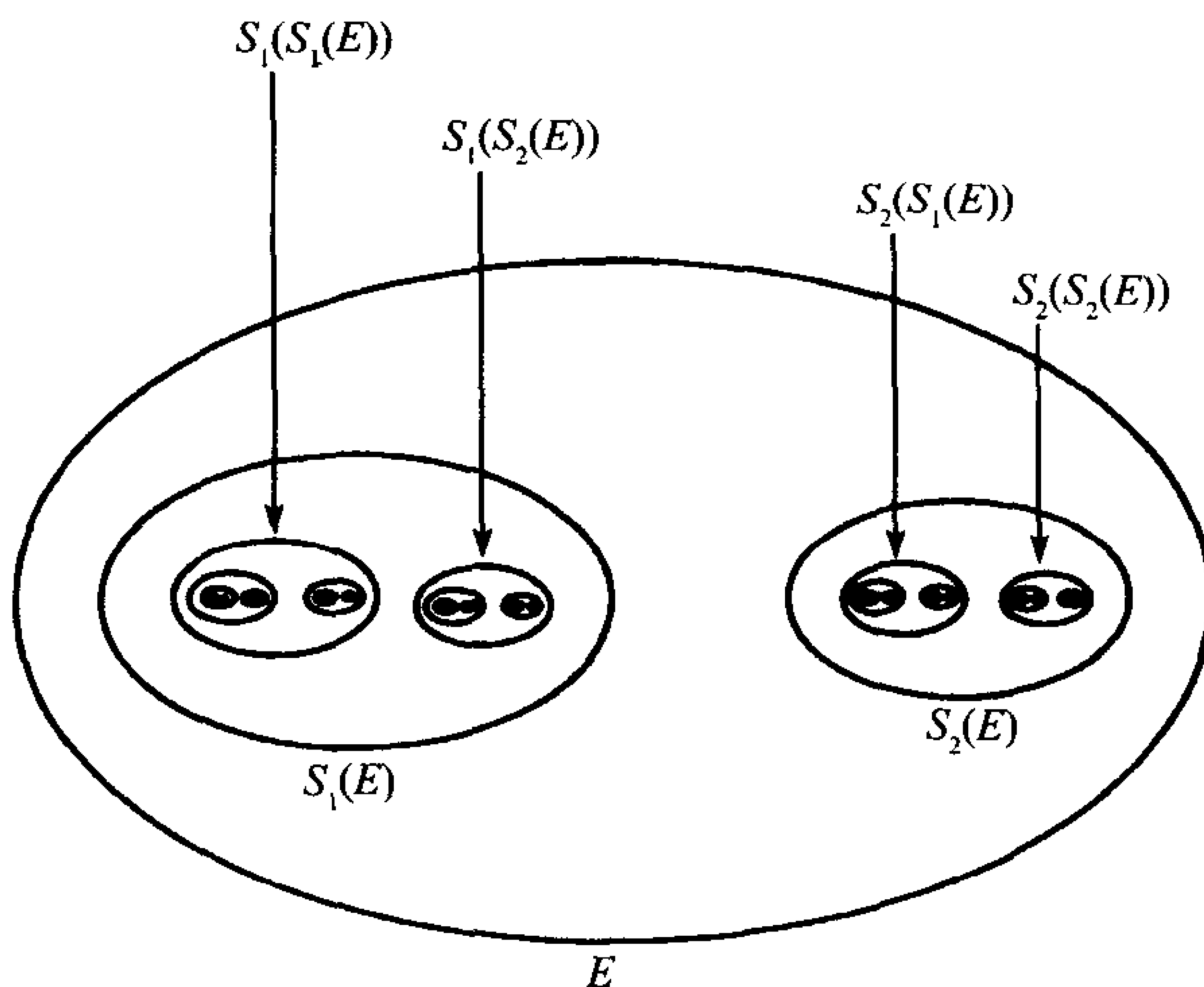



图 9.2 $S_1$, $S_2$ 的不变集的构造. 它们把大椭圆 $E$ 分别映射成椭圆 $S_1(E)$ 和 $S_2(E)$. 集 $S^k(E)=\bigcup\limits_{i_k=1,2} S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(E)$ 给出了吸引子 $F$ 的越来越好的逼近

于是

$$F=\bigcup\{x_{i_1,i_2,\cdots}\}.$$

如果对所有的 $i$, $S_i(E)$ 包含于 $E$ 中, 则这个 $x_{i_1,i_2,\cdots}$ 的表达式是与 $E$ 无关的.

注意, 如果式 (9.2) 中的并是不交的, 则 $F$ 必定是全不连通的 (假定 $S_i$ 是单射), 因为如果 $x_{i_1,i_2,\cdots}\neq x_{i'_1,i'_2,\cdots}$, 可以找到 $k$, 使 $(i_1,\cdots,i_k)\neq(i'_1,\cdots,i'_k)$. 因此不相交的闭集 $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(F)$ 及 $S_{i'_1}\circ\cdots\circ S_{i'_k}(F)$ 必然把这两点分开.

可以再一次用 $S_1(x)=x/3$, $S_2(x)=x/3+2/3$ 及 $F$ 是三分康托尔集为例子来说明. 如果 $E$=[0, 1], 则 $S^k(E)=E_k$ 就是在通常康托尔集构造过程中第 $k$ 步得到的 $2^k$ 个长度各为 $3^{-k}$ 的基本区间组成的集 (见图 0.1). 并且 $x_{i_1,i_2,\cdots}$ 是可以表成 3 进制展开式 0. $a_1a_2\cdots$ 的康托尔集的点, 其中如果 $i_k=1$, 则 $a_k=0$, 而如果 $i_k=2$, 则 $a_k=2$. 合适选择的初始集 $E$ 的先分形 $S^k(E)$ 给出了许多分形的常见的构造, 称 $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(E)$ 为构造的 $k$ 水平集(level-k set).

这个理论提供了两种如图 9.3 表示的用计算机绘制 IFS 的平面吸引子的方法. 在第一种方法中, 取任意的初始集 $E$(例如正方形), 并对一适合的 $k$ 值按式 (9.6) 给出 $F$ 的 $k$ 步近似集 $S^k(E)$. 集 $S^k(E)$ 由 $m^k$ 个小集组成, 这些集或者都能详细全部绘出, 或者每个集有一个代表性的点可以被画出. 如果 $E$ 能被选成一个直线段, 在这种方法下 $S_1(E),\cdots,S_m(E)$ 连结成与 $E$ 有同样端点的多角曲线, 则多角曲线系列 $S^k(E)$ 给出了对分形曲线 $F$ 的越来越好的近似. 取 $E$ 为 von Koch 曲线构造中的初始区间是应用这种方法的例子, 这时 $S^k(E)$ 正好是 von Koch 曲线构造中的

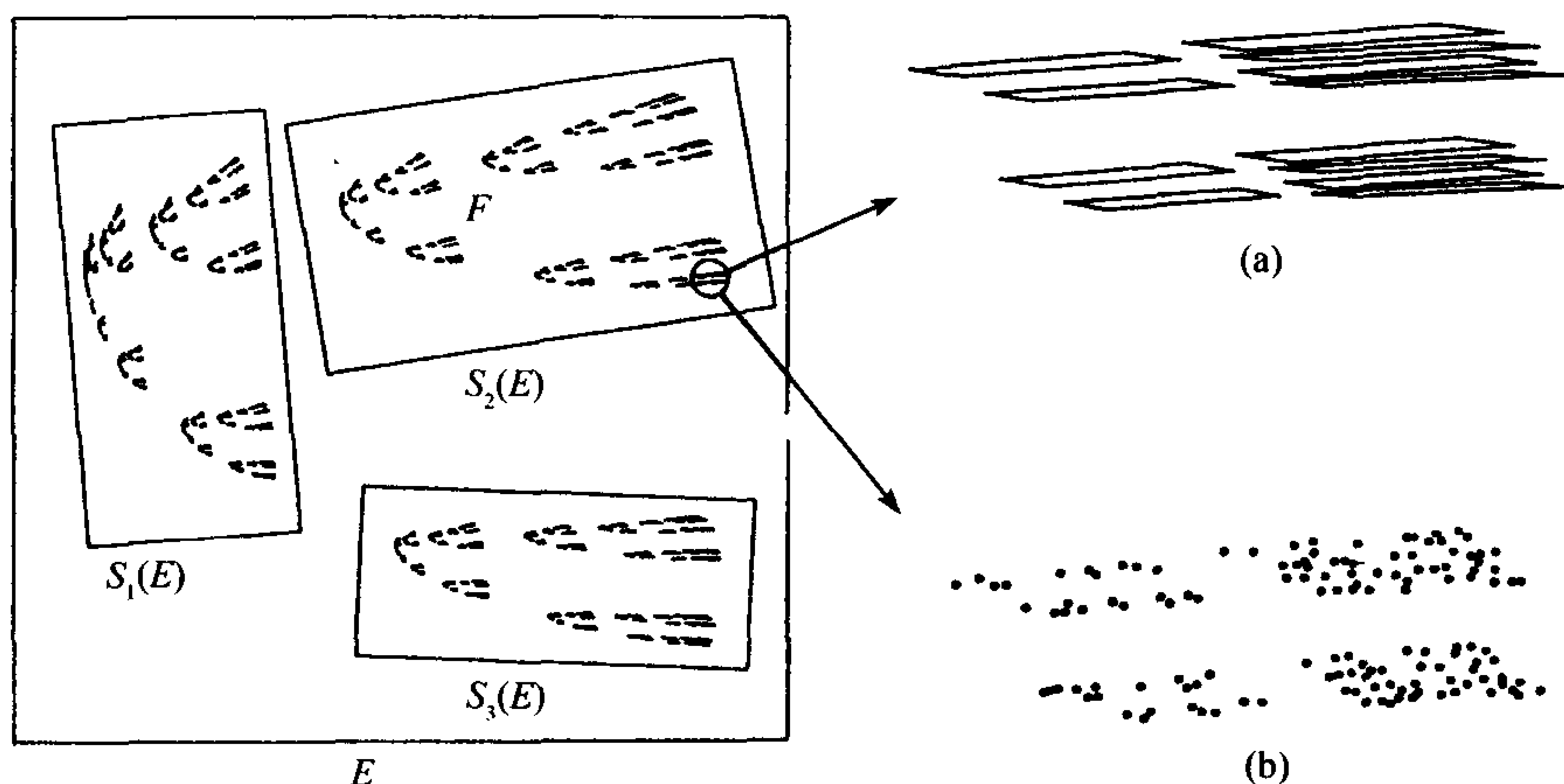



图 9.3 计算机绘制分形 $F$ 的两种方法, 这里 $F$ 是在三个仿射变换 $S_1$, $S_2$ 和 $S_3$ 下的不变集, 这三个变换把正方形变成三个矩形. 方法 (a) 画出 $3^k$ 个平行四边形 $S_{i_1}(S_{i_2}(\cdots(S_{i_k}(E))\cdots))$, $i_j=1,2,3$ (此图中 $k$=6). 方法 (b) 从 $S_1$, $S_2$, $S_3$ 中随机选取 $S_{i_k}(k=1,2,\cdots)$, 并令 $x_k=S_{i_k}(x_{k-1})$ 画出一序列 $x_k$

第 $k$ 步 (图 0.2 的 $E_k$). 在利用这个方法中, 详细的递推程序是很有用的.

在第二种方法中, 选取 $x_0$ 为任意的初始点, 从 $S_1, \cdots, S_m$ 中随机选择一个压缩映射 $S_{i_1}$ 并令 $x_1 = S_{i_1}(x_0)$. 继续这样的方法, 对 $k = 1, 2, \cdots$, 从 $S_1, \cdots, S_m$ 中随机选取 $S_{i_k}$(以相等的概率) 并令 $x_k = S_{i_k}(x_{k-1})$; 对充分大的 $k$, 随着 $x_k$ 越来越接近于 $S_{i_k} \circ \cdots \circ S_{i_1}(F)$, 点 $x_k$ 逐渐与 $F$ 接近到不能辨别, 所以序列 $\{x_k\}$ 将随机地分布在整个 $F$ 上. 绘制序列 $\{x_k\}$ 的图, 比如从第 100 项以后, 给出了 $F$ 的很好的逼近. (这是遍历定理的一个推论: 以概率 1, 点序列以逼近 $F$ 上某个测度的方式充满 $F$)

## 9.2 自相似集的维数

利用迭代函数系的一个优越性, 是吸引子的维数经常可以通过所定义的压缩变换, 相对比较容易地计算或估计. 在这一节中我们将讨论映射族 $S_1, \cdots, S_m: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是相似的情形, 即

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y| \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n) \tag{9.8}$$

其中 $0 < c_i < 1$ ($c_i$ 称为 $S_i$ 的压缩比), 于是, 每个 $S_i$ 把 $\mathbf{R}^n$ 的子集变换成几何相似集. 在这样的相似变换族之下的吸引子称为 (严格) 自相似集(self-similar set), 它是一些与总体相似的较小的相似部分的并. 典型的例子包括三分康托尔集、Sierpiński 垫和 von Konh 曲线 (见图 0.1~0.5). 下面证明在一定条件下, 自相似集 $F$ 的豪斯多夫维数和盒维数与满足下式的 $s$ 值相等:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1 \tag{9.9}$$

并且, $F$ 有正的有限的 $\mathcal{H}^s$ 测度. 与例 2.7 的 "启发式" 的类似计算表明, 由式 (9.9) 给出的值至少似乎是合理的. 如果 $F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$ 是 "几乎不交" 的并, 利用式 (9.8) 及比例性质 2.1, 应当有:

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}^s(S_i(F)) = \sum_{i=1}^{m} c_i^s \mathcal{H}^s(F). \tag{9.10}$$

如果假设在 "跳跃点" $s = \dim_{\mathrm{H}} F$, $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, 可以得到 $s$ 是满足式 (9.9) 的.

为了使这个论断是正确的, 需要一定条件来保证 $F$ 的各部分 $S_i(F)$ 之间不重叠的 "太多". 称 $S_i$ 满足开集条件, 如果存在非空有界开集 $V$ 使得对于不交并, 有

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i(V) \subset V. \tag{9.11}$$

(在三分康托尔集中, 对 $S_1$ 和 $S_2$ 以及取 $V$ 为开区间 $(0,1)$, 则开集条件成立), 下面将证明, 如果 $S_i$ 满足开集条件, 则吸引子的豪斯多夫维数由式 (9.9) 给出.

证明中需要下面的几何结论.

**引理 9.2** 如果 $\{V_i\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的不交的开子集族, 每个 $V_i$ 包含一个半径为 $a_1 r$ 的球, 并且包括于一个半径为 $a_2 r$ 的球中, 则任何半径为 $r$ 的球 $B$ 最多与 $(1+2a_2)^n a_1^{-n}$ 个 $V_i$ 的闭包 $\bar{V}_i$ 相交.

**证明** 如果 $\bar{V}_i$ 与 $B$ 相交, 则 $\bar{V}_i$ 包含于一个与 $B$ 同心, 半径为 $(1+2a_2)r$ 的球中. 假定 $\bar{V}_i$ 集中有 $q$ 个与 $B$ 相交, 则对所有相应的在内部的半径为 $a_1 r$ 的球的体积求和, 可得 $q(a_1 r)^n \leqslant (1+2a_2)^n r^n$, 这就给出了所指出的 $q$ 的上界. □

在下面的定理中导出下界是有些麻烦. 读者可以发现在完成证明过程中参考三分康托尔集的例子, 或参考图 9.2 中的 "一般例子" 是会有帮助的. 另外, 命题 9.7 的证明涵盖了集 $S_1(F), \cdots, S_m(F)$ 是不交的情形, 这当然稍微简单一些.

**定理 9.3** 假定开集条件 (9.11) 对压缩比为 $0 < c_i < 1(1 \leqslant i \leqslant m)$ 的 $\mathbf{R}^n$ 上的相似变换 $S_i$ 成立, 如果 $F$ 是 IFS$\{S_1, \cdots, S_m\}$ 的吸引子, 它满足:

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F), \tag{9.12}$$

则 $\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{B}} F = s$, 其中 $s$ 是指数方程

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1 \tag{9.13}$$

的解, 并且对这个值 $s$, $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

**证明** 设 $s$ 满足式 (9.13), 用 $I_k$ 表示所有 $k$ 项序列 $(i_1, \cdots, i_k)$, $1 \leqslant i_j \leqslant m$ 组成的集. 对任何集 $A$ 和 $(i_1, \cdots, i_k) \in I_k$, 记 $A_{i_1,\cdots,i_k} = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(A)$. 反复应用式 (9.12) 可得

$$F = \bigcup_{I_k} F_{i_1,\cdots,i_k}.$$

下面验证 $F$ 的这些覆盖为它的豪斯多夫测度提供了一个合适的上界估计. 因为变换 $S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}$ 是具有压缩比为 $c_{i_1} \cdots c_{i_k}$ 的相似变换, 由式 (9.13) 可得

$$\sum_{I_k} |F_{i_1,\cdots,i_k}|^s = \sum_{I_k} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s |F|^s = \left(\sum_{i_1}^{s} c_{i_1}^s\right) \cdots \left(\sum_{i_k} c_{i_k}^s\right) |F|^s = |F|^s \tag{9.14}$$

对任意 $\delta > 0$, 可以选择 $k$ 使 $|F_{i_1,\cdots,i_k}| \leqslant (\max_i c_i)^k |F| \leqslant \delta$, 因此 $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leqslant |F|^s$, 进而 $\mathcal{H}^s(F) \leqslant |F|^s$.

下界估计比较麻烦, 设 $I$ 是所有无限序列 $I = \{(i_1, i_2, \cdots) : 1 \leqslant i_j \leqslant m\}$, 又设 $I_{i_1,\cdots,i_k} = \{(i_1, \cdots, i_k, q_{k+1}, \cdots) : 1 \leqslant q_j \leqslant m\}$ 是由 $I$ 中那些开始的 $k$ 个分量为 $(i_1, \cdots, i_k)$ 的序列组成的 "柱集". 可以在 $I$ 上分配一个质量分布使 $\mu(I_{i_1,\cdots,i_k}) = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s$; 因为 $(c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^{m} (c_{i_1} \cdots c_{i_k} c_i)^s$, 即 $\mu(I_{i_1,\cdots,i_k}) = \sum_{i=1}^{m} \mu(I_{i_1,\cdots,i_k,i})$, 由此知 $\mu$ 确实是满足 $\mu(I) = 1$ 的 $I$ 的子集上的一个质量分布. 可以用自然的方法

把 $\mu$ 变换成 $F$ 上的质量分布 $\tilde{\mu}$, 就是对 $F$ 的子集 $A$, 定义

$$\tilde{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, \cdots) : x_{i_1,i_2,\cdots} \in A\}.$$

$\left(\text{记住} x_{i_1,i_2,\cdots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1,\cdots,i_k}\right)$, 于是一个集上的 $\tilde{\mu}$ 质量等于在相应序列上的 $\mu$ 质量. 容易验证, $\tilde{\mu}(F)$=1.

下面证明 $\tilde{\mu}$ 满足质量分布原理 4.2 的条件, 设 $V$ 是式 (9.11) 的开集, 因为 $\bar{V} \supset S(\bar{V}) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(\bar{V})$, 所以递减的迭代序列 $S^k(\bar{V})$ 收敛到 $F$, 见式 (9.4). 特别 $\bar{V} \supset F$ 且对每一个有限的序列 $(i_1, \cdots, i_k)$, $\bar{V}_{i_1,\cdots,i_k} \supset F_{i_1,\cdots,i_k}$. 设 $B$ 是任意半径为 $r < 1$ 的球, 集 $V_{i_1,\cdots,i_k}$ 具有与 $B$ 可比较的直径, 并且它的闭包与集 $F \bigcap B$ 相交, 所以可以通过考虑集 $V_{i_1,\cdots,i_k}$ 来估计 $\tilde{\mu}(B)$.

把无穷序列 $(i_1, i_2, \cdots) \in I$ 的第一个使式子

$$\left(\min_{1 \leqslant i \leqslant m} c_i\right) r \leqslant c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} \leqslant r \tag{9.15}$$

成立的 $i_k$ 后面截去, 并且用 $Q$ 表示用这种方法得到的所有有限序列的有限集. 于是, 对每个无穷序列 $(i_1, i_2, \cdots) \in I$, 存在一个确切的 $k$ 值使 $(i_1, i_2, \cdots, i_k) \in Q$, 因为 $V_1, \cdots, V_m$ 是不交的, 所以对每个 $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$, $V_{i_1,\cdots,i_k,1}, \cdots, V_{i_1\cdots,i_k,m}$ 也是不交的, 把这个事实用到区间套方法中, 可以得到开集类 $\{V_{i_1,\cdots,i_k} : (i_1, \cdots, i_k) \in Q\}$ 是不交的. 类似地, $F \subset \bigcup_Q F_{i_1,\cdots,i_k} \subset \bigcup_Q \bar{V}_{i_1,\cdots,i_k}$.

选取 $a_1$ 和 $a_2$ 使 $V$ 包含一个半径为 $a_1$ 的球, 并包含于半径为 $a_2$ 的球中. 则对所有 $(i_1, \cdots, i_k) \in Q$, 集 $V_{i_1,\cdots,i_k}$ 包含一个半径为 $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_1$ 的球, 因此也包含一个半径为 $(\min_i c_i) a_1 r$ 的球, 同时它包含于一个半径为 $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_2$ 的球中, 因此也就包含于一个半径为 $a_2 r$ 的球中. 设 $Q_1$ 表示 $Q$ 中的使 $B$ 与 $\bar{V}_{i_1,\cdots,i_k}$ 相交的序列 $(i_1, \cdots, i_k)$, 由引理 9.2, $Q_1$ 的序列最多为 $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$ 个. 于是:

$$\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(F \bigcap B) = \mu\{(i_1, i_2, \cdots) : x_{i_1,i_2,\cdots} \in F \bigcap B\} \leqslant \mu\left\{\bigcup_{Q_1} I_{i_1,\cdots,i_k}\right\}$$

因为, 如果 $x_{i_1,i_2,\cdots} \in F \bigcap B \subset \bigcup_{Q_1} V_{i_1,\cdots,i_k}$, 那么存在整数 $k$ 使 $(i_1, \cdots, i_2) \in Q_1$, 所以利用式 (9.15), 有

$$\tilde{\mu}(B) \leqslant \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1,\cdots,i_k}) = \sum_{Q_1} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \leqslant \sum_{Q_1} r^s \leqslant r^s q.$$

因为任意集 $U$ 都包含于一个半径为 $|U|$ 的球内, 即有 $\tilde{\mu}(U) \leqslant |U|^s q$, 所以由质量分布原理 4.2, 得 $\mathcal{H}^s(F) \geqslant q^{-1} > 0$, 并且 $\dim_{\mathrm{H}} F = s$.

如果 $Q$ 是任意有穷序列的集, 即对任意的 $(i_1, i_2, \cdots) \in I$, 恰好存在一个整数 $k$ 使 $(i_1, \cdots, i_k) \in Q$, 由式 (9.13) 用归纳法可得 $\sum_Q (c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k})^s = 1$. 因此如果 $Q$ 是根据式 (9.15) 选出的, 则 $Q$ 最多包含 $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ 个序列. 对 $Q$ 的每一个序列 $(i_1, \cdots, i_k)$, 都有 $|\bar{V}_{i_1,\cdots,i_k}| = c_{i_1} \cdots c_{i_k} |\bar{V}| \leqslant r |\bar{V}|$, 所以对任意的 $r < 1$, $F$ 可以被 $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ 个直径为 $r|\bar{V}|$ 的集覆盖. 由等价定义 3.1(iv) 知 $\overline{\dim}_B F \leqslant s$; 利用式 (3.17), 注意到 $s = \dim_H F \leqslant \underline{\dim}_B F \leqslant \overline{\dim}_B F \leqslant s$, 定理获证. □

如果定理 9.3 中不假定开集条件成立, 还是可以证明 $\dim_H F = \dim_B F$, 然而这个值可能小于 $s$.

定理 9.3 使我们能够求出许多自相似分形的维数.

**例 9.4 Sierpiński 三角形**

Sierpiński 三角形或称 Sierpiński 垫 $F$, 是通过从一个等边三角中反复依次去掉一个反向的小的等边三角形构造出来的 (见图 0.3). 则 $\dim_H F = \dim_B F = \ln 3/\ln 2$.

**计算** 显然, 集 $F$ 是三个压缩比为 1/2 的相似映射的吸引子, 这些映射把三角形 $E_0$ 变成 $E_1$ 中的三个三角形; 取 $V$ 为 $E_0$ 的内部, 易见开集条件成立. 于是由定理 9.3 知, $\dim_H F = \dim_B F = \ln 3/\ln 2$, 这是方程 $3\left(\frac{1}{2}\right)^s = \sum_1^3 \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$ 的解. □

下面的例子包含多于一个比例系数的相似变换.

**例 9.5 修改的 von Koch 曲线**

固定 $0 < a \leqslant 1/3$, 去掉位于区间正中, 与全长比例为 $a$ 的一段区间, 并用与之组成等边三角形的另外两边代替, 把这个过程反复进行下去而构造出曲线 $F$(见图 9.4). 则 $\dim_H F = \dim_B F$ 是方程 $2a^s + 2\left(\frac{1}{2}(1-a)\right)^s = 1$ 的解.

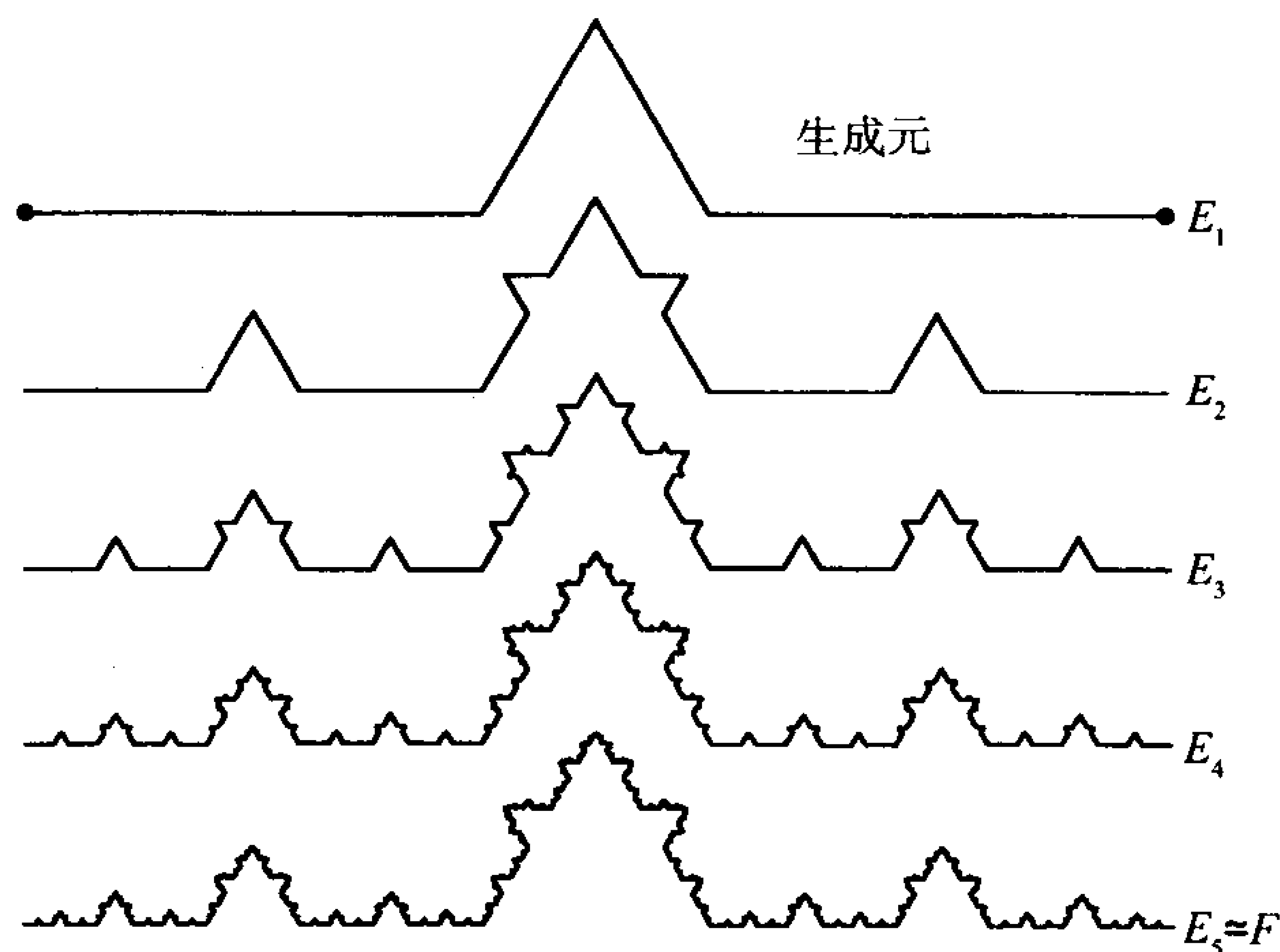



图 9.4 修改的 von Koch 曲线的构造, 见例 9.5($E_1$ 是曲线的生成元)

**计算**　曲线 $F$ 是把单位区间映射到 $E_1$ 中的 4 个区间的四个相似映射下的吸引子. 取 $V$ 为底边是 1, 高是 $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ 的等腰三角形的内部, 开集条件成立. 则由定理 9.3 知 $F$ 具有所指明的维数. □

有一种用图解方式确定某些自相似集, 特别像例 9.5 这样的自相似曲线的方便方法, 其中*生成元*(generator) 是由很多直线段和确定的两个特殊点组成. 用这两个特殊点到线段端点的一些相似映射把这两个特殊点与每一直线段联系起来. 反复用一个生成元的相似图形取代每一直线段, 这样的迭代过程构造了一系列自相似吸引子的近似集, 见图 9.5~ 图 9.7 显示的例子. 注意, 由生成元定义的相似映射只能是两个互为反射的映射, 或者说是旋转 180° 的映射, 而这些映射的方向则可以由构造的第一步确定.

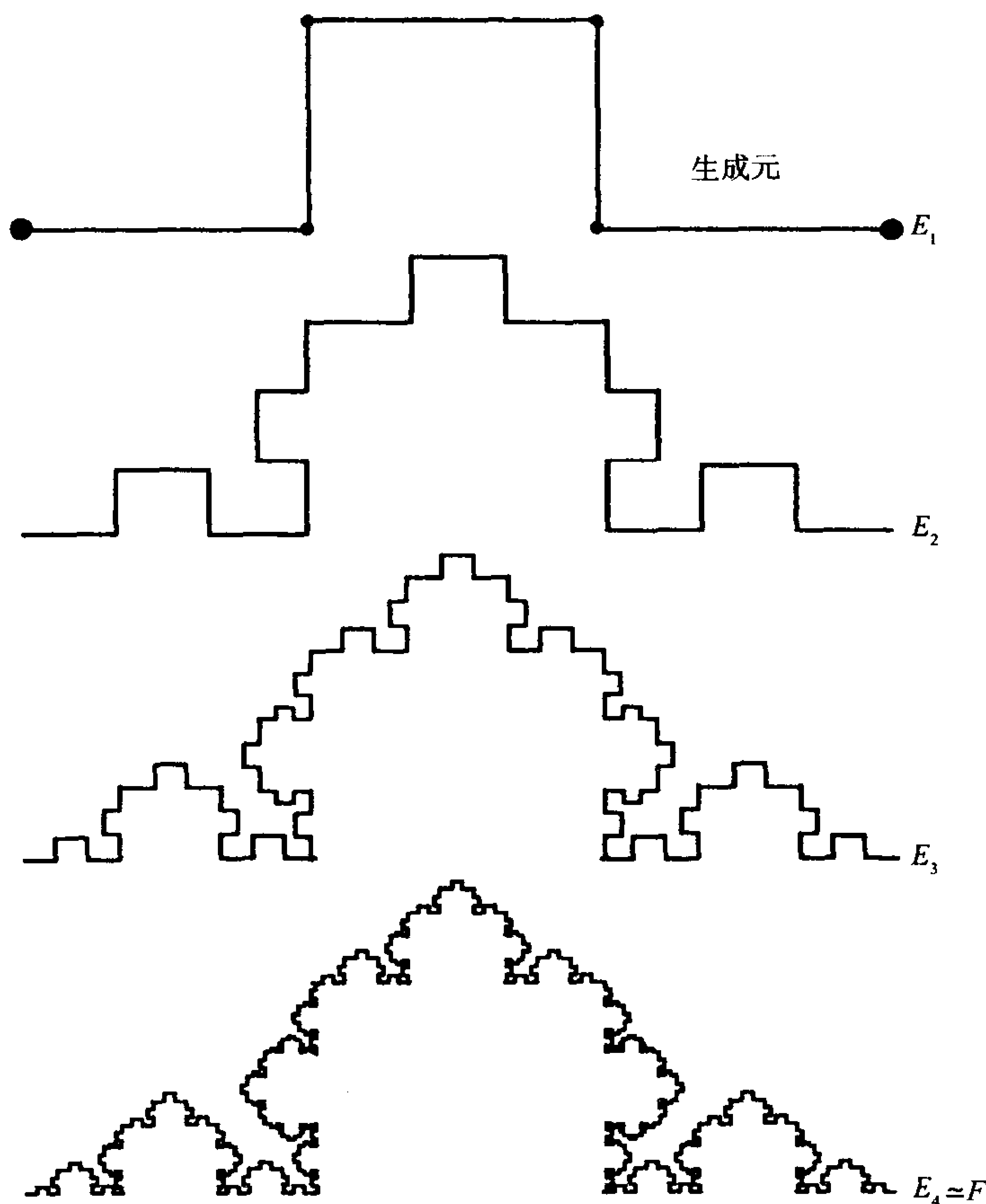



图 9.5　从一个生成元构造分形曲线的几个阶段. 生成元线段的长度分别为 1/3, 1/4, 1/3, 1/4, 1/3, $F$ 的豪斯多夫和盒维数由方程 $3(1/3)^s + 2(1/4)^s = 1$ 给出, 或者 $s = 1.34\cdots$

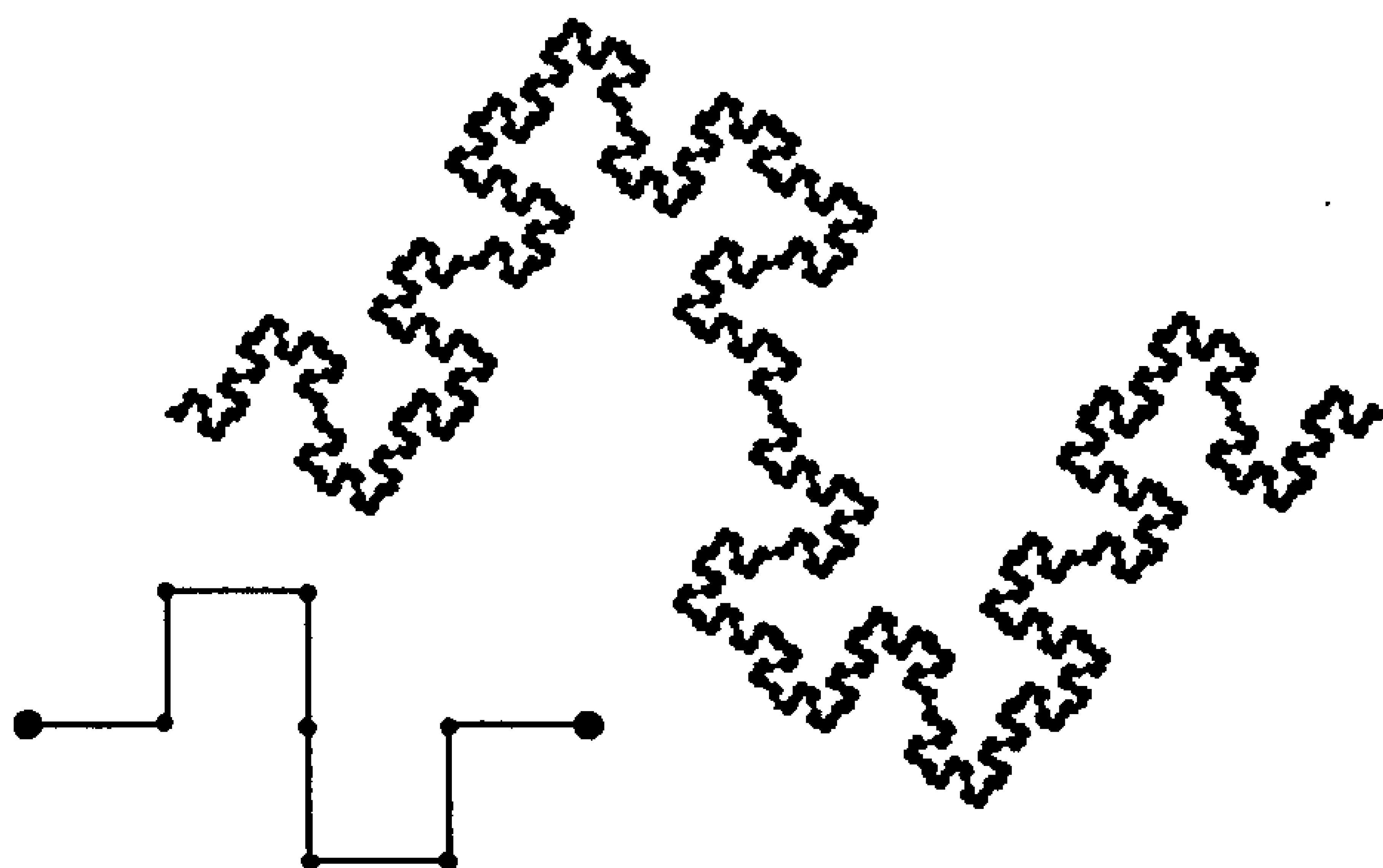


图 9.6 分形曲线和它的生成元, 曲线的豪斯多夫和盒维数等于 $\ln 8/\ln 4 = 1\frac{1}{2}$

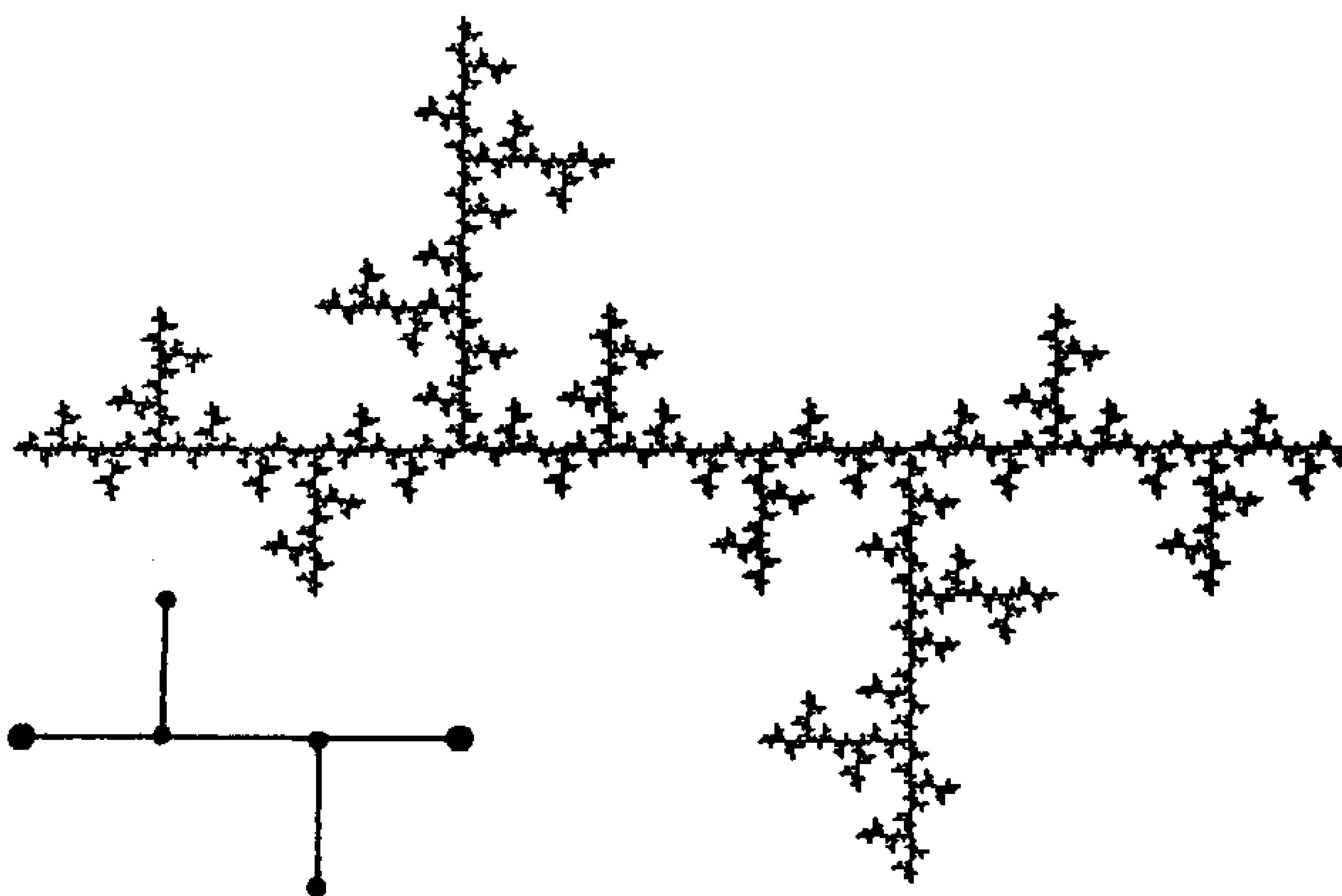


图 9.7 树状分形与它的生成元, 豪斯多夫和盒维数等于 $\ln 5/\ln 3 = 1.465\cdots$

## 9.3 一些变化

以定理 9.3 为基础的计算, 也适用于不相似的压缩映射组成的 IFS 的吸引子维数的估计.

**命题 9.6** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集 $D$ 上的压缩映射族 $\{S_1, \cdots, S_m\}$ 组成的 IFS 的吸引子, 即对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$, $0 < c_i < 1$, $S_i$ 满足:

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leqslant c_i |x - y| \quad (x, y \in D),$$

则 $\dim_{\mathrm{H}} F \leqslant s$, $\dim_{\mathrm{B}} F \leqslant s$, 其中 $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$.

**证明** 定理 9.3 证明中的第一段和最后一段基本可以作为本命题估计的证明, 但要注意此时对任意集 $A$, 成立的是不等式 $|A_{i_1,\cdots,i_k}| \leqslant c_{i_1} \cdots c_{i_k} |A|$, 而不是等式.□

下面将会得到, $F$ 的组成部分 $S_i(F)$ 是互相不交情形时维数的下界估计. 注意到如果有某个非空的紧集 $E$, 对所有 $i$, $S_i(E) \subset E$ 且 $S_i(E)$ 是互相不交的, 所说的就是这种情形.

**命题 9.7** 考虑 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集 $D$ 上的压缩映射族 $\{S_1, \cdots, S_m\}$ 组成的 IFS 的吸引子 $F$, 设

$$b_i |x-y| \leqslant |S_i(x) - S_i(y)| \quad (x, y \in D) \tag{9.16}$$

对每个 $i$, $0 < b_i < 1$. 假设吸引子 (非空紧的)$F$ 满足:

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F), \tag{9.17}$$

上面的并是不交并, 则 $F$ 是全不连通的, 且 $\dim_{\mathrm{H}} F \geqslant s$, 其中

$$\sum_{i=1}^{m} b_i^s = 1 \tag{9.18}$$

**证明** 设 $d > 0$, 是不交紧集 $S_1(F), \cdots, S_m(F)$ 中任意两个集之间的最小距离, 即

$$d = \min_{i \neq j} \inf \{|x-y| : x \in S_i(F), y \in S_j(F)\}.$$

设 $F_{i_1,\cdots,i_k} = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(F)$, 并由 $\mu(F_{i_1,\cdots,i_k}) = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s$ 定义 $\mu$. 因为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \mu(F_{i_1,\cdots,i_k,i}) &= \sum_{i=1}^{m} (b_{i_1} \cdots b_{i_k} b_i)^s \\ &= (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s = \mu(F_{i_1,\cdots,i_k}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} F_{i_1,\cdots,i_k,i}\right)\end{aligned}$$

由此知 $\mu$ 是使 $\mu(F) = 1$ 的 $F$ 上的质量分布.

如果 $x \in F$, 则存在唯一的无限序列 $i_1, i_2, \cdots$, 使对每个 $k$, 有 $x \in F_{i_1,\cdots,i_k}$. 对 $0 < r < d$, 令 $k$ 为满足下式的最小整数:

$$b_{i_1} \cdots b_{i_k} d \leqslant r < b_{i_1} \cdots b_{i_{k-1}} d.$$

如果 $i'_1, \cdots, i'_k$ 与 $i_1, \cdots, i_k$ 不同, 则集 $F_{i_1,\cdots,i_k}$ 与 $F_{i'_1,\cdots,i'_k}$ 不交并且由最小为 $b_{i_1} \cdots b_{i_{k-1}} d > r$ 的间隙隔开 (为看清这一点, 注意到如果 $j$ 是使 $i_j \neq i'_j$ 的最小整数, 则 $F_{i_j,\cdots,i_k} \subset F_{i_j}$, $F_{i'_j,\cdots,i'_k} \subset F_{i'_j}$, 并且它们由 $d$ 隔开, 因此 $F_{i_1,\cdots,i_k}$ 和 $F_{i'_1,\cdots,i'_k}$ 由最少为 $b_{i_1} \cdots b_{i_{j-1}} d$ 的间隙隔开). 因此知 $F \bigcap B(x,r) \subset F_{i_1,\cdots,i_k}$, 所以

$$\mu(F \bigcap B(x,r)) \leqslant \mu(F_{i_1,\cdots,i_k}) = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s \leqslant d^{-s} r^s.$$

如果 $U$ 和 $F$ 相交, 则对某个 $x \in F$ 和 $r = |U|$, $U \subset B(x,r)$. 于是 $\mu(U) \leqslant d^{-s} |U|^s$, 由质量分布原理 4.2, 即有 $\mathcal{H}^s(F) > 0$ 和 $\dim_{\mathrm{H}} F \geqslant s$.

上面显示的分隔表明 $F$ 是完全不连通的. □

**例 9.8 "非线性" 康托尔集**

设 $D=\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}),(1+\sqrt{3})\right]$, 又设 $S_1$, $S_2$ 分别是由 $S_1(x)=1+1/x$ 和 $S_2(x)=2+1/x$ 给出的 $D\to D$ 的映射, 则 $0.44<\dim_{\mathrm{H}}F\leqslant\underline{\dim}_{\mathrm{B}}F\leqslant\overline{\dim}_{\mathrm{B}}F<0.66$, 其中 $F$ 是$\{S_1, S_2\}$的吸引子.(这个例子的出现与数论有关: 见 10.2 节)

**计算** 注意到 $S_1(D)=\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}),\sqrt{3}\right]$ 和 $S_2(D)=\left[\frac{1}{2}(3+\sqrt{3}),1+\sqrt{3}\right]$, 所以可以利用命题 9.6 和命题 9.7 去估计 $\dim_{\mathrm{H}}F$. 由中值定理 (见 1.2 节), 如果 $x,y\in D$, 且 $x\neq y$ 则有某个 $z_i\in D$, 使 $(S_i(x)-S_i(y))/(x-y)=S_i'(z_i), i=1,2$, 于是对 $i=1,2$

$$\inf_{x\in D}|S_i'(x)|\leqslant\frac{S_i(x)-S_i(y)}{|x-y|}\leqslant\sup_{x\in D}|S_i'(x)|.$$

因为 $S_1'(x)=S_2'(x)=-1/x^2$, 由此对 $i=1$ 和 $i=2$ 有

$$\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)=(1+\sqrt{3})^{-2}\leqslant\frac{|S_i(x)-S_i(y)|}{|x-y|}\leqslant\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\right)^{-2}=2\left(2-\sqrt{3}\right).$$

根据命题9.6和命题9.7, 维数的下界和上界估计分别可以由方程 $2\left(\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})\right)^s=1$ 和 $2\left(2\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^s=1$ 给出, 解得 $s$ 的值分别是 $\ln 2/\ln 2(2+\sqrt{3})=0.34$ 和 $\ln 2/\ln\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})=1.11$.

对实直线的子集, 维数的上界估计大于 1 是没有意义的. 为了得到较好的估计, 可以用下面的方法, 注意到 $F$ 同时也是 $[0,1]$ 上的如下 4 个映射的吸引子

$$S_i\circ S_j=i+1/(j+1/x)=i+x/(jx+1)\quad(i,j=1,2).$$

同样按照上面的微分计算和中值定理, 可以得到

$$(S_i\circ S_j)'(x)=(jx+1)^{-2}$$

所以

$$(j(1+\sqrt{3})+1)^{-2}|x-y|\leqslant|S_i\circ S_j(x)-S_i\circ S_j(y)|\leqslant\left(\frac{1}{2}j(1+\sqrt{3})+1\right)^{-2}|x-y|.$$

那么, 维数的下界和上界估计分别可以由方程

$$2\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2s}+2\left(3+2\sqrt{3}\right)^{-2s}=1 \text{ 和 } 2\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)\right)^{-2s}+2\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2s}=1$$

决定, 用数值解法得出 $0.44<\dim_{\mathrm{H}}F<0.66$, 这是对先前估计的一个相当可观的改进. 实际上, $\dim_{\mathrm{H}}F=0.531$, 这个值可以通过对更高阶的 $S_i$ 的迭代进行考察得到.

*[这一节的下面部分可以略去.]

在例 9.8 中应用的改进维数估计的技巧对不严格相似映射的吸引子经常是很有用的, 如果 $F$ 是 D 上的 IFS$\{S_1,\cdots,S_m\}$的吸引子, 则对任意 $k$, $F$ 也是 $m^k$ 个映射 $\{S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}\}$ 组成的 IFS 的吸引子. 如果 $S_i$ 在包含 $F$ 的一个开集上是二次可微的, 则可以证明, 只要 $k$ 充分大, 在一定的意义下, 压缩映射 $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}$ 接近于 $D$ 上的相似映射. 特别对 $\mathbf{R}$ 的子集 $D$ 上的映射, 如果 $b=\inf_{x\in D}\left|(S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k})'(x)\right|$, $c=\sup_{x\in D}\left|(S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k})'(x)\right|$, 则

$$b\left|x-y\right|\leqslant\left|S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(x)-S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(y)\right|\leqslant c\left|x-y\right|\quad(x,y\in D)$$

如果 $k$ 较大, 则 $b/c$ 接近于 1, 利用命题 9.6 和命题 9.7 到 $m^k$ 个映射 $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}$ 上, 会得到 $F$ 的维数较好的上界和下界估计.

可以进一步认为, 如果 $S_i$ 在 $\mathbf{R}$ 的子集 D 上二次可微, 则对较大的 $k$,

$$\frac{\left|S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(x)-S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(y)\right|}{\left|x-y\right|}\sim\left|(S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k})'(w)\right|$$

其中 $x,y$ 和 $w$ 是 $D$ 上的任意点. 则复合映射 $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}$ 接近于 $D$ 上的相似映射, 所以与定理 9.3 比较, 可能期望吸引子 $F$ 的维数接近于 $s$ 的值, 这里的 $s$ 由下式决定:

$$\sum_{I_k}\left|(S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k})'(\omega)\right|^s=1\tag{9.19}$$

此处是对所有 $k$ 项序列的集 $I_k$ 求和. 这些分析可以得出下面的定理.

**定理 9.9**　设 $V\subset\mathbf{R}$ 是开区间, 又设 $S_1,\cdots,S_m$ 是 $\bar{V}$ 上的压缩映射, 且它们在 $V$ 上都是二次可微的, 满足对任意 $i$ 和任意 $w\in V, a\leqslant|S_i'(w)|\leqslant c$, 其中 $0<a\leqslant c<1$ 都是常数. 假设对于开集 $V, S_i$ 满足开集条件 (9.11), 则对任意 $s>0$, 极限

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{I_k}\left|(S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k})'(w)\right|^s\right]^{1/k}=\varphi(s)\tag{9.20}$$

存在且与 $w\in V$ 无关, 它的值随 $s$ 增加而减小. 如果 $F$ 是$\{S_1,\cdots,S_m\}$的吸引子, 则 $\dim_{\mathrm{H}}F=\dim_{\mathrm{B}}F$ 是方程 $\varphi(s)=1$ 的解, 且对这个解 $s$, $F$ 是一个 $s$ 集, 即 $0<\mathcal{H}^s(F)<\infty$.

**证明注记**　主要的困难是证明式 (9.20) 的极限的存在性 —— 这是由 $S_i$ 上的可微条件决定的. 有了存在性, 就可以利用以上概略的论述证明, 对较大的 $k$, 满足式 (9.19) 的 $s$ 值是对维数很好的近似; 令 $k\to\infty$ 则得到所需的结论.

为了证明 $0<\mathcal{H}^s(F)<\infty$ 需要类似的想法, 但要涉及式 (9.20) 极限的收敛速度. □

对于更高维的情况也有类似于定理 9.9 的结论. 假设复平面区域 $D$ 上的压缩映射 $S_1,\cdots,S_m$ 是复解析映射, 则 $S_i$ 是保形的, 也就是说, $S_i$ 是在任何方向都有相同收缩速率的局部类相似变换, 则有

$$S_i(z)=S_i(z_0)+S_i'(z_0)(z-z_0)+(z-z_0)^2 \text{ 形式或其他的高阶}$$

所以如果 $z-z_0$ 充分小, 则:

$$S_i(z)\simeq S_i(z_0)+S_i'(z_0)(z-z_0) \tag{9.21}$$

其中 $S_i'(z_0)$ 是满足 $|S_i'(z_0)|<1$ 的复数. 而式 (9.21) 的右边恰好是表成复符号的相似映射, 在这种结构下, 通过与一维情形类似的论证可知定理 9.9 的结论仍然成立.

这些结果是 "热力学形式体系" 的部分, 引出的理论导出了许多吸引子的维数公式.

## 9.4 自仿射集

自仿射集组成一个重要的集类, 并以自相似集做为它的特殊情形. 仿射映射(affine transformation)$S:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是具有下面形式的映射:

$$S(x)=T(x)+\boldsymbol{b}$$

其中 $T$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性变换 (可以表成一个 $n\times n$ 矩阵), 而 $\boldsymbol{b}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个向量. 于是仿射变换 $S$ 是平移、旋转、胀缩可能还有反射的组合. 特别, $S$ 把球映射成椭球, 把正方形映射成平行四边形等. 与相似映射不一样, 仿射映射在不同的方向上有不同的胀缩比.

如果一个 IFS 由 $\mathbf{R}^n$ 上的仿射压缩变换 $\{S_1,\cdots,S_m\}$ 组成, 由定理 9.1 推证出的吸引子 $F$ 称为自仿射集(self-affine set). 图 9.8 给出了一个例子: $S_1,S_2$ 和 $S_3$ 是这样自然地定义的, 它们把正方形 $E$ 分别映射成三个矩形.(图中表示出的吸引子 $F$, 是对充分大的 $k$, $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(E)$ 取遍全部使 $i_j=1,2,3$ 的序列 $(i_1,\cdots,i_k)$ 而形成的集. 显然, $F$ 是由它的 3 个仿射样本 $S_1(F)$、$S_2(F)$ 和 $S_3(F)$ 组成的).

自然会想到推广自相似集的公式 (9.13), 而去寻求自仿射集相应的维数公式. 当然人们希望这个维数会以合理的简单的方式依赖于仿射映射, 并容易由仿射映射的矩阵和向量表达出来. 然而实际情形却比这个复杂, 下面的例子说明虽然自仿射映射以连续的方式变化, 但自仿射维数却可以不连续地改变.

**例 9.10** 设 $S_1,S_2$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的仿射压缩映射, 它们分别把单位正方形映射到如图 9.9 中边长为 $1/2$ 和 $0<\varepsilon<1/2$ 的两个矩形 $R_1,R_2$. 矩形 $R_1$ 的一个宽边正好在 $Y$ 轴上, 而矩形 $R_2$ 与 $Y$ 轴的距离为 $\lambda$, $0\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$. 如果 $F$ 是$\{S_1,\ S_2\}$的吸引子, 则当 $\lambda>0$ 时, $\dim_{\mathrm{H}}F\geqslant 1$, 但当 $\lambda=0$ 时, $\dim_{\mathrm{H}}F=\ln 2/-\ln\varepsilon<1$.

**计算** 设$\lambda>0$(见图 9.9(a)), 则第 $k$ 步的构造 $E_k=\bigcup S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(E)$ 包含有

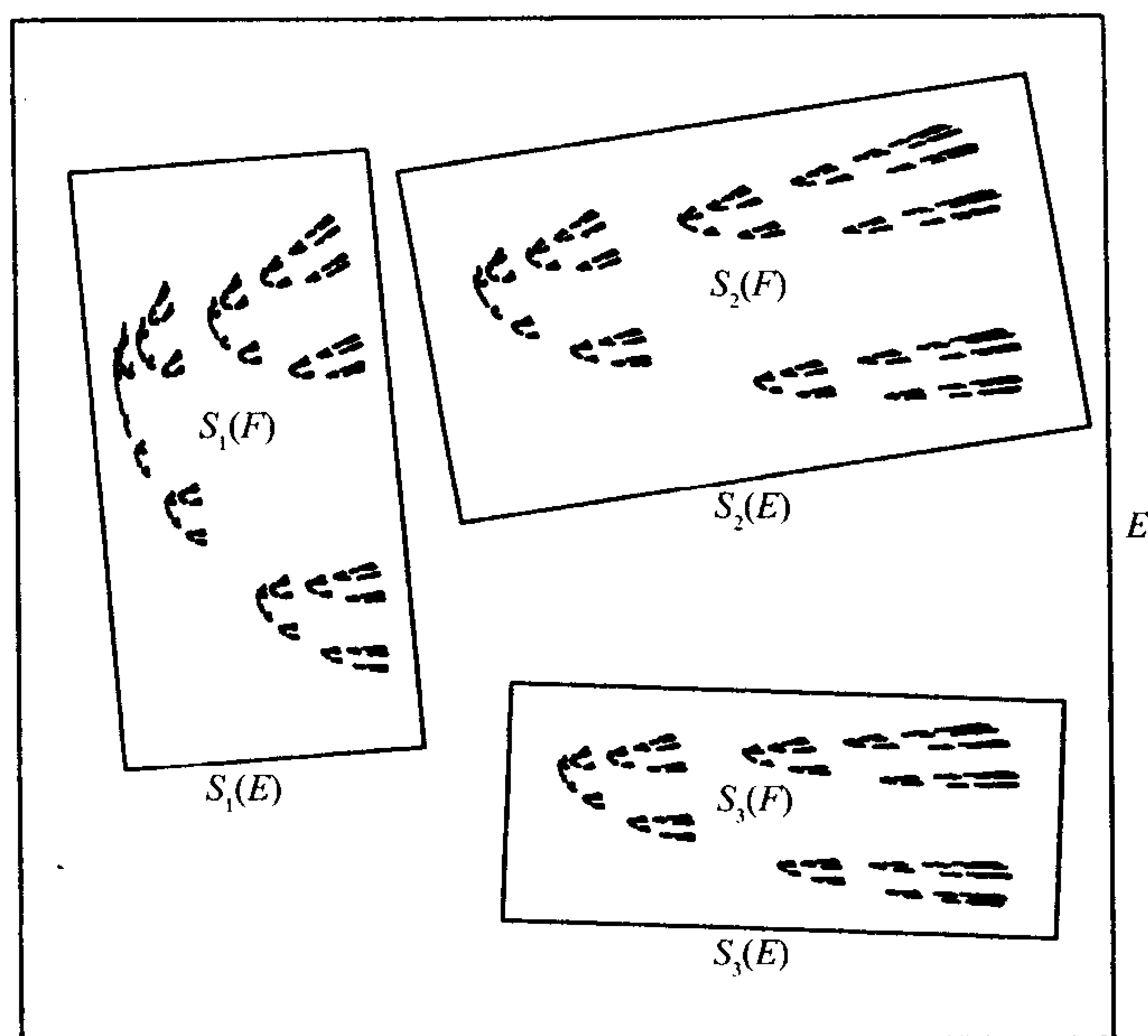



图 9.8 在仿射变换 $S_1, S_2$ 和 $S_3$ 下不变的自仿射集. $S_1, S_2$ 和 $S_3$ 把正方形变换成所示的矩形

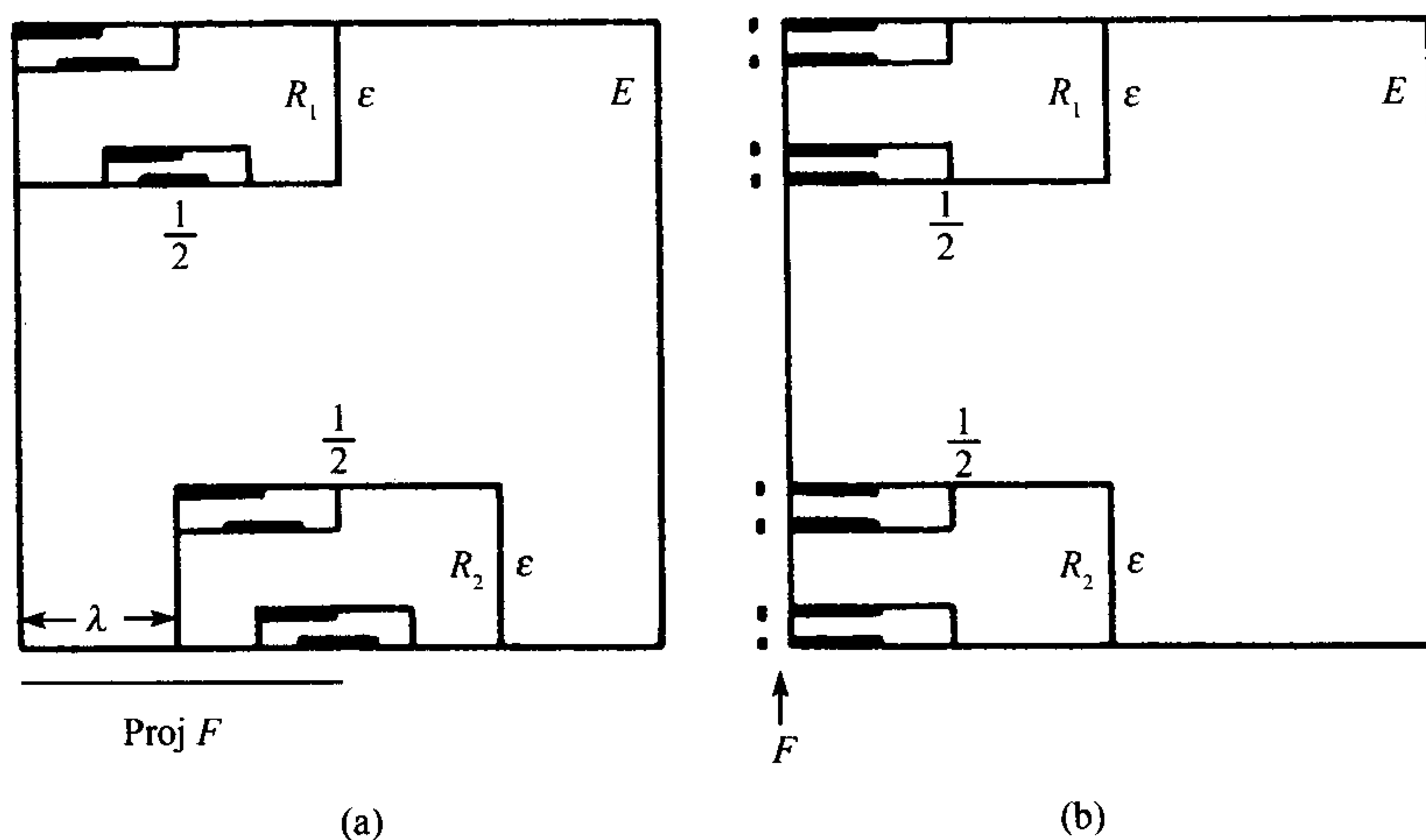



图 9.9 自仿射集维数的不连续性. 仿射映射 $S_1$ 和 $S_2$ 把正方形 $E$ 映成 $R_1$ 和 $R_2$. (a) $\lambda > 0, \dim_H F \geqslant \dim_H \text{proj} F = 1$, 但 (b) $\lambda = 0 \dim_H F = \ln 2/(-\ln \varepsilon) < 1$

$2^k$ 个边长为 $2^{-k}$ 和 $\varepsilon^k$ 的矩形, 并且 $E_k$ 在 $x$ 轴上的射影 proj $E_k$ 包含区间 $[0,2\lambda]$; 因为 $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_k$, 所以 $F$ 的射影 proj$F$ 也包含区间 $[0,2\lambda]$.(另一个看清这一点的方

法是, 注意到如果 $\tilde{S}_1(x) = x/2, \tilde{S}_2(x) = x/2 + \lambda$ 是两个 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 的映射, 则 proj $F$ 是 $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ 的吸引子, 而这个吸引子是区间 $[0,2\lambda]$.), 因此有

$$\dim_{\mathrm{H}} F \geqslant \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj} F = \dim_{\mathrm{H}}[0, 2\lambda] = 1.$$

如果 $\lambda = 0$, 情况就变化了 (见图 9.9(b)). $E_k$ 是由 $2^k$ 个左边正好都在 $y$ 轴上的边长分别为 $2^{-k}$ 和 $\varepsilon^k$ 的矩形组成的, 且 $E_k$ 包含在窄条 $\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 2^{-k}\}$ 之内. 令 $k \to \infty$, 则易见 $F$ 是包含于 $y$ 轴上的均匀康托尔集, 它可以从每个区间的中间反复地去掉长度比为 $1 - 2\varepsilon$ 的线段得到. 于是 $\dim_{\mathrm{H}} F = \ln 2/(-\ln \varepsilon) < 1$(见例 4.5). □

在更复杂的仿射映射集中, 这种不连续特点的状况可能就更差了, 所以想得到自仿射集的维数的一般表达好像是困难的. 然而按下面递归方式而得到的自仿射集的情况已经被完全分析清楚了, 图 9.10 和图 9.11 说明了其中的一种特殊情况.

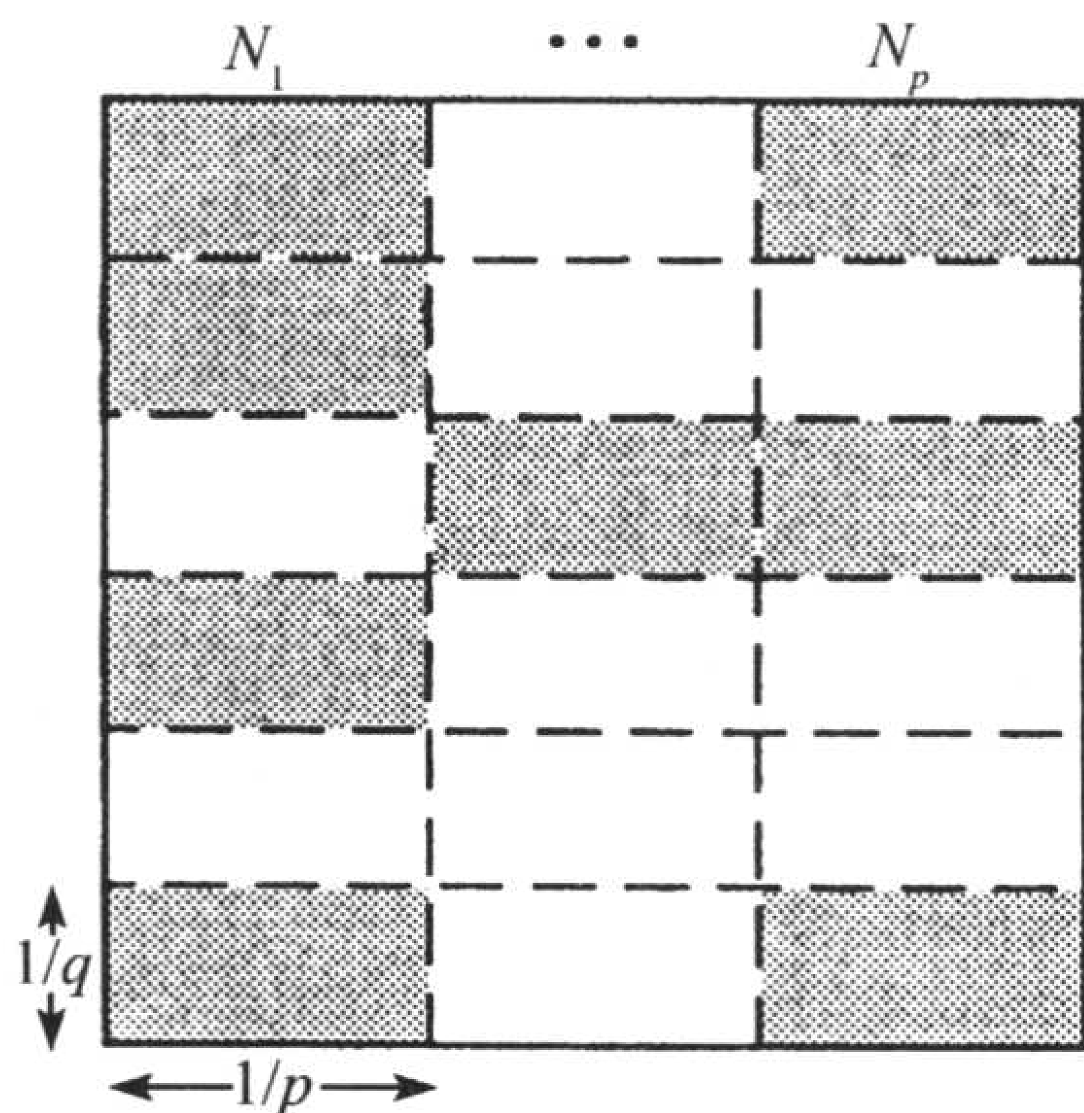



图 9.10 例 9.11 的自仿射集的一个形式. 仿射变换把正方形映射成一些选择出来的 $\frac{1}{p} \times \frac{1}{q}$ 的矩形, 这些矩形是按 $p \times q$ 排列的

**例 9.11** 把单位正方形 $E_0$ 分割成按 $p \times q$ 排列的边长各为 $1/p$ 和 $1/q$ 的矩形, 其中 $p$ 和 $q$ 都是正整数且 $p < q$. 从这些矩形中选取一个子集类组成 $E_1$, 并且用 $N_j$ 表示从第 $j$ 个柱集中选出的矩形数, $1 \leqslant j \leqslant p$ (见图 9.10). 按通常的方法重复这个过程, 即把 $E_1$ 中的每一个矩形用 $E_1$ 的一个仿射样本代替, 并设 $F$ 是得到的极限集, 则

$$\dim_{\mathrm{H}} F = \ln \left( \sum_{j=1}^{p} N_j^{\ln p / \ln q} \right) \frac{1}{\ln p}$$

及

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \frac{\ln p_1}{\ln p} + \ln \left( \frac{1}{p_1} \sum_{j=1}^{p} N_j \right) \frac{1}{\ln q},$$

其中 $p_1$ 是至少包含 $E_1$ 的一个矩形的柱集数.

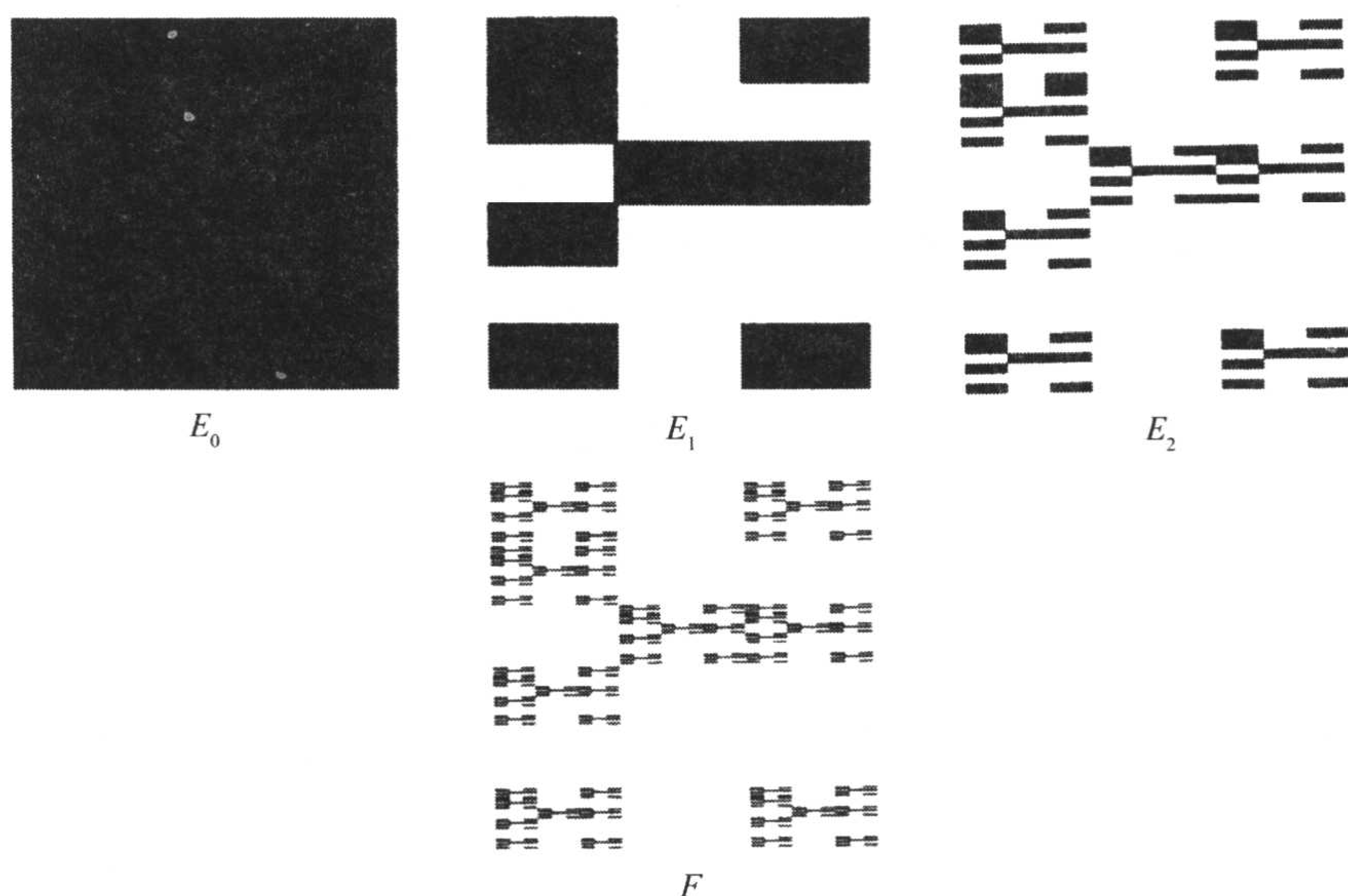



图 9.11　例 9.11 中考虑的一类自仿射集的构造, 这些集可以有不同的豪斯多夫盒维数

**计算**　略去. □

注意在这个例子中, 维数不仅依赖于每一步选出的矩形的个数, 同时也与它们的相对位置有关. 而且 $\dim_{\mathrm{H}} F$ 和 $\dim_{\mathrm{B}} F$ 一般是不相等的.

*[本节的剩余部分可以略去.]

上面的例子是相当特殊的, 因为其中的仿射映射都可以相互平移. 要想得到一般仿射集的维数公式是很困难的. 下面简单概述一个能对几乎所有的向量序列 $b_1, \cdots, b_m$, 得到仿射压缩映射 $S_i(x) = T_i(x) + b_i\ (1 \leqslant i \leqslant m)$ 的吸引子的维数表达式的方法.

设 $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是非奇异的线性压缩映射, 它的奇异值(singular values)$1 > a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$ 可以用两种方法定义: 椭球 $T(B)$ 的主半轴的长度, 其中 $B$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球, 或者是矩阵 $\boldsymbol{T} * T$ 的特征值的正的平方根, 其中 $\boldsymbol{T}^*$ 是 $T$ 的伴随矩阵. 于是奇异值反映了 $T$ 在不同方向的压缩效果, 对 $0 \leqslant s \leqslant n$, 定义奇异值函数

$$\varphi^s(T) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} \alpha_r^{s-r+1} \tag{9.22}$$

其中 $r$ 是满足 $r - 1 < s \leqslant r$ 的整数, 则 $\varphi^s(T)$ 是连续的并且对 $s$ 是严格递减的. 进一步, 对固定的 $s$, 可以证明 $\varphi^s$ 是半可乘的, 即对任意的线性映射 $T$ 和 $U$:

$$\varphi^s(TU) \leqslant \varphi^s(T)\varphi^s(U)$$

下面引入第 $k$ 个水平和 $\sum_k^s \equiv \sum_{I_k} \varphi^s(T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_k})$, 其中 $I_k$ 表示所有 $k$ 项序列

$(i_1,\cdots,i_k)$ , $1\leqslant i_j\leqslant m$ 组成的集. 对固定的 $s$:

$$\begin{aligned}\sum_{k+q}^{s}&=\sum_{I_{k+q}}\varphi^s\left(T_{i_1}\circ\cdots\circ T_{i_{k+q}}\right)\\&\leqslant\sum_{I_{k+q}}\varphi^s\left(T_{i_1}\circ\cdots\circ T_{i_k}\right)\varphi^s\left(T_{i_{k+1}}\circ\cdots\circ T_{i_{k+q}}\right)\\&=\left(\sum_{I_k}\varphi^s\left(T_{i_1}\circ\cdots\circ T_{i_k}\right)\right)\left(\sum_{I_q}\varphi^s\left(T_{i_1}\circ\cdots\circ T_{i_q}\right)\right)\\&=\sum_{k}^{s}\sum_{q}^{s}\end{aligned}$$

即序列 $\sum_k^s$ 对 $k$ 也是半可乘. 由半可乘系列的典型性质知, 当 $k\to\infty$ 时, $\left(\sum_k^s\right)^{1/k}$ 收敛到数 $\sum_\infty^s$. 因为 $\varphi^s$ 是 $s$ 的减函数, 所以 $\sum_\infty^s$ 也是 $s$ 的减函数. 倘若 $\sum_\infty^s\leqslant 1$, 则存在表示成 $d(T_1,\cdots,T_m)$ 的唯一的 $s$, 使 $1=\sum_\infty^s=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sum_{I_k}\varphi^s\left(T_{i_1}\circ\cdots\circ T_{i_k}\right)\right)^{1/k}$, 这等价于

$$d(T_1,\cdots,T_m)=\inf\left\{s:\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{I_k}\varphi^s\left(T_{i_1}\circ\cdots\circ T_{i_k}\right)<\infty\right\}. \tag{9.23}$$

**定理 9.12** 设 $T_1,\cdots,T_m$ 是线性压缩映射, 又设 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_m\in\mathbf{R}^n$ 是向量. 如果 $F$ 是满足

$$F=\bigcup_{i=1}^{m}(T_i(F)+\boldsymbol{y}_i)$$

是自仿射集, 则 $\dim_{\mathrm{H}}F=\dim_{\mathrm{B}}F\leqslant d(T_1,\cdots,T_m)$. 且如果对任意的 $i$, 及任意的 $0<c<\dfrac{1}{2}$, $|T_i(\boldsymbol{x})-T_i(\boldsymbol{y})|\leqslant c|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$, 则在 $mn$ 维勒贝格测度意义下, 对几乎所有的 $(\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_m)\in\mathbf{R}^{nm}$ 上式中等号成立.

**部分证明** 先证明 $\dim_{\mathrm{H}}F\leqslant d(T_1,\cdots,T_m)$ 对任意的 $(\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_m)$ 成立, 记压缩仿射映射 $S_i$ 为 $S_i(\boldsymbol{x})=T_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}_i$. 设 $B$ 是一个大球, 使得对任意 $i$, $S_i(B)\subset B$; 给定 $\delta>0$, 选取充分大的 $k$, 使对任意 $k$ 项序列 $(i_1,\cdots,i_k)\in I_k$, $|S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(B)|<\delta$. 由式 (9.6), $F\subset\bigcup\limits_{I_k}S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(B)$, 但 $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(B)$ 是主轴长度分别为 $\alpha_1|B|,\cdots,\alpha_n|B|$ 的椭圆 $T_{i_1}\circ\cdots\circ T_{i_k}(B)$ 的平移, 其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 $T_{i_1}\circ\cdots\circ T_{i_k}$ 的奇异值. 于是 $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(B)$ 包含在一个边长各为 $\alpha_1|B|,\cdots,\alpha_n|B|$ 的直角平行六面体 $P$ 内. 如果 $0\leqslant s\leqslant n$, 且 $r$ 是大于或等于 $s$ 的最小整数, 则最多可以把 $p$ 分成

$$\left(\frac{2\alpha_1}{\alpha_r}\right)\left(\frac{2\alpha_2}{\alpha_r}\right)\cdots\left(\frac{2\alpha_{r-1}}{\alpha_r}\right)\leqslant 2^n\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}\alpha_r^{1-r}$$

个边长为 $\alpha_r|B|<\delta$ 的立方体. 因此 $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(B)$ 可以被满足 $|U_i|<\delta\sqrt{n}$ 的立方体 $U_i$ 的并所覆盖, 使得:

$$\begin{aligned}\sum_i |U_i|^s &\leqslant 2^n\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}\alpha_r^{1-r}\alpha_r^s\,|B|^s\\ &\leqslant 2^n\,|B|^s\,\varphi^s\left(T_{i_1}\circ\cdots\circ T_{i_k}\right).\end{aligned}$$

对每个 $(i_1,\cdots,i_k)\in I_k$, 都可以取 $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(B)$ 的这样一个覆盖, 由此

$$\mathcal{H}^s_{\delta\sqrt{n}}(F)\leqslant 2^n\,|B|^s\sum_{I_k}\varphi^s(T_{i_1}\circ\cdots\circ T_{i_k}).$$

但当 $\delta\to 0$ 时, $k\to\infty$, 所以由式 (9.23) 知, 如果 $s>d(T_1,\cdots,T_m)$, 则 $\mathcal{H}^s(F)=0$, 于是 $\dim_{\rm H}F\leqslant d(T_1,\cdots,T_m)$.

$\dim_{\rm H}F$ 的下界估计可以利用 4.3 节的位势理论技巧得出. 这里省略掉这些复杂的细节. □

这个定理的一个推论是: 除非非常不巧地碰到参数的一个例外集, 图 9.12 表示的分形都有同样的维数, 估计大约等于 1.42.

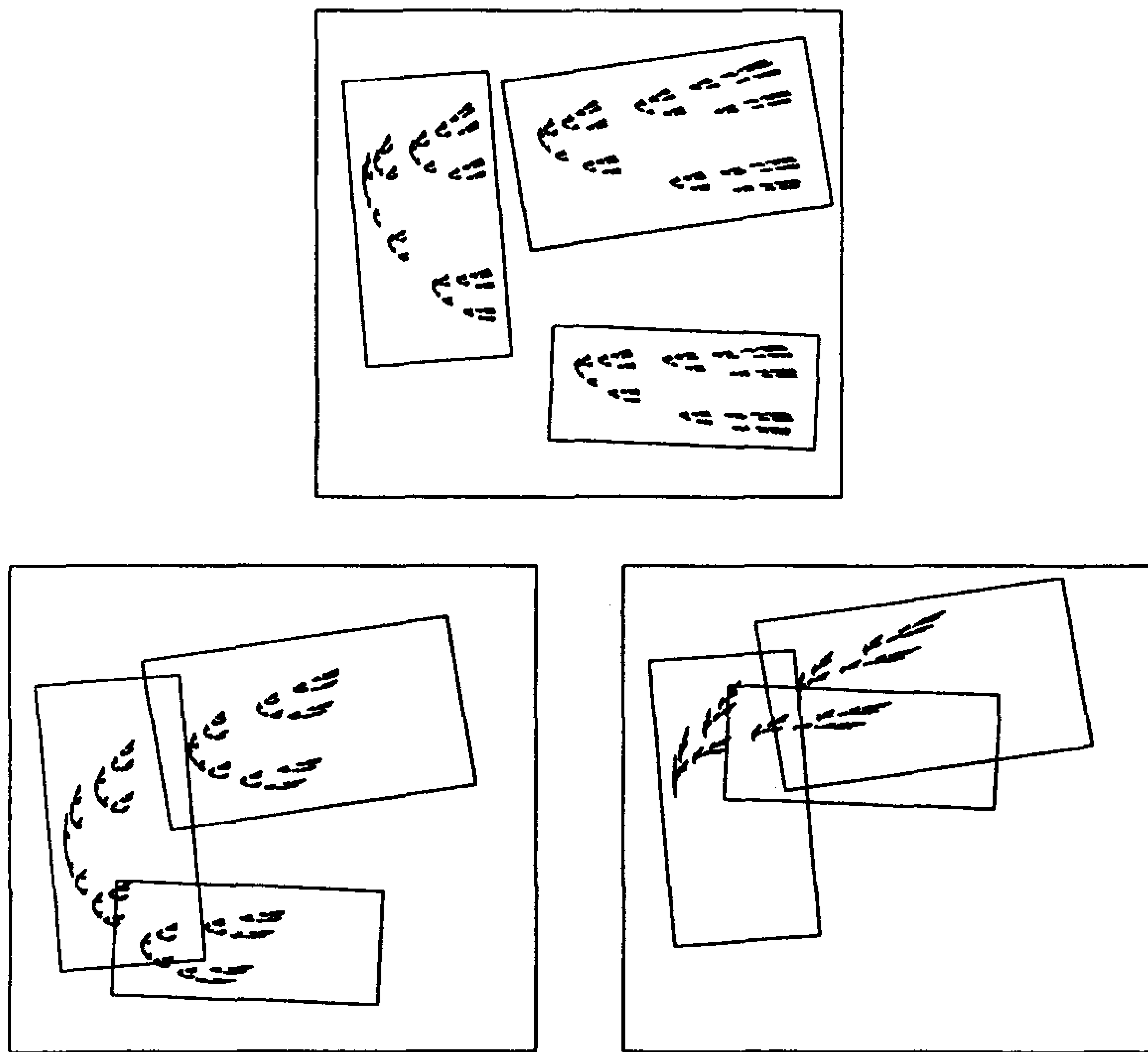


图 9.12 上面给出的每一个分形都是把正方形映射到三个不同的矩形的变换族的吸引子, 产生每个分形的仿射变换只有平移方面的差别, 所以由定理 9.12, 这三个分形的维数相等, 可以算出它们的豪斯多夫和盒维数大约都等于 1.42

## 9.5 在编码图像中的应用

在本章中已经看到，由少量的几个压缩映射可以决定高度复杂的分形结构的物体. 这已经应用到了数据的压缩，如果一张复杂的图像可以由少量的信息编制，那么这个图像可以非常有效地被传送和存储.

人们希望知道什么样的物体可以表成迭代函数系的吸引子或者由这样的集来近似，同时也希望知道如何找到对给定物体的良好表示的压缩变换. 显然，只利用三个或四个变换的可能，会由于在我们的处理中只知少量的参数而受到限制. 当然这样的集同样可能有高度重复迭代结构.

然而，在计算机上绘制自相似集的少许试验 (见 9.1 节)，已经能够作出自然中存在的许多物体的图像，并且效果之好令人惊奇：如羊齿叶、青草、树和云等. 图 9.13 中的羊齿叶和青草分别正好是 4 个和 6 个仿射映射的吸引子. 在自然界中确实表现出了自相似和自仿射性.

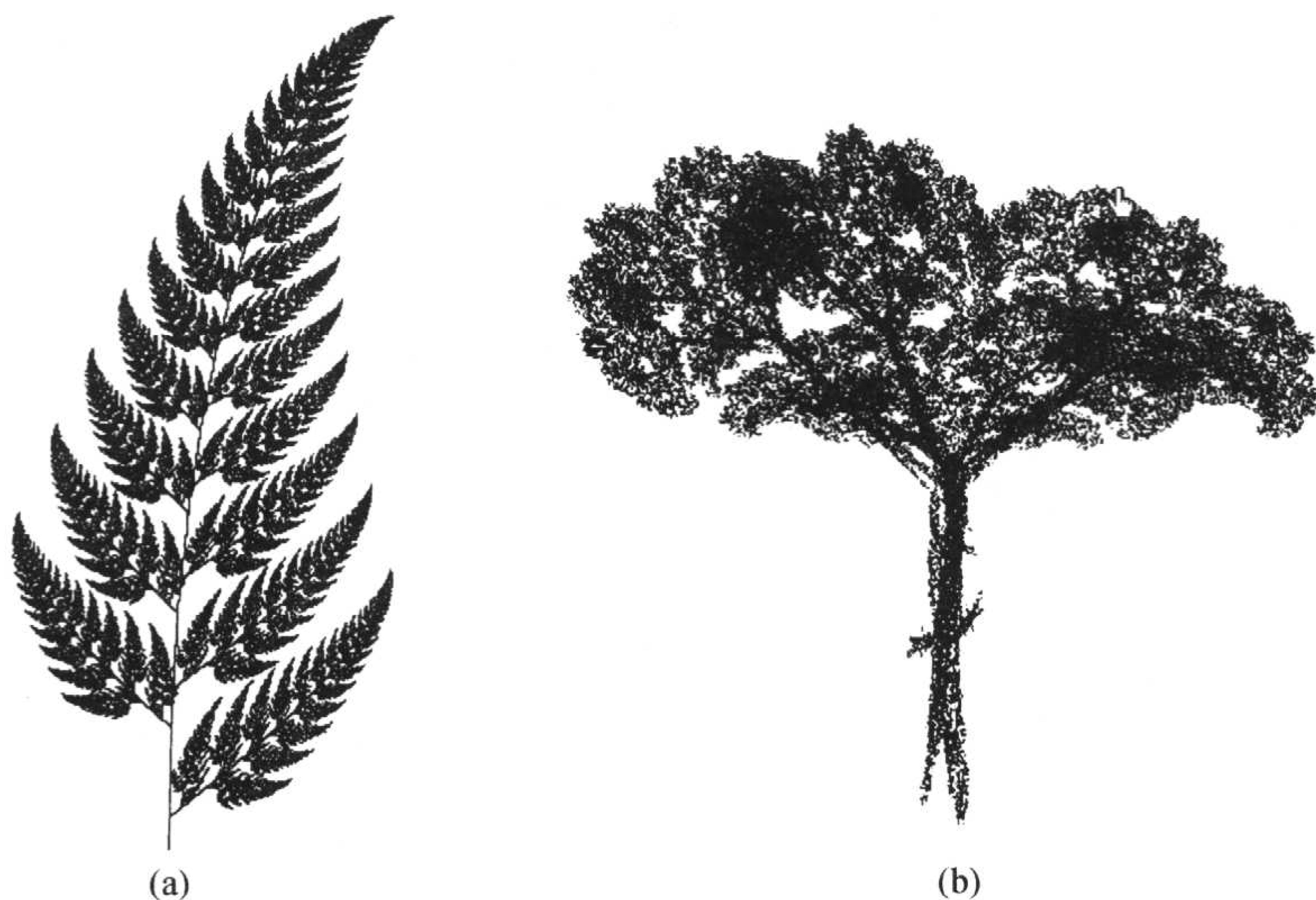



图 9.13 羊齿叶 (a) 和青草 (b) 分别正好是 4 个和 6 个仿射变换下的不变集

下面的定理有时称为拼贴定理，对一类压缩变换，它给出了衡量一个集与相应的 IFS 的吸引子近似程度的一种方法.

**定理 9.13** 设$\{S_1,\cdots,S_m\}$是一个 IFS，并假设对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ 和任意的 $i, |S_i(\boldsymbol{x})-S_i(\boldsymbol{y})|\leqslant c\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$，其中 $c<1$，令 $E\subset R^n$ 是任意的非空紧集，则

$$d(E,F)\leqslant d\left(E,\bigcup_{i=1}^{m}S_i(E)\right)\frac{1}{(1-c)},\tag{9.24}$$

*其中 $F$ 是 IFS 的吸引子, 而 $d$ 是豪斯多夫距离.*

**证明** 利用式 (9.2) 的吸引子的定义和豪斯多夫距离的三角不等式, 并且利用式 (9.5) 可得

$$\begin{aligned} d(E,F) &\leqslant d\left(E,\bigcup_{i=1}^{m}S_i(E)\right)+d\left(\bigcup_{i=1}^{m}S_i(E),F\right)\\ &=d\left(E,\bigcup_{i=1}^{m}S_i(E)\right)+d\left(\bigcup_{i=1}^{m}S_i(E),\bigcup_{i=1}^{m}S_i(F)\right)\\ &\leqslant d\left(E,\bigcup_{i=1}^{m}S_i(E)\right)+cd(E,F), \end{aligned}$$

定理得证.

定理 9.13 的一个推论是 $\mathbf{R}^n$ 的任意紧子集都可以由自相似集近似到任意的精确度.

**推论 9.14** *设 $E$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空紧子集, 给定 $\delta>0$, 则存在以 $F$ 为吸引子的相似压缩映射 $S_1,\cdots,S_m$, 满足 $d(E,F)<\delta$.*

**证明** 设 $B_1,\cdots,B_m$ 是圆心在 $E$ 上, 半径最多为 $\delta/4$ 且覆盖 $E$ 的球族. 则 $E\subset\bigcup_{i=1}^{m}B_i\subset E_{\delta/4}$, 其中 $E_{\delta/4}$ 是 $E$ 的 $\frac{1}{4}\delta$ 平行体. 对每个 $i$, 令 $S_i$ 是具有压缩比小于 $\frac{1}{2}$, 且映射 $E$ 到 $B_i$ 的任意相似压缩映射, 则 $S_i(E)\subset B_i\subset(S_i(E))_{\delta/2}$, 所以 $\left(\bigcup_{i=1}^{m}S_i(E)\right)\subset E_{\delta/4}$ 且 $E\subset\bigcup_{i=1}^{m}(S_i(E))_{\delta/2}$. 由豪斯多夫距离的定义知 $d\left(E,\bigcup_{i=1}^{m}S_i(E)\right)\leqslant\frac{1}{2}\delta$. 由式 (9.24) 得 $d(E,F)<\delta$, 其中 $F$ 是吸引子. □

在上面证明中用到的利用 IFS 吸引子逼近的方法是相当粗糙的, 它似乎引出大量的变换, 但却几乎没有用到 $E$ 的精细结构. 利用少量的变换获得令人信服的图像需要一个相当精巧的处理方法. 一种经常能给出好的结果的方法是先描绘物体的粗略轮廓, 然后用较少的一些相似或仿射的样本尽可能地覆盖它. 已经确定的相似性 (或者仿射性) 可以用来计算吸引子, 它可以与已经建立的物体模型进行比较. 定理 9.13 保证了如果较小的样本的并与物体很接近的话, 吸引子是一个好的逼近, 试验和误差处理的过程能使我们进一步修改和改进这个图像.

更复杂的物体可以将几组不同变换集的吸引子的迭加而建立.

最理想是有一个 "照相机" 能对准物体摄出由确定数目的仿射变换组成的 "照片", 且它们的吸引子是对物体的很好的近似. 显然, 复杂的技巧问题仍然是很多的, 一个处理方法是仔细考察物体, 以估计它的各种几何参数, 并且利用这些参数作为加在变换上的限制.

例如, 像羊齿叶这样的 "自然分形", 可以利用计盒维数的方法去估计它的维数. 在利用像定理 9.3 或定理 9.12 的结果时, 对探索的相似性或仿射性的假设必定给出

具有这个维数的吸引子, 至少在理论上限制了可能的压缩集. 然而, 实际上这样的信息用起来是相当困难的, 并且, 为了大量的运用它, 需要许多进一步的参数.

提供物理物体好图像的平面吸引子经常都有正的面积, 所以不是通常意义下的分形. 然而, 这样的集可以有分形曲线作为边界, 这就给自然物体的图像加上现实主义的特性. 但是, 不变集边界的分形性质似乎也是难于分析的.

在每个压缩变换 $S_i$ 上赋予一个概率 $p_i$, 就可以将这种思想推广为提供部分涂黑或者涂有不同颜色的图像, 其中 $0 < p_i < 1, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. 粗略看来, 这些数据在吸引子 $F$ 上定义一个质量分布 $\mu$, 使 $\mu(A) = \sum_{i=1}^{m} p_i \mu\left(S_i^{-1}(A)\right)$, 且根据 $\mu$ 的局部密度, 集合可能被涂黑或者上色.

这就引出了下面对 9.1 节末尾指出的绘制吸引子的第二种方法的修改. 设 $x_0$ 是任意初始点, 随机地从 $S_1, \cdots, S_m$ 中选择 $S_{j_1}$, 使 $S_i$ 被选中的概率是 $p_i$, 并且令 $x_1 = S_{j_1}(x_0)$; 把这个方法继续下去, 有 $x_k = S_{j_k}(x_{k-1})$, 其中 $S_{j_k}$ 以概率 $p_i$ 等于 $S_i$. 绘出这个序列 $\{x_k\}$(比如去掉最初 100 项), 就得到了吸引子 $F$ 的一个表现. 而在这种方法中, 对每个 $i_1, \cdots, i_q$, 点以 $p_{i_1}, \cdots, p_{i_q}$ 的比例趋向于处在 $S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_q}(F)$ 这一部分中, 这个可变的点的密度直接给出了 $F$ 的各个局部的明暗程度. 此外, 每个点所上的颜色可以由某些规则决定, 它依赖于接近每个点的 $\{x_k\}$ 的数目. 计算机艺术家可以仔细地对无穷尽的可能性进行实验, 这种方法能提供一些给人印象非常深刻的彩色图像, 这些图像已经可以利用相对较少的变换产生.

也许在这一节的末尾谈谈关于利用迭代函数系来描绘图像的一些 "优点和缺点" 是合适的. 利用自相似性和自然的迭代, 确实在人造物体中通常能保证可以由较少 (可能小于 100) 的压缩变换, 以及有效的概率来描述有关情景. 这显示了可比较的信息的巨大的浓缩, 比如描述细节所需的精细的网格中, 每个正方形的颜色. 相应的缺点是在图像的不同部分之间有高度的相关性, 这个方法对一棵树整体的图像描绘是相当好的, 但如果在不同分支上的树叶的精确排列次序需要重要描绘时, 这种方法就不好用了. 给定了仿射压缩集, 图像的复制是直截计算的结果, 适宜于平行计算, 同时是稳定的 —— 压缩变换的很小变化导致了吸引子的很小变化. 这些压缩变换可以在任意小的尺度上定义图像, 并且容易绘出小区域的特写. 目前这个方法的主要缺点是较难得到描述给定的物体和图像的压缩变换集.

## 9.6 注记和参考文献

第一个系统描述迭代函数系的是 Hutchinson(1981), 虽然类似的思想在较早就存在着. 自相似集的维数公式的一个变形, 实质上是 Moran(1946) 给出的. 有关自相似集和其他不变集的计算机图像的文献很多, Mandelbrod(1982), Dekking(1982), Peitgen, Jürgens and Saupe(1992), Barnsley(1993) 等就包含许多有趣和美丽的例子.

关于热力学形式的细节和定理 9.9 的材料可参见 Ruelle(1983), Bedford(1991), Beck and Schlögl(1993), Falconer(1997) 和 Pesin(1997) 的工作.

对自仿射集的讨论由 Mandelbrot(1986) 给出, Peres and Solomyak(2000) 讨论了维数性质. 例 9.11 的全部细节由 McMulleu(1984) 给出, 而定理 9.12 的详细证明可在 Falconer(1988) 和 Solomyak(1998) 中找到.

这些思想在很多方向上都有发展. 例如, 带有无限多个变换的 IFS, 见 Mauldin and Urbański(1996,1999); 图像的直接构造, 参见 Mauldin and Williams(1988).

图像的压缩和编码的应用由 Barnsley(1993), Barnsley and Hurd(1993), Fisher (1995) 论述.

## 练　习

**9.1** 验证豪斯多夫距离满足距离条件.

**9.2** 找出一对 **R** 上的相似变换, 以区间 [0, 1] 为吸引子, 进而找出无穷多对这样的变换.

**9.3** 找出 (i)4 个和 (ii)3 个 **R** 上的相似变换, 使三分康托尔集分别是它们的吸引子. 对每种情形, 验证 ln2/ln3 是式 (9.13) 的解.

**9.4** 写出 (用矩阵表示) 定义 von Koch 曲线 (见图 9.2) 的 4 个基本相似变换. 找出一个满足开集条件的开集. 从定理 9.3 推出 von Koch 曲线的盒维数和豪斯多夫维数确实是 ln4/ln3.

**9.5** 找出图 0.5 给出的集的 IFS, 并证明出它的豪斯多夫维数和盒维数由 $4\left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$ 确定.

**9.6** 绘出以⊤为生成元: 构造分形的前几步, 这个分形的豪斯多夫维数和盒维数各等于多少 (T 字形竖的短把是横线长度的 1/4)?

**9.7** $F$ 是由类似康托尔集构造而得的集, 在构造的每一步左边留下的区间长度是原长度的 1/4, 右边是 1/2. 即如果 $E_0$ 是区间 [1,0], 则 $E_1$ 由 [0, 1/4] 和 [1/2, 1] 组成. 以此类推, 求 $F$ 的豪斯多夫维数和盒维数.

**9.8** 描述以下 **R** 上的 IFS 的吸引子:

(i) $S_1(x) = \frac{1}{4}x, \quad S_2(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$;

(ii) $S_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad S_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;

(iii) $S_1(x) = \frac{2}{3}x, \quad S_2(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

**9.9** 把单位正方形 $E_0$ 分成 $p^2$ 个边长为 $1/p$ 的小正方形, 用一般的方法在它们中选取 $m$ 个形成 $E_1$. 设 $S_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 为把 $E_0$ 映射为这些小正方形的相似变换. 证明如此定义的 IFS 的吸引子 $F$ 的维数是 $\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{B}} F = \ln m / \ln p$.

**9.10** 设 $S_1, S_2 : [0,1] \to [0,1]$ 分别由 $S_1(x) = x/(2+x)$ 和 $S_2(x) = 2/(2+x)$ 给出，证明这两个变换的吸引子 $F$ 满足：$0.53 < \dim_H F < 0.81$.

**9.11** 证明：对满足定理 9.3 的任何相似集 $F$ 和任意 $x \in F$, 有

$$c_1 \leqslant \underline{D}(F,x) \leqslant \bar{D}(F,x) \leqslant c_2$$

其中 $c_1$ 和 $c_2$ 是正常数 (见密度的定义式 (5.2) 和式 (5.3)).

**9.12** 设 $S_1, \cdots, S_m$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集 $D$ 上的双利普希茨压缩映射, $F$ 是满足式 (9.2) 的吸引子. 证明：如果 $V$ 是任意与 $F$ 相交的开集, 则 $F$ 和 $F \bigcap V$ 有相同的豪斯多夫维数、相同的上盒维数和相同的下盒维数. 并由推论 3.9 证明 $\dim_P F = \overline{\dim}_B F$.

**9.13** 在下列两种情形下验证例 9.11 中的豪斯多夫维数公式：

(a) 对 $1 \leqslant j \leqslant p, N_j = N$;

(b) 对 $1 \leqslant j \leqslant p, N_j = N$ 或 0 ($N$ 是整数, 且 $1 < N < q$).

(提示：参见例 7.13.)

**9.14** 计算图 9.11 中集的豪斯多夫维数和盒维数.

**9.15** 给定集的一个生成元, 编制一个绘制平面自相似集的计算机程序.

**9.16** 编写一个计算机程序, 用来绘制平面区域的给定压缩变换集的吸引子 (见 9.1 节末尾). 研究相似变换、仿射变换的吸引子, 试做一些非线性变换的研究. 如果你感到还有余力, 可以编写一些利用计盒维数的方法估计这些集的维数的程序.

# 第 10 章　数论中的例子

分形通常可以用数论的术语来定义. 例如, 三分康托尔集是由在 3 进制的展开式中, 只包含数字 0 和数字 2 的、0 和 1 之间的数组成. 本章讨论经典数论中出现的三类分形, 用这些例子来说明本书前一部分出现的一些概念.

## 10.1　数的数字分布

在这一节, 考虑实数按 $m$ 进制的展开, 这里 $m \geqslant 2$ 是一个固定的整数. 设 $p_0, p_1, \cdots, p_{m-1}$ 是和为 1 的"比例", 即 $0<p_i<1$, 且 $\sum_{i=0}^{m-1} p_i=1$. 令 $F(p_0, \cdots, p_{m-1})$ 是 $[0,1)$ 上满足下述条件的数 $x$ 构成的集合: $x$ 的按 $m$ 进制的展开式中, 分别按比例 $p_0, \cdots, p_{m-1}$ 包含数字 $0, 1, \cdots, m-1$. 更精确地说, 如果 $n_j\left(x|_k\right)$ 代表在 $x$ 的按 $m$ 进制的展开式中, 前 $k$ 个位置中数字 $j$ 出现的次数. 则

$$F\left(p_0, \cdots, p_{m-1}\right)=\left\{x \in[0,1): \lim_{k \rightarrow \infty} n_j\left(x|_k\right)/k=p_j, \text{ 其中 } j=0,1, \cdots m-1\right\} \tag{10.1}$$

这样, 可认为 $F(1/3, 2/3)$ 是在按 2 进制的展开式中, "三分之二" 是 1, 而其余是 0 的数的集合.

众所周知, 对几乎所有的数 (在勒贝格测度的意义下) 按任意进制的展开式都是*正常的*(normal); 也就是说, 对任意的 $m$, 在 $m$ 进制的展开式中, 数字 $0, 1, \cdots, m-1$ 出现的比例都相等. 用上面给的记号, 即对任意 $m$, $F\left(m^{-1}, \cdots, m^{-1}\right)$ 的勒贝格测度都等于 1, 维数也是 1. 矛盾的是, 谁也没举出过按任意进制展开都正常的数的明确例子. 但是, 可以用豪斯多夫维数描述 $p_i$ 不全相等时集 $F\left(p_0, \cdots, p_{m-1}\right)$ 的大小.(这样的集在 $[0,1)$ 上是稠的, 所以其盒维数为 1.)

在下面的证明中利用了质量分布的技巧, 质量分布自然是以概率测度的形式出现的. 注意, 这里采用了一个通常的约定 $0 \times \ln 0=0$.

**命题 10.1**　*$F=F\left(p_0, \cdots, p_{m-1}\right)$ 的定义如上, 则*

$$\operatorname{dim}_{\mathrm{H}} F=-\frac{1}{\ln m} \sum_{i=0}^{m-1} p_i \ln p_i .$$

**证明**　这个证明最好从概率方面来考虑. 设想按 $m$ 进制展开的数 $x=0.\ i_1 i_2 \cdots$ 是按下述方法随机选出的: 对每个 $k$, 第 $k$ 个数字 $i_k$ 独立地以概率 $p_j$ 取值 $j$. 因此

以 $[0,1)$ 作为样本空间, 并且在 $[0,1)$ 的子集上定义概率测度 P, 使得如果 $I_{i_1,\cdots,i_k}$ 是 $m$ 进制的展开式中以 0. $i_1i_2\cdots i_k$ 开头的那些数字组成的 $k$ 水平基本区间, 那么一个数属于这个区间的概率为

$$\mathrm{P}\left(I_{i_1,\cdots,i_k}\right) = p_{i_1}\cdots p_{i_k}. \tag{10.2}$$

给定 $j$, 对 $k$=1, 2, $\cdots$, 事件 "$x$ 的第 $k$ 个数字是 $j$" 是相互独立的. 强大数定律 (见练习 1.27) 的一个结果是, 在取数的重复独立试验中, 事件发生的频率以概率 1 趋近于事件发生的概率. 这样, 以概率 1, 对任意的 $j$, 当 $k\to\infty$ 时,

$$n_j\left(n|_k\right)/k = (\text{在前 } k \text{ 个数字中 } j \text{ 出现的次数})/k \to p_j,$$

因此 $\mathrm{P}(F) = 1$. 把那些包含 $x$ 的 $k$ 水平区间 (长度为 $m^{-k}$) 记为 $I_k(x) = I_{i_1,\cdots,i_k}$. 对固定的 $y$, 通过对式 (10.2) 取对数, 可知 $x\in I_k\left(y\right)$ 的概率由下式给出:

$$\ln\mathrm{P}\left(I_k\left(y\right)\right) = n_0\left(y|_k\right)\ln p_0 + \cdots + n_{m-1}\left(y|_k\right)\ln p_{m-1}.$$

如果 $y\in F$, 则对每个 $j$, 当 $k\to\infty$ 时, $n_j\left(y|_k\right)/k\to p_j$, 所以

$$\frac{1}{k}\ln\frac{\mathrm{P}(I_k(y))}{|I_k(y)|^s} = \frac{1}{k}\ln\mathrm{P}\left(I_k(y)\right) - \frac{1}{k}\ln m^{-ks} \to \sum_{i=0}^{m-1} p_i\ln p_i + s\ln m.$$

因此, 对 $F$ 中所有的 $y$, "区间密度"

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{P}(I_k(y))}{|I_k(y)|^s} = \begin{cases} 0 & \text{如果 } s<\theta \\ \infty & \text{如果 } s>\theta \end{cases}$$

这里

$$\theta = -\frac{1}{\ln m}\sum_{i=0}^{m-1} p_i\ln p_i.$$

这实际上已是命题 4.9 中的情形了. 如果把 "球面密度" $\lim\limits_{r\to 0}\mu\left(B\left(x,r\right)\right)/r^s$ 用这里的区间密度来代替的话, 则同样的结论成立并且可以用同样的方法证明. 于是, 如果 $s<\theta$, 则 $\mathcal{H}^s(F)=\infty$; 如果 $s>\theta$, 则 $\mathcal{H}^s\left(F\right)=0$, 这正是所要证明的. □

## 10.2 连 分 数

可以利用连分数展开式代替 $m$ 进制展开式来定义数集. 任一个不是整数的数 $x$ 都可以写成

$$x = a_0 + 1/x_1,$$

这里 $a_0$ 是一个整数, 并且 $x_1>1$. 类似地, 如果 $x_1$ 不是整数, 那么

$$x_1=a_1+1/x_2,$$

这里 $x_2>1$, 所以

$$x=a_0+1/(a_1+1/x_2).$$

按这种方法继续下去, 对每个 $k$

$$x=a_0+1/\left(a_1+1/(a_2+1/\left(\cdots+1/\left(a_{k-1}+1/x_k\right)\right))\right),$$

假设在每一步 $x_k$ 都不是整数, 则称整数序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 是 $x$ 的*部分商*(partial quotients), 并记

$$x=a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+\cdots}$$

为 $x$ 的*连分数展开*(continued fraction expansion). 当且仅当 $x$ 是有理数时, 这个展开在有限项结束, 否则取有限项,

$$a_0+1/(a_1+1(a_2+1/(\cdots+1/a_k)))$$

给出了一个逼近 $x$ 的有理数序列, 当 $k\to\infty$ 时, 它收敛到 $x$. (事实上, 连分数与丢番图逼近理论有密切的关系, 见 10.3 节.)

连分数的例子包括

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+\cdots}$$

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+\cdots}.$$

更一般地, 任何二次根式 (也就是, 具有整数系数的二次方程的根) 最终都有周期性的部分商.

正如下一个例子中表明的那样, 由加在部分商上的一些条件定义出来的数集经常是分形.

**例 10.2** 设 $F$ 是正实数组成的数集, 其上的元素 $x$ 都具有无穷的连分数展开式, 且它们的部分商都等于 1 或 2. 那么 $F$ 是分形, 且 $0.44<\dim_{\mathrm{H}}F<0.66$.

**证明** 易见 $F$ 是闭的 (因为它的余集是开的), 且是有界的 (因为 $F\subset[1,3]$). 此外, 只有当 $x$=1+1/$y$ 或 $x$=2+1/$y$ 且 $y\in F$ 时, 才有 $x\in F$. 所以若令 $S_1(x)=1+1/x$ 和 $S_2(x)=2+1/x$, 即有 $F=S_1(F)\bigcup S_2(F)$, 换句话说, 在式 (9.2) 的意义下, $F$ 是迭代函数系 $\{S_1, S_2\}$ 的吸引子. 事实上, $F$ 恰好就是例 9.8 中所分析过的集, 在那里, 已经指出它的豪斯多夫维数介于 0.44 和 0.66 之间. □

随着计算方法的发展, 由连分数展开定义的集合维数已经很精确. 例 10.2 中集 $F$ 的豪斯多夫维数是 $0.5312\,80506\cdots$.

显然, 改变加在部分商上的条件, 可以得到某些变换的不变集的其他分形.

## 10.3 丢番图逼近

对给定的一个无理数 $x$, 用不大于 $q_0$ 的 $q$ 作分母的有理数 $p/q$ 来逼近 $x$ 可以接近到什么程度? 丢番图逼近就是研究这类问题的, 它可以出现在很实际的情形中 (见 13.6 节), 经典 Dirichlet 定理 (见练习 10.8) 指出, 对任何实数 $x$, 有无限多的正整数 $q$ 使得

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$$

对某个整数 $p$ 成立; 这样的 $p/q$ 是对 $x$ 的 "好的" 有理逼近. 等价地有

$$||qx|| \leqslant q^{-1}$$

对无穷多个 $q$ 成立, 这里 $||y|| = \min_{m\in\mathbf{Z}} |y-m|$ 表示 $y$ 到最近整数的距离.

存在可应用到几乎所有的数 $x$ 上的 Dirichlet 定理的变化形式. 可以证明, 如果 $\psi(q)$ 是 $q$ 的不增函数, 且 $0 \leqslant \psi(q)$, 则根据 $\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q)$ 发散或者收敛, 分别对应对几乎所有的 $x$, 或者几乎没有 $x$(在 1 维勒贝格测度的意义下), 使无限多个 $q$ 满足

$$||qx|| \leqslant \psi(q). \tag{10.3}$$

在后一种情况下, 使式 (10.3) 有无穷多个解的 $x$ 的集合不仅勒贝格测度为零, 而且经常是分形.

把使

$$||qx|| \leqslant q^{1-\alpha} \tag{10.4}$$

对无穷多个正整数 $q$ 成立的数 $x$ 称为是 $\alpha$ *很好可逼近的*($\alpha$-well approximable). 自然要问 $\alpha > 2$ 时, 这个集有多大, 当然, 还要问, 这样的无理数是否确实存在. 下面将证明 Jarník 定理, 就是 $\alpha$ 很好可逼近的数集的豪斯多夫维数是 $2/\alpha$.

几乎立即可由例 4.7(核对一下!) 得出 $\alpha$ 很好可逼近的数集的维数至少是 $1/\alpha$, 更精确的要求是要得到 $2/\alpha$ 的值. 具体的想法如下, 设 $G_q$ 是满足式 (10.4) 的 $[0,1]$ 中的 $x$ 的集; 一个因子分解方面的论证可以证明, 如果 $n$ 是一个较大的整数, 而 $p_1, p_2$ 是素数且 $n < p_1, p_2 \leqslant 2n$, 则 $G_{p1}$ 和 $G_{p2}$ 是不交的 (除去很接近 0 或 1 的点外), 粗略地说, 集

$$H_n = \bigcup_{\substack{p\text{ 是素数}\\ n<p\leqslant 2n}} G_p$$

由 $\sum_{n<p\leqslant 2n} 1/p \simeq n^2/\ln n$ 个具有相当规则的间距, 自身长度至少为 $2(2n)^{-\alpha}$ 的区间组成. 由此, 如果 $n_k$ 是增加得很快的序列, 那么交集 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H_{n_k}$ 的维数至少是 $2/\alpha$, 注意到属于这个交集的任何数都属于无穷多个 $G_p$, 所以是 $\alpha$ 很好可逼近的.

**Jarník 定理 10.3** 假设 $\alpha > 2$, 设 $F$ 是使下面不等式对无穷多个正整数 $q$ 成立的 $[0,1]$ 中的实数 $x$ 所组成的集合:

$$||qx|| \leqslant q^{1-\alpha}. \tag{10.5}$$

则 $\dim_H F = 2/\alpha$.

* **证明** 对每个 $q$, 用 $G_p$ 表示满足式 (10.5) 的 $[0,1]$ 中 $x$ 的集合, 那么 $G_p$ 由 $q-1$ 个长度为 $2q^{-\alpha}$ 的区间和两个长度为 $q^{-\alpha}$ 的 "两端" 区间组成. 显然, 对每个 $k$, $F \subset \bigcup\limits_{q=k}^{\infty} G_p$, 所以取 $q \geqslant k$ 的 $G_p$ 为 $F$ 的覆盖, 则如果 $2k^{-\alpha} \leqslant \delta$, 即得 $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leqslant \sum_{q=k}^{\infty}(q+1)(2q^{-\alpha})^s$; 如果 $s > 2/\alpha$, 序列 $\sum_{q=1}^{\infty}(q+1)(2q^{-\alpha})^s$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\sum_{q=k}^{\infty}(q+1)(2q^{-\alpha})^s = 0$, 且 $\mathcal{H}_\delta^s(F)$=0, 因此 $\dim_H F = 2/\alpha$.

设 $G_q'$ 是满足式 (10.5) 的 $(q^{-\alpha}, 1-q^{-\alpha})$ 中的 $x$ 的集合, 所以 $G_q'$ 恰好是去掉两端区间的 $G_q$. 设 $n$ 是一个正整数, 并假设 $p_1$ 和 $p_2$ 是满足 $n < p_1 < p_2 \leqslant 2n$ 的素数. 下面证明 $G_{p_1}'$ 和 $G_{p_2}'$ 是不交的, 并且分离得相当好. 对 $1 \leqslant r_1 < p_1$, 以及 $1 \leqslant r_2 < p_2$, 因为 $p_1$ 和 $p_2$ 都是素数, 所以 $p_1 r_2 \neq p_2 r_1$. 于是

$$\left|\frac{r_1}{p_1} - \frac{r_2}{p_2}\right| = \frac{1}{p_1 p_2}|p_2 r_1 - p_1 r_2| \geqslant \frac{1}{p_1 p_2} \geqslant \frac{1}{4n^2}$$

即如果分别从 $G_{p1}'$ 和 $G_{p2}'$ 中任意取出一个区间, 这两个区间的中点间的距离至少是 $1/4n^2$. 因为这些区间的长度最大为 $2n^{-\alpha}$, 所以对某个充分大的数 $n_0$, 如果 $n \geqslant n_0$, 则 $G_{p1}'$ 中的任何点与 $G_{p2}'$ 中的任何点的距离至少是 $\frac{1}{4}n^{-2} - 2n^{-\alpha} \geqslant \frac{1}{8}n^{-2}$. 对这个 $n$, 集

$$H_n = \bigcup_{\substack{p\ \text{是素数} \\ n < p \leqslant 2n}} G_p'$$

是 $G_p'$ 中的区间的不交并, 所以 $H_n$ 由长度至少为 $(2n)^{-\alpha}$ 的区间构成, 并且他们被长度至少为 $\frac{1}{8}n^{-2}$ 的间隙分隔开. 如果 $I \subset [0,1]$ 是任何满足 $3/|I| < n < p \leqslant 2n$ 的区间, 那么至少有 $p|I|/3 \geqslant n|I|/3$ 个 $G_p'$ 的区间完全包含在 $I$ 中的. 素数定理的一种表述是: 在 2 与 $n$ 之间的素数的个数渐近为 $n/\ln n$, 所以对于某个充分大的数 $n_1 \geqslant n_0$, 如果 $n_{>}n_1$, 则 $(n, 2n]$ 范围内至少有 $n/(2\ln n)$ 个素数. 于是当 $n \geqslant n_1$ 且 $|I| \geqslant 3/n$ 时, 至少有

$$\frac{n^2|I|}{6\ln n} \tag{10.6}$$

个 $H_n$ 的区间包含在 $I$ 中.

为完成证明, 可应用例 4.6. 取 $n_1$ 如上, 对 $k = 2, 3, \cdots$ 取 $n_k = \max\{n_{k-1}^k, 3\times 2^a n_{k-1}^a\}$, 这里 $a > \alpha$ 是整数. 设 $E_0 = [0,1]$, 对 $k = 1, 2, \cdots$, 设 $E_k$ 是由 $H_{n_k}$ 中完全

包含在 $E_{k-1}$ 内的全部区间组成.$E_k$ 的区间长度至少为 $(2n_k)^{-\alpha}$ 并且由长度至少为 $\varepsilon_k=\dfrac{1}{8}n_k^{-2}$ 的间隙分隔开. 应用式 (10.6), $E_{k-1}$ 的每个区间至少包含 $m_k$ 个 $E_k$ 的区间, 这里, 如果 $k\geqslant 2$,

$$m_k=\frac{n_k^2\left(2n_{k-1}\right)^{-\alpha}}{6\ln n_k}=\frac{cn_k^2n_{k-1}^{-\alpha}}{\ln n_k}$$

其中 $c=2^{-\alpha}/6$. 由式 (4.7)(取 $m_1=1$), 因为分子、分母的主要部分是 $\ln n_{k-1}$ 的那些项.(注意 $\ln n_k=k\ln n_{k-1}$, 所以对于充分大的 $k$, $\ln n_k=ck!$) 所以

$$\begin{aligned}
&\dim_{\mathrm{H}}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)\\
\geqslant&\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln\left[c^{k-2}n_1^{-\alpha}\left(n_2\cdots n_{k-2}\right)^{2-\alpha}n_{k-1}^2\left(\ln n_2\right)^{-1}\cdots\left(\ln n_{k-1}\right)^{-1}\right]}{-\ln\left[cn_{k-1}^{-\alpha}\left(8\ln n_k\right)^{-1}\right]}\\
=&\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln\left[c^{k-2}n_1^{-\alpha}\left(n_2\cdots n_{k-2}\right)^{2-\alpha}\left(\ln n_2\right)^{-1}\cdots\left(\ln n_{k-1}\right)^{-1}\right]+2\ln n_{k-1}}{-\ln\left(c/8\right)+\ln k\left(\ln n_{k-1}\right)+\alpha\ln n_{k-1}}\\
=&2/\alpha
\end{aligned}$$

如果对任意的 $k$, $x\in E_k\subset H_{n_k}$, 则 $x$ 属于无穷多个 $G_p'$, 所以 $x\in F$, 因此 $\dim_{\mathrm{H}}F\geqslant 2/\alpha$. □

*[本节的剩余部分可以略去.]

很明显, Jarník 定理中的集 $F$ 在 $[0,1]$ 中稠, 且对任一区间 $I$, $\dim_{\mathrm{H}}(F\bigcap I)=2/\alpha$. 然而不仅如此, $F$ 还是在 8.2 节讨论的那种 "大交集", 并且有一些惊人的结果. 对于下面的命题中 $\mathcal{C}^s$ 的定义, 参见式 (8.7) 和式 (8.8).

**命题 10.4** *设 $\alpha>2$. 如果 $F$ 是使 $\|qx\|\leqslant q^{1-\alpha}$ 对无穷多个 $q$ 成立的正数集, 那么对任意 $s<2/\alpha$, $F\in\mathcal{C}^s[0,\infty)$.*

**证明注记** 对这个命题的证明, 先根据 Jarník 定理 10.3 的证明至 $H_n$ 定义的部分, 然后把例 8.9 的方法和素数定理的估计方法结合在一起, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{H}_\infty^s\left(I\bigcap H_n\right)=\mathcal{H}_\infty^s(I)$. 稍微不同的方法是要求估计那些能与覆盖区间 $U$ 相交的 $H_n$ 的区间的数目, 而 $H_n$ 中的区间能否与覆盖区间相交取决于 $|I|<I/n$ 或 $|I|\geqslant I/n$. □

由命题 10.4 首先得出的推论是 $\dim_{\mathrm{H}}F=2/\alpha$, 这已经由 Jarník 定理证明了. 然而, 命题 8.8 告诉我们 $F$ 的光滑双射的像也在 $\mathcal{C}^s$ 中. 于是, 如果 $s<2/\alpha$, 则对任何连续可微且满足 $|f'(x)|>c>0$ 的函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, 都有 $f(F\bigcap[a,b])$ 在 $\mathcal{C}^s\left[f(a),f(b)\right]$ 中. 取一组函数 $f_m(x)=x^{1/m}$, 对于 $s<2/\alpha$, 则有 $f_m(F)\bigcap[1,2]$ 在 $\mathcal{C}^s[1,2]$ 中. 由命题 8.6 则有 $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}f_m(F)\bigcap[1,2]$ 在 $\mathcal{C}^s[1,2]$ 中, 所以

$$\dim_{\mathrm{H}}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} f_m(F)\right) = 2/\alpha.$$

但是

$$f_m(F) = \left\{x : \|qx^m\| \leqslant q^{1-\alpha} \text{ 对无穷多个 } q \text{ 成立}\right\}$$

因此这已经证出, 由所有正整数幂都是 $\alpha$ 很好可逼近的数 $x$ 组成的数集, 豪斯多夫维数都等于 $2/\alpha$.

显然, 可以利用函数 $f_m$ 的不同序列得出很多变化.

## 10.4　注记和参考文献

介绍数论的书籍浩如烟海, Hardy and Wright(1979) 这部经典著作是很难超越的了.

按 $m$ 进制展开的数字分布的维数分析可以在 Billingsley(1978) 中找到. 很多数论的教材中都讨论了连分数. Rogers(1998) 和 Bumby(1985) 讨论了维数方向的问题; Mauldin and Urbanski(1999) 在具有无穷多个映射的迭代函数系的框架下, 也考虑了维数问题. Hensley(1996) 计算了大量由连分数定义的不同数集的豪斯多夫维数.

丢番图逼近的完整叙述可以在 Cassels(1957) 和 Schmidt(1980) 中找到. Jarník (1931), Besicovitch(1934), Eggleston(1952) 和 Kaufman(1981) 给出了 Jarník 定理的不同证明. Bernik and Dodson(1999) 的书讨论了许多丢番图逼近的维数方面的问题.

一些关于分形和数论之间的新的联系可以在 Lapidus and Frankenhuysen(2000) 中找到.

### 练　习

**10.1**　求出 $\mathbf{R}$ 上的相似的迭代函数系, 使它的吸引子 $F$ 是由区间 [0,1] 上、10 进制的展开式中只有偶数的数组成的集合. 并证明 $\dim_{\mathrm{H}} F = \ln 5/\ln 10$.

**10.2**　证明在式 (10.1) 中的集 $F(p_0, \cdots, p_{m-1})$ 是在式 (9.2) 的意义下的 $m$ 个相似变换集的吸引子.(它当然不是紧的.)

**10.3**　找出以 3 为底的展开式中 "2 的数目是 1 的数目的 2 倍" 的那些数所组成的集的豪斯多夫维数.(即, 使下式两边的极限都存在且 $2\lim\limits_{k\to\infty} n_1(x|_k)/k = \lim\limits_{k\to\infty} n_2(x|_k)/k$ 成立的那些 $x$.)

**10.4**　找出下面两个数的连分数表达式 (i) 41/9 和 (ii)$\sqrt{5}$.

**10.5**　什么数有如下的连分数表达式

$$1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+\cdots}?$$

**10.6** 利用 $\sqrt{2}$ 的连分数表达式 (它的部分商是 $1, 2, 2, 2, \cdots$ ) 得到 $\sqrt{2}$ 的某个很好的有理逼近.(事实上, 把从第 $k$ 个部分商开始的部分分数去掉, 所得到的数给出了由分母相等或分母较小的数所做的逼近中最好的有理逼近.)

**10.7** 求连分数展开的部分商只包含数字 2 和 3 的正数所构成的集, 并求该集的豪斯多夫维数和盒维数的估计.

**10.8** 设 $x$ 是实数, $Q$ 是正整数. 通过考虑数 $\{rx\,(\text{mod}\,1) : r = 0, 1, 2\cdots, Q\}$, 证明狄利克雷 (Dirichlet) 定理: 即, 存在一个满足 $0 \leqslant q \leqslant Q$ 的整数 $q$, 使得 $\|qx\| \leqslant Q^{-1}$. 由此推出有无穷多个正整数 $q$, 使得 $\|qx\| \leqslant q^{-1}$.

**10.9** 设 $n$ 和 $d$ 是正整数, 证明如果丢番图方程 $x^n - dy^n = 1$ 有无穷多个解 $(x, y)$, 其中 $x$ 和 $y$ 都是正整数, 那么 $d^{1/n}$ 一定是 $n$ 很好可逼近的.

**10.10** 固定 $\alpha > 3$, 令 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上使得 $\|qx\| \leqslant q^{1-\alpha}$ 和 $\|qy\| \leqslant q^{1-\alpha}$ 对无穷多个正整数 $q$ 同时成立的 $(x, y)$ 所组成的集合. 用与定理 10.3 第一部分的证明相似的方法, 证明 $\dim_{\text{H}} F \leqslant 3/\alpha$.(事实上, 利用证明中留下的那部分证明的推广, 可以证明 $\dim_{\text{H}} F = 3/\alpha$.)

**10.11** 证明对于任意的正整数 $m$, 使 $(x + m)^2$ 都是 $\alpha$ 很好可逼近的实数 $x$ 所组成的集合的豪斯多夫维数等于 $2/\alpha$.

# 第11章 函数的图

许多同时具有理论和实际重要性的令人感兴趣的分形是以函数图的形式出现的. 确实, 当许多现象被绘制成时间的函数时, 就显示了分形的特性. 相应的例子包括风速, 容器中液体的水平高度, 股票市场的数据和价格等, 至少当记录的数据跨越较长的时间间隔时便是如此.

## 11.1 图的维数

考虑函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, 在一定的条件下, 作为 $(t,x)$ 坐标平面子集的图

$$\text{graph}f=\{(t,f(t)):a\leqslant t\leqslant b\}$$

可能是分形 (注意, 为了与本书后面的部分一致, 这里使用了坐标 $(t,x)$, 而不用 $(x,y)$, 因为独立变量通常都是时间). 如果 $f$ 是连续可微的, 则容易看出 graph$f$ 的维数是 1, 而且它确实是规则 1 集 (见 5.1 节). 如果 $f$ 是有界变差的, 即对任意的分割 $a=t_0<t_1<\cdots t_m=b$, $\sum_{i=0}^{m-1}|f(t_i)-f(t_{i+1})|$ 小于或等于某个常数, 则结果也是一样的. 然而, 也可能有的连续函数是相当不规则的, 并且具有维数严格大于 1 的图. 也许人们最熟悉的例子是

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{(s-2)k}\sin\left(\lambda^k t\right),$$

其中 $1<s<2$, $\lambda>1$. 这个函数本质上是魏尔斯特拉的处处不可微的连续函数的例子, 它的图的盒维数等于 $s$, 并且人们相信其豪斯多夫维数也是 $s$.

首先导出一些简单的但有广泛应用的关于函数图的盒维数的估计. 给定函数 $f$ 和区间 $[t_1,t_2]$, 这里记 $R_f$ 为 $f$ 在区间 $[t_1,t_2]$ 上的最大变化范围(maximum range), 即

$$R_f[t_1,t_2]=\sup_{t_1\leqslant t,u\leqslant t_2}|f(t)-f(u)|.$$

**命题 11.1** 设 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 连续, 又设 $0<\delta<1$, 并且 $m$ 是大于或者等于 $1/\delta$ 的最小整数. 如果 $N_\delta$ 是 $\delta$ 网正方形与 graph$f$ 相交的正方形个数, 则

$$\delta^{-1}\sum_{i=0}^{m-1}R_f[i\delta,(i+1)\delta]\leqslant N_\delta\leqslant 2m+\delta^{-1}\sum_{i=0}^{m-1}R_f[i\delta,(i+1)\delta] \tag{11.1}$$

**证明** 由 $f$ 的连续性知, 与 graph$f$ 相交的, 在区间 $[i\delta,(i+1)\delta]$ 上的柱集内的边长为 $\delta$ 的网正方形个数最少为 $R_f[i\delta,(i+1)\delta]/\delta$, 而最多为 $2+R_f[i\delta,(i+1)\delta]/\delta$ 个, 对所有这样的区间求和即得式 (11.1), 这由图 11.1 说明. □

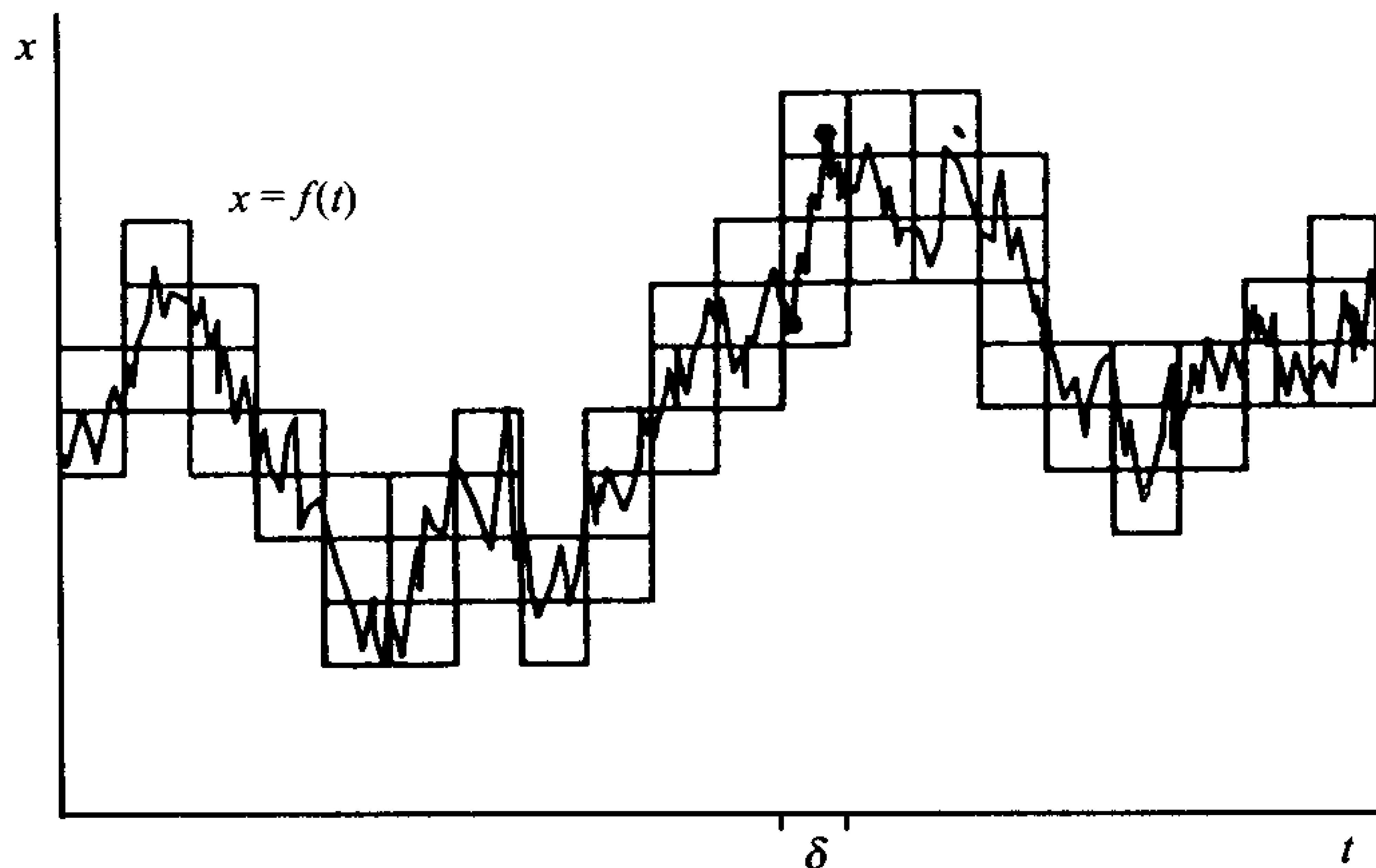



图 11.1 在宽度为 $\delta$ 的区间上面的柱集内与 $f$ 的图相交的网正方形个数近似等于 $f$ 的变化范围, 对这些个数求和给出了 $f$ 图的盒维数的估计

这个命题立即可以应用到满足 Hölder 条件的函数上.

**推论 11.2** 设 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 是连续函数.

(a) 设 $|f(t)-f(u)|\leqslant c|t-u|^{2-s}\qquad(0\leqslant t,u\leqslant 1)\qquad(11.2)$

其中 $c>0, 1\leqslant s\leqslant 2$, 则 $\mathcal{H}^s(\text{graph}f)<\infty$ 且 $\dim_{\rm H}$ graph$f\leqslant\underline{\dim}_{\rm B}$ graph$f\leqslant\overline{\dim}_{\rm B}$ graph$f\leqslant s$. 对某 $\delta>0$, 当 $|t-u|<\delta$时, 如果式 (11.2) 成立, 则上述结论仍然成立.

(b) 设存在数 $c>0$, $\delta_0>0$ 和 $1\leqslant s<2$, 使得对任意的 $t\in[0,1]$ 和 $0<\delta\leqslant\delta_0$, 存在 $u$ 满足 $|t-u|\leqslant\delta$ 和

$$|f(t)-f(u)|\geqslant c\,\delta^{2-s}.\qquad(11.3)$$

则 $s\leqslant\underline{\dim}_{\rm B}$ graph $f$.

**证明** (a) 由式 (11.2) 即知对 $0\leqslant t_1,t_2\leqslant 1$, 有 $R_f[t_1,t_2]\leqslant c|t_1-t_2|^{2-s}$.

利用命题 11.1 中的记号, $m<(1+\delta^{-1})$ 和式 (11.1) 得

$$N_\delta\leqslant 2m+\delta^{-1}mc\delta^{2-s}\leqslant\left(1+\delta^{-1}\right)\left(2+c\delta^{-1}\delta^{2-s}\right)\leqslant c_1\delta^{-s}$$

其中 $c_1$ 与 $\delta$ 无关, 由命题 4.1 即得结论.

(b) 同样的方法, 式 (11.3) 意味着 $R_f[t_1,t_2]\geqslant c|t_1-t_2|^{2-s}$. 因为 $\delta^{-1}\leqslant m$, 由式 (11.1) 即有:

$$N_\delta\geqslant\delta^{-1}mc\delta^{2-s}\geqslant\delta^{-1}\delta^{-1}c\delta^{2-s}=c\delta^{-s}$$

所以由等价定义 3.1(iii) 得 $s \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}}\,\mathrm{graph}\, f$. □

遗憾的是, 比起盒维数来说, 函数图的豪斯多夫维数的下界估计是非常不容易求得的.

**例 11.3 魏尔斯特拉函数** 设 $\lambda > 1$ 和 $1 < s < 2$, 由下式定义 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin\left(\lambda^k t\right), \tag{11.4}$$

则如果 $\lambda$ 充分大, $\dim_{\mathrm{B}}\mathrm{graph}\, f = s$.

**计算** 给定 $0 < h < \lambda^{-1}$, 设 $N$ 是使

$$\lambda^{-(N+1)} \leqslant h < \lambda^{-N} \tag{11.5}$$

的整数, 则

$$\begin{aligned}|f(t+h) - f(t)| \leqslant & \sum_{k=1}^{N} \lambda^{(s-2)k} \left|\sin\left(\lambda^k (t+h)\right) - \sin\left(\lambda^k t\right)\right| + \\ & \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \left|\sin\left(\lambda^k (t+h)\right) - \sin\left(\lambda^k t\right)\right| \\ \leqslant & \sum_{k=1}^{N} \lambda^{(s-2)k}\lambda^k h + \sum_{k=N+1}^{\infty} 2\lambda^{(s-2)k},\end{aligned}$$

其中在前 $N$ 项利用了不等式 $|\sin u - \sin v| \leqslant |u - v|$(由中值定理可以得到), 而后一部分利用了 $|\sin u| \leqslant 1$. 对上式中的两个几何级数求和并利用式 (11.5),

$$|f(t+h) - f(t)| \leqslant \frac{h\lambda^{(s-1)N}}{1-\lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1-\lambda^{s-2}} \leqslant ch^{2-s}$$

其中 $c$ 与 $h$ 无关. 而由推论 11.2(a) 得出 $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,\mathrm{graph} f \leqslant s$.

与上面同样的方法, 但把求和分成三部分, 前 $N-1$ 项、第 $N$ 项和余下的部分. 如果 $\lambda^{-(N+1)} \leqslant h < \lambda^{-N}$, 则

$$\begin{aligned}&\left|f(t+h) - f(t) - \lambda^{(s-2)N}(\sin\lambda^N(t+h) - \sin\lambda^N t)\right| \\ &\qquad \leqslant \frac{\lambda^{(s-2)N-s+1}}{1-\lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1-\lambda^{s-2}}.\end{aligned} \tag{11.6}$$

设 $\lambda > 2$ 充分大, 则对任意 $N$, 式 (11.6) 的右边小于 $\dfrac{1}{20}\lambda^{(s-2)N}$. 对 $\delta < \lambda^{-1}$, 取满足 $\lambda^{-N} \leqslant \delta < \lambda^{-(N-1)}$ 的 $N$, 对每个 $t$, 可以选择 $h$ 满足 $\lambda^{-(N+1)} \leqslant h < \lambda^{-N} < \delta$, 使得 $\left|\sin\lambda^N (i+h) - \sin\lambda^N t\right| > 1/10$, 所以由式 (11.6)

$$|f(t+h) - f(t)| \geqslant \frac{1}{10}\lambda^{(s-2)N} - \frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N} = \frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N} \geqslant \frac{1}{20}\lambda^{s-2}\delta^{2-s}.$$

由推论 11.2(b) 得 $\underline{\dim}_B \operatorname{graph} f \geqslant s$. □

图 11.2 绘出了魏尔斯特拉函数的几种情形.

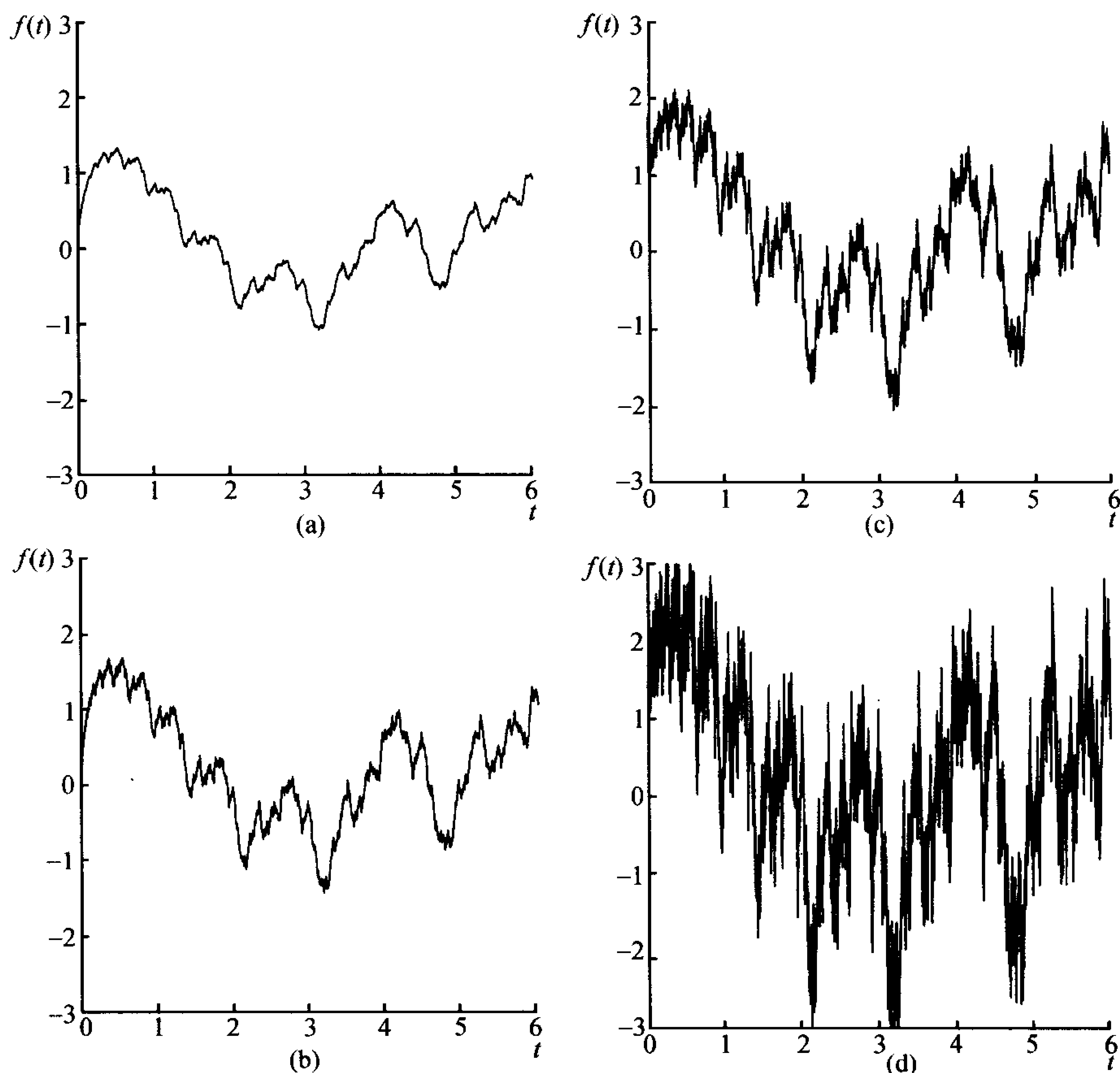



图 11.2 魏尔斯特拉函数 $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{(s-2)k}\sin(\lambda^k t)$, 其中 $\lambda=1.5$, 且 (a)$s=1.1$ (b)$s=1.3$ (c)$s=1.5$ (d)$s=1.7$

由上面的估计立即可以得到, 式 (11.4) 的魏尔斯特拉函数图的豪斯多夫维数最多为 $s$. 通常认为这个维数就应当等于 $s$, 至少对 "大部分" 的 $\lambda$ 值是这样的. 这个结论一直没有得到严格的证明 —— 由于函数图的覆盖可以有很多形状不同的集, 可能给出较小值的维数, 甚至证明 $\dim_H \operatorname{graph} f > 1$ 也不是平凡的. 已知的下界证明是来自于质量分布方法, 它依赖于对 $\mathcal{L}\{t:(t,f(t))\in B\}$ 的估计, 其中 $B$ 是圆, $\mathcal{L}$ 是勒贝格测度. 函数 $f$ 迅速的小尺度的振荡使得相对较少的函数图上的点落入 $B$ 内, 所以测度值较小. 用这样的方法可以证明存在常数 $c$ 使

$$s \geqslant \dim_H \operatorname{graph} f \geqslant s - c/\ln\lambda.$$

所以当 $\lambda$ 很大时, 豪斯多夫维数不可能太小于猜想的值 $s$.

魏尔斯特拉函数 (11.4) 是可以利用这些方法的许多种类函数的代表, 如果 $g$ 是适当的周期函数, 应用类似的方法通常可以证明:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{(s-2)k}g(\lambda^k t) \tag{11.7}$$

有 $\dim_{\mathrm{B}}\mathrm{graph}f=s$. 初看起来这样的函数似乎是人为设计出来的, 但是, 它们是做为某些动力系统的斥子出现的 (见练习 13.9), 因此具有新的重要性.

由 9.4 节知由迭代函数系定义的自仿射集经常是分形, 选择适当的仿射变换, 它们也可以是函数的图. 设 $\{S_i,\cdots,S_m\}$ 是表成下面矩阵形式的, 相对于坐标 $(t,x)$ 的仿射变换:

$$S_i\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ a_i & c_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (i-1)/m \\ b_i \end{bmatrix}. \tag{11.8}$$

即 $S_i(t,x)=(t/m+(i-1)/m,\quad a_it+c_ix+b_i)$.

于是 $S_i$ 把垂直线映射成垂直线, 并且把满足 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的垂直窄条上的点映射到满足 $(i-1)/m\leqslant t\leqslant i/m$ 的窄条上. 设

$$1/m<c_i<1 \tag{11.9}$$

所以 $t$ 方向的压缩强于 $x$ 方向.

令 $p_1=(0,b_1/(1-c_1))$ 和 $p_m=(1,(a_m+b_m)/(1-c_m))$ 是 $S_1$ 和 $S_m$ 的不动点, 假设矩阵的元素都已选定, 使

$$S_i(p_m)=S_{i+1}(p_1)\quad(1\leqslant i\leqslant m-1) \tag{11.10}$$

并使直线段 $[S_i(p_1),S_i(p_m)]$ 连结起来组成多角形曲线 $E_1$. 为避免平凡的情形, 设 $S_1(p_1),\cdots,S_m(p_1),p_m$ 不全共线. 迭代函数系 $\{S_i,\cdots,S_m\}$ 的吸引子 $F$(见式 (9.2)) 可以由反复地用 "生成元" $E_1$ 的仿射像取代直线段而构造出来 (见图 11.3 和图 11.4). 条件 (11.10) 保证了这些直线段是首尾连接的, 并得到了 $F$ 是某个连续函数 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 的图的结果. 注意这些条件未必意味着 $S_i$ 相对于欧几里得距离是压缩的, 但却有可能重新定义 $(x,t)$ 平面上的距离, 使 $S_i$ 是压缩的, 而 IFS 的理论保证了吸引子是唯一的.

**例 11.4 自仿射曲线** 设 $F$=graph $f$ 是上面描述的自仿射曲线, 则

$$\dim_{\mathrm{B}}F=1+\ln(c_1+\cdots+c_m)/\ln m.$$

**计算** 设 $T_i$ 是的 $S_i$ 的 "线性部分", 可以表成矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ a_i & c_i \end{bmatrix}.$$

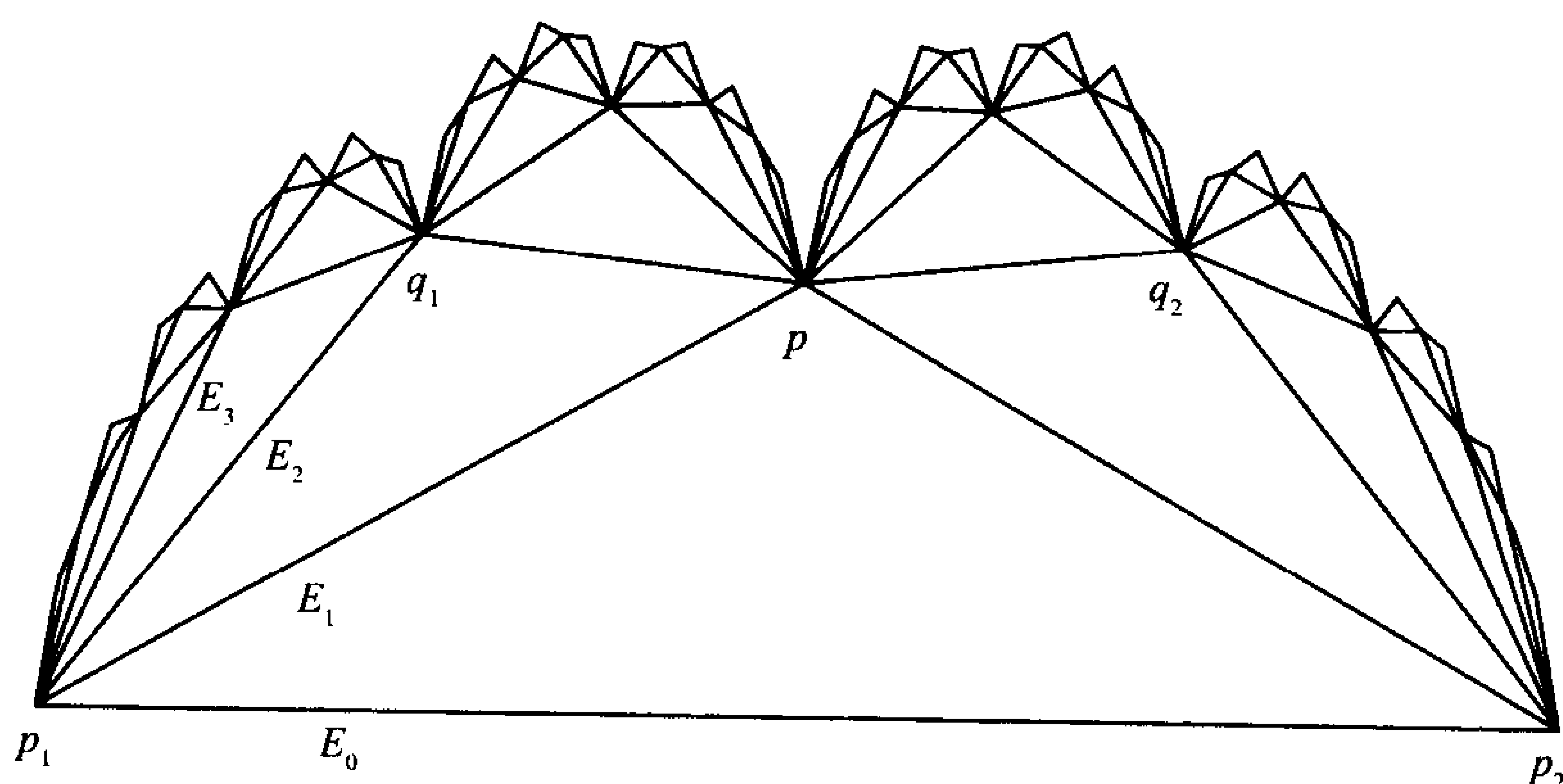



图 11.3 自仿射曲线 $F$ 的构造过程, 仿射变换 $S_1$ 和 $S_2$ 把三角形 $p_0p_1p_2$ 分别变成 $p_0q_1p_1$ 和 $p_1q_2p_2$, 把垂直线变成垂直线, 多角形曲线 $E_0, E_1, \cdots$ 由 $E_{k+1} = S_1(E_k) \bigcup S_2(E_k)$ 得出, 并给出 $F$ 的越来越好的逼近 (这种情形显示在图 11.4(a))

设 $I_{i_1,\cdots,i_k}$ 是那些 $m$ 进制展开式中以 $0.i'_1 \cdots i'_k$ 开头的 $t$ 组成的 $t$ 轴上的区间, 其中 $i'_j = i_j - 1$. 则 $F$ 在 $I_{i_1,\cdots,i_k}$ 上面的部分是仿射像 $S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(F)$, 它是 $T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_k}(F)$ 的平移. 表示成 $T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_k}$ 的矩阵是容易导出的, 它是:

$$\begin{bmatrix} m^{-k} & 0 \\ m^{1-k}a_{i_1} + m^{2-k}c_{i_1}a_{i_2} + \cdots + c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_{k-1}}a_{i_k} & c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k} \end{bmatrix}.$$

这是一个剪切映射, 它以压缩比 $c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k}$ 压缩垂直于 $t$ 轴的直线, 显然上面矩阵左下角的元素以下面的数为界

$$\begin{aligned} &\left|m^{1-k}a_{i_1} + m^{2-k}c_{i_1}a_{i_2} + \cdots + c_{i_1}\cdots c_{i_{k-1}}a_{i_k}\right| \\ \leqslant &\left((mc)^{1-k} + (mc)^{2-k} + \cdots + 1\right)c_{i_1}\cdots c_{i_{k-1}}a \leqslant rc_{i_1}\cdots c_{i_{k-1}} \end{aligned}$$

其中 $a = \max|a_i|, c = \min|c_i| > 1/m$, 并且对几何级数求和得到 $r = a/(1-(mc)^{-1})$. 则像 $T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_k}(F)$ 包含在一个高为 $(r+h)c_{i_1}\cdots c_{i_k}$ 的矩形中, 其中 $h$ 是 $F$ 的高. 另一方面, 如果 $q_1, q_2, q_3$ 是从 $S_1(p_1), \cdots, S_m(p_1), p_m$ 中选出的三个不共线的点, 则 $T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_k}(F)$ 包含点 $T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_k}(q_j)\,(j = 1, 2, 3)$. 以这三点为顶点的三角形的高至少为 $c_{i_1}\cdots c_{i_k}d$, 其中 $d$ 是从 $q_2$ 点到直线段 $[q_1, q_3]$ 的垂直距离, 于是函数 $f$ 在 $I_{i_1,\cdots,i_k}$ 上的变化范围满足:

$$dc_{i_1}\cdots c_{i_k} \leqslant R_f\left[I_{i_1,\cdots,i_k}\right] \leqslant r_1c_{i_1}\cdots c_{i_k}$$

这里 $r_1 = r + h$.

对固定的 $k$, 对 $m^k$ 个长度为 $m^{-k}$ 的区间 $I_{i_1,\cdots,i_k}$ 求和, 利用命题 11.1, 得

$$m^k d \sum c_{i_1} \cdots c_{i_k} \leqslant N_{m^{-k}}(F) \leqslant 2m^k + m^k r_1 \sum c_{i_1} \cdots c_{i_k}$$

其中 $N_m^{-k}(F)$ 是与 $F$ 相交的边长为 $m^{-k}$ 的网正方形的个数. 对每个 $j$, 数 $c_{i_j}$ 取遍 $c_i, \cdots, c_m$ 这 $m$ 个值, 所以 $\sum c_{i_1} \cdots c_{i_k} = (c_1 + \cdots + c_m)^k$. 于是

$$dm^k(c_1 + \cdots + c_m)^k \leqslant N_{m^{-k}}(F) \leqslant 2m^k + r_1 m^k (c_1 + \cdots + c_m)^k$$

取对数并利用盒维数的定义 3.1(iii), 就得到了所指出的维数的值. □

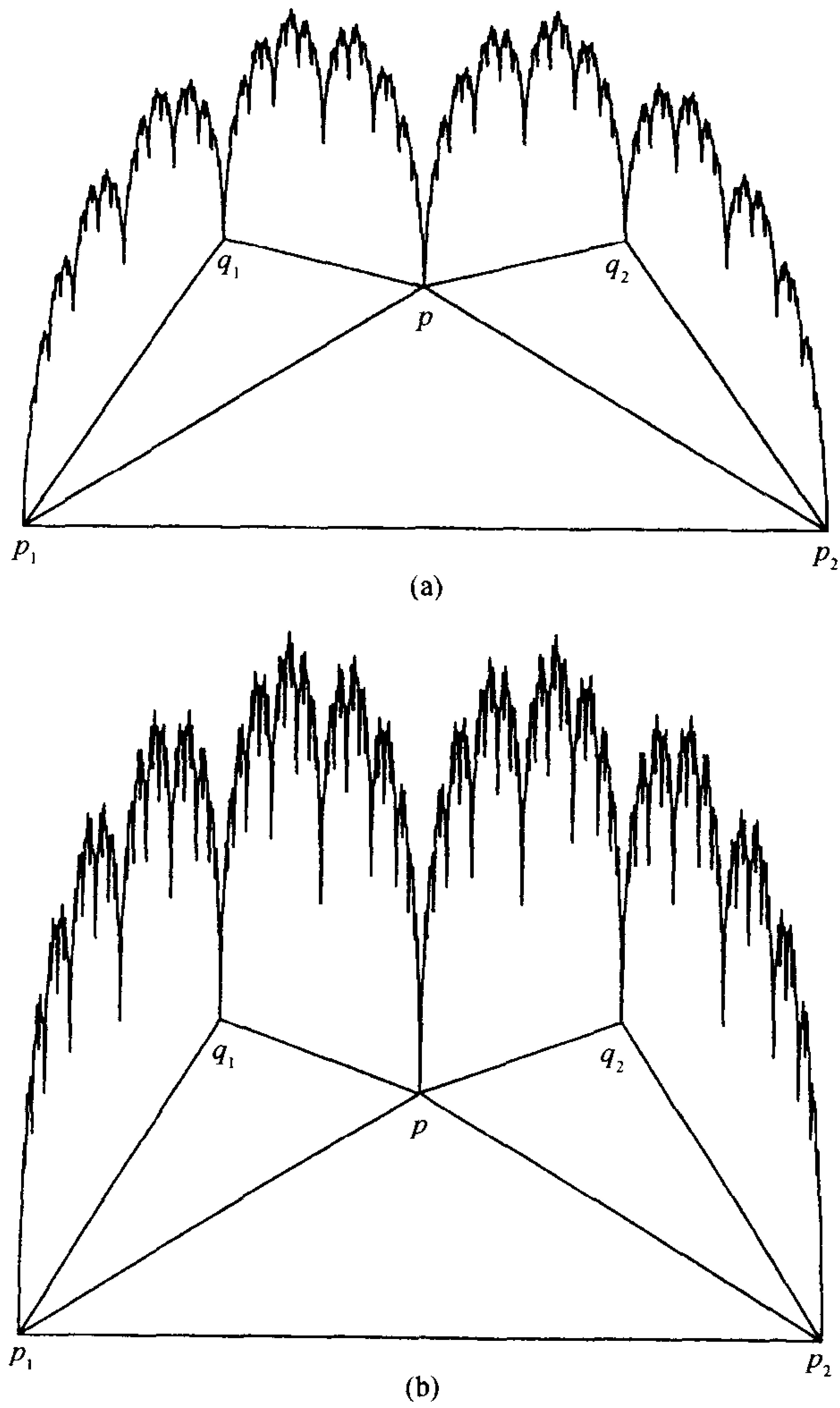



图 11.4　由把三角形 $p_1pp_2$ 映射到 $p_1q_1p$ 和 $pq_2p_2$ 的两个仿射变换定义的自仿射曲线, (a) 两个变换的垂直压缩比都为 0.7, $\dim_B \text{graph} f=1.49$. (b) 垂直压缩比都为 0.8, $\dim_B$ graph $f=1.68$

自仿射函数对**分形插值**(fractal interpolation)是很有用的. 如果想得到给定的维数, 并且经过点 $(i/m, x_i), i = 0, 1, \cdots, m$ 的分形曲线, 可以通过选择式 (11.8) 的变换, 上面所描述的构造会得出一个具有通过给定的点的图的自仿射函数, 在这种方法中, 对每个 $i$, $S_i$ 把直线段 $[p_1, p_m]$ 映射成直线段 $[((i-1)/m, x_{i-1}), (i/m, x_i)]$. 通过调整矩阵中元素的值可以使曲线具有要求的盒维数, 并且还有可能用其他的方法去改变曲线的外貌. 分形插值法已经非常被有效地用来绘制山地的轮廓线.

当然, 自仿射函数可以推广到 $S_i$ 在 $t$ 方向上具有不同压缩比的情形, 这就能够得到在分形插值中所用的点的间隔不相等的曲线; 通过进一步的工作, 还可以求出这种曲线的盒维数.

图 11.5 表示了一个分形插值的例子.

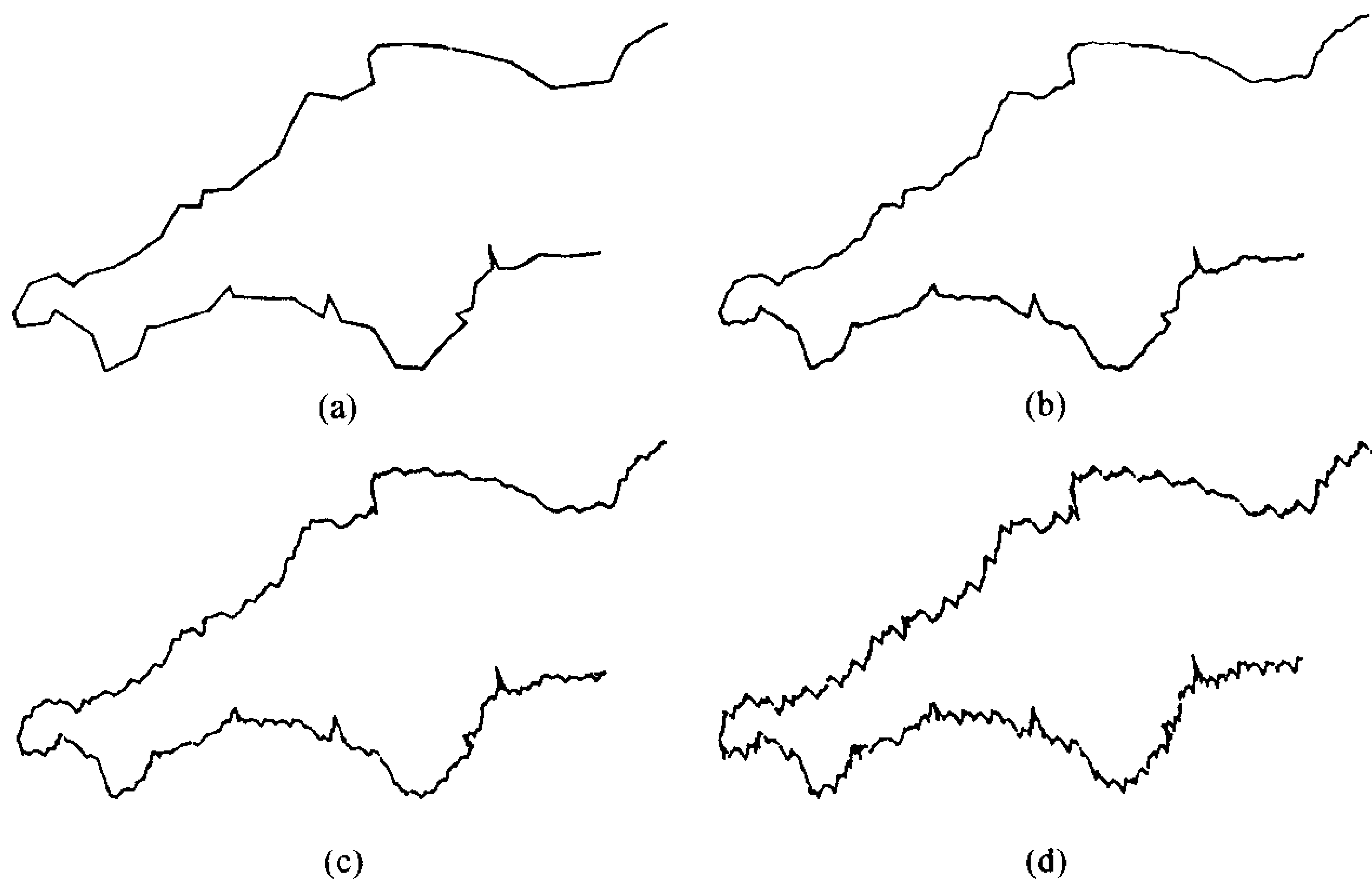



图 11.5 利用图 (a) 的多角形顶点为基准点, 对英格兰西南部地图的北部和南部进行的分形插值法, 相应的维数是 (b) 1.1, (c) 1.2, (d) 1.3

## *11.2 分形函数的自相关

正如已经提到的, 随时间变化的量经常产生分形图. 有一种方法是利用时间间隔为 $h$ 的测量值间相关情况的幂规律, 这种方法经常可以表现出它们的分形特性. 在本节中我们并不力求做到严格, 而仅仅是概述这个复杂的思想; 特别地, 所用到的极限都假设是存在的.

为了分析的方便, 假设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是连续有界的函数, 并且考虑在一个长周期

$[-T, T]$ 上 $f$ 的平均状况 (如果 $f$ 只定义在 $(0, \infty)$ 上或者在有限的区间上, 则可以利用周期的方法把 $f$ 延拓到 $\mathbf{R}$ 上面, 然后类似地考虑). 记 $\bar{f}$ 为 $f$ 的平均值, 即:

$$\bar{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\mathrm{d}t.$$

函数 $f$ 在时间间隔为 $h$ 上的相关性的量度由下式的自相关函数(autocorrelation function) 给出:

$$C(h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(f(t+h) - \bar{f}\right)\left(f(t) - \bar{f}\right)\mathrm{d}t \tag{11.11}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t+h)f(t)\mathrm{d}t - (\bar{f})^2. \tag{11.12}$$

从式 (11.11) 知道, 如果 $f(t+h) - \bar{f}$ 和 $f(t) - \bar{f}$ 趋向于相同的符号, 则 $C(h)$ 是正的; 而当它们趋于相反的符号, 则 $C(h)$ 是负的. 如果是不相关的, 则 $C(h)$=0. 因为

$$\int (f(t+h) - f(t))^2\mathrm{d}t = \int f(t+h)^2\mathrm{d}t + \int f(t)^2\mathrm{d}t - 2\int f(t+h)f(t)\,\mathrm{d}t$$

所以

$$\begin{aligned} C(h) &= (\bar{f^2}) - (\bar{f})^2 - \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (f(t+h) - f(t))^2\,\mathrm{d}t \\ &= C(0) - \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (f(t+h) - f(t))^2\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{11.13}$$

其中

$$\overline{f^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)^2\,\mathrm{d}t$$

是 $f$ 的均方值, 设它是正的且有限的. 利用式 (11.13) 中 $C(h)$ 的形式, 能够发现在 $f$ 的自相关函数与函数图 graph$f$ 的维数之间的一个似是而非的关系. 有关线索是在推论 11.2 中, 设 $f$ 是满足式 (11.2) 的函数, 同时 $f$ 以一种 “合理地一致的方式” 满足式 (11.3), 则存在常数 $c_1$ 和 $c_2$ 使对较小的 $h$

$$c_1 h^{4-2s} \leqslant \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (f(t+h) - f(t))^2\mathrm{d}t \leqslant c_2 h^{4-2s}. \tag{11.14}$$

显然, 这并不直接等价于式 (11.2) 和式 (11.3), 但是在许多合理地 “时齐” 的情况下, 这些条件是等价的. 于是, 如果对较小的 $h$, $f$ 的自相关函数满足

$$C(0) - C(h) \simeq ch^{4-2s},$$

则有理由期望 graph$f$ 的盒维数等于 $s$.

自相关函数与如下定义的 $f$ 的幂谱(power spectrum)紧密的联系在一起:

$$S(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T}f(t)\mathrm{e}^{it\omega}\mathrm{d}t\right|^2. \tag{11.15}$$

对具有任意程度的长程规律的函数, $S(\omega)$ 是很可能存在的. 幂谱反映了 $f$ 的调和分解中频率 $\omega$ 的强度.

下面证明幂谱是自相关函数的傅里叶变换, 由于表达式中带有 $f(t)-\bar{f}$, 可以假设 $f$ 的均值为 0. 令

$$f_T(t)=\begin{cases}f(t) & \text{当 } |t|\leqslant T \text{ 时}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

并定义

$$C_T(h)=\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}f_T(t+h)f_T(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2T}f_T^-*f_T(-h)$$

其中 $f_T^-(t)=f_T(-t)$, 而 $*$ 表示卷积. 由傅里叶变换的卷积定理 (见 4.4 节), 这个等式变成

$$\hat{C}_T(\omega)=\frac{1}{2T}\hat{f}_T^-(\omega)\hat{f}_T(\omega)=\frac{1}{2T}\left|\hat{f}_T(\omega)\right|^2$$

其中 $\hat{C}_T(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}C_T(t)\mathrm{e}^{it\omega}\mathrm{d}t$, $\hat{f}_T(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f_T(t)\mathrm{e}^{it\omega}\mathrm{d}t$ 是通常的傅里叶变换 (注意, 不能研究 $f$ 本身的变换, 因为这时积分可能发散), 令 $T\to\infty$, 可见对任意 $h$, $C_T(h)\to C(h)$, 且对任意 $\omega$, $\hat{C}_T(\omega)\to S(\omega)$. 可以证明这意味着

$$\hat{C}_T(\omega)=S(\omega).$$

显然 $S$ 和 $C$ 都是实的并且是偶函数, 所以变换是余弦变换. 于是

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}C(t)\mathrm{e}^{it\omega}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}C(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t \tag{11.16}$$

并且由傅里叶变换的反演公式:

$$C(h)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\mathrm{e}^{-ih\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\cos(\omega h)\mathrm{d}\omega. \tag{11.17}$$

在这个分析中, 没有太仔细地研究积分的收敛性问题, 但是在大部分实际情况中这个结论都是正确的.

自相关分析给我们提供了几个估计函数或 "信号"$f$ 的图的维数的方法. 可以计算在长周期范围内自相关函数 $C(h)$, 或等价地, 计算在时间 $h$ 的长周期内, 信号均方差的变化, 所以由式 (11.13)

$$2\left[C(0)-C(h)\right]\simeq\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(f(t+h)-f(t)\right)^{2}\mathrm{d}t. \tag{11.18}$$

如果对小的 $h$, 观察出幂定律的状况是:

$$C(0)-C(h)\simeq ch^{4-2s}, \tag{11.19}$$

则可以期望 graph$f$ 的盒维数是 $s$. 换句话说, 如果下式里的极限存在, 就有

$$\dim_{\mathrm{B}}\operatorname{graph}f=2-\lim_{h\to\infty}\frac{\ln(C(0)-C(h))}{2\ln h}. \tag{11.20}$$

于是, 可以去寻找已知具有这个维数的图的函数, 如例 11.3 和例 11.4 或者像 16.2 节的分数布朗运动等, 来提供一个具有类似特性的信号模拟.

另外, 可以对幂谱 $S(\omega)$ 做些研究, 并且利用式 (11.17) 来求出自相关函数, 需要了解对较小的 $h, C(0)-C(h)$ 的状况, 一般它是取决于当 $\omega$ 较大时, 变换 $S(\omega)$ 的性状. 最有趣的情形是当 $\omega$ 较大时幂谱服从幂定律 $S(\omega)\sim c/\omega^{\alpha}$, 在这种情形下, 对较小的 $h$ 和某个常数 $b$

$$C(0)-C(h)\sim bh^{\alpha-1} \tag{11.21}$$

为更清楚地说明这一点, 注意由式 (11.17)

$$\pi\left(C(0)-C(h)\right)=\int_{0}^{\infty}S(\omega)\left(1-\cos(\omega h)\right)\mathrm{d}\omega=2\int_{0}^{\infty}S(\omega)\sin^{2}\left(\frac{1}{2}\omega h\right)\mathrm{d}\omega$$

取 $S(\omega)=\omega^{-\alpha}$, 并作变换 $u=\omega h$, 得:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\pi(C(0)-C(h))&=\int_{0}^{\infty}\omega^{-\alpha}\sin^{2}\left(\frac{1}{2}\omega h\right)\mathrm{d}\omega\\&=h^{\alpha-1}\int_{0}^{\infty}u^{-\alpha}\sin^{2}\frac{1}{2}u\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

可以证明: 如果 $S$ 是任意充分光滑的函数, 使得当 $\omega\to\infty$ 时 $S(\omega)\sim c\omega^{-\alpha}$, 则式 (11.21) 也成立. 比较式 (11.19) 和式 (11.21) 可以知道 graph$f$ 具有使 $4-2s=\alpha-1$, 或 $s=(5-\alpha)/2$ 成立的盒维数 s. 于是, 对 $1<\alpha<3$, 期望一个具有 $1/\omega^{\alpha}$ 幂谱的信号的图的维数为 $(5-\alpha)/2$ 是合理的.

实际中, 维数为 $(5-\alpha)/2$ 的曲线经常为观察到的具有 $1/\omega^{\alpha}$ 幂谱的信号提供了较好的模拟, 而且显示了于它相似的特性.

## 11.3 注记和参考文献

分形图的维数首先是由 Besicovitch and Ursell(1937) 研究的. 关于魏尔斯特拉类型曲线的较新工作见 Berry and Lewis(1980), Mauldin and Williams(1986b) 以及 Hunt(1998). Massopust(1994) 讨论了自仿射曲线, 自仿射曲线也在 Bedford(1989) 中讨论. 关于自相关函数的理论主要来自于有关时间序列分析的书, 例如 Papoulis(1962).

### 练 习

**11.1** 验证: 如果 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 有连续的导数, 则 $f$ 的图是规则 1 集 (见 5.1 节).

**11.2** 设 $f, g:[0,1]\to\mathbf{R}$ 是连续函数, 用 $(f+g)(t)=f(t)+g(t)$ 定义和函数 $f+g$. 设 $f$ 是利普希茨函数. 通过在 graph$(f+g)$ 和 graph $g$ 之间建立一个利普希茨映射, 证明 $\dim_{\mathrm{H}}\mathrm{graph}\,(f+g)=\dim_{\mathrm{H}}\mathrm{graph}\;g$, 并且对盒维数也有类似的结果.

**11.3** 设 $f, g:[0,1]\to\mathbf{R}$ 是图的盒维数存在的连续函数, 利用命题 11.1 证明: 如果 $\dim_{\mathrm{B}}\mathrm{graph}f$ 和 $\dim_{\mathrm{B}}\ \mathrm{graph}\ g$ 不相等, 则

$$\dim_{\mathrm{B}}\mathrm{graph}\,(f+g)=\max\left(\dim_{\mathrm{B}}\mathrm{graph}f,\dim_{\mathrm{B}}\mathrm{graph}\ \mathrm{g}\right)$$

给出一个例子说明后面的附加条件是必要的.

**11.4** 证明满足推论 11.2(b) 条件且 $0\leqslant s\leqslant 2$ 的任何函数必然处处不可微, 由此推出例 11.3 的魏尔斯特拉函数和例 11.4 中的自仿射曲线处处不可微.

**11.5** 对 $\lambda>1$ 和 $1<s<2$, 设 $f$: $[0,1]\to\mathbf{R}$ 是修改成包含 "相位"$\theta_k$ 的魏尔斯特拉函数:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{(s-2)k}\sin\left(\lambda^k t+\theta_k\right).$$

证明: 只要 $\lambda$ 充分大, 就有 $\dim_{\mathrm{B}}\mathrm{graph}f=s$.

**11.6** 设 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是周期为 4 的 "zig-zag" 函数, 即

$$g(4k+t)=\begin{cases}t & (0\leqslant t<1)\\ 2-t & (1\leqslant t<3)\\ t-4 & (3\leqslant t<4)\end{cases}$$

其中 $k$ 是整数且 $0\leqslant t<4$. 设 $1<s<2$ 和 $\lambda>1$, 又设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 由下式定义

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{(s-2)k}g\left(\lambda^k t\right)$$

证明: 只要 $\lambda$ 充分大, 就有 $\dim_{\mathrm{B}}\mathrm{graph}f=s$.

**11.7** 假设函数 $f$: $[0,1]\to\mathbf{R}$ 满足赫尔德 (Hölder) 条件 (11.2), 设 $F$ 是 $[0,1]$ 的子集, 通过 $\dim_{\mathrm{H}}F$ 得出对 $\dim_{\mathrm{H}}f(F)$ 的估计.

**11.8** 设 $f$: $[0,1] \to \mathbf{R}$ 是一函数, 又设

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[|f(t) - f(u)|^2 + |t-u|^2\right]^{-s/2} \mathrm{d}t\mathrm{d}u < \infty$$

对满足 $1 < s < 2$ 的 $s$ 成立. 利用定理 4.13 证明

$$\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{graph} f \geqslant s.$$

**11.9** 设 $D$ 是单位正方形 $[0,1] \times [0,1]$, 又设 $f$: $D \to \mathbf{R}$ 是连续函数, 满足

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c|x-y|^{3-s} \, (x, y \in D).$$

证明: 曲面 $\{(x, f(x)) : x \in D\}$ 的盒维数最多为 $s$; 类似地, 找出一个与推论 11.2(b) 类似的曲面.

**11.10** 考虑仿射变换 $S_1(t,x) = \left(\frac{1}{2}t, \frac{1}{4}t + \frac{5}{6}x\right)$, $S_2(t,x) = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}t + \frac{5}{6}x + \frac{1}{4}\right)$, 证明 $\{S_1, S_2\}$ 的吸引子是 [0,1] 上自仿射函数的图, 绘出函数图构造的前三步, 并求它的盒维数.

**11.11** 就三个仿射变换回答与上题同样的问题: $S_1(t,x) = \left(\frac{1}{3}t, \frac{1}{3}t + \frac{1}{2}x\right)$, $S_2(t,x) = \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}t + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)$, $S_3(t,x) = \left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}t + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)$.

**11.12** 估计 $C(0) - C(h)$, 这里 $C(h)$ 是式 (11.4) 的魏尔斯特拉函数的自相关函数.

**11.13** 利用计算机研究魏尔斯特拉类型函数 (11.7) 的图, 检查 $s$ 和 $\lambda$ 值变化的影响, 并用不同的函数 $g$ 试验.

**11.14** 编写绘制由式 (11.8) 给出的自仿射曲线的计算机程序, 研究不同 $c_i$ 值的影响.

# 第 12 章　纯数学中的例子

分形构造已经为许多不同的问题提供了一些对应的例子, 有时甚至是解决的方法; 而在这些问题中, 出现的构造都是比较无规则的. 这一章考察纯数学中不同领域的几个例子.

## 12.1　对偶和挂谷问题

对偶方法把平面上的点集转换成直线上的集合, 并且可以用来在原有分形的基础上创建新的分形. 这种手段可以用来构造具有特殊性质的集合; 例如, 在平面上构造一个包含每个方向上的直线且面积为零的集合.

对于 $\mathbf{R}^2$ 上的任何点 $(a,b)$, 可用 $L(a,b)$ 表示直线 $y=a+bx$ 上的点所组成的集合 (见图 12.1). 如果 $F$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的任何子集, 定义直线集(line set)$L(F)$ 是 $F$ 上任意点所对应的直线的并集, 即 $L(F)=\bigcup\{L(a,b):(a,b)\in F\}$, 记 $L_c$ 为垂直线 $x=c$, 则有

$$L(a,b)\bigcap L_c=(c,a+bc)=(c,(a,b)\cdot(1,c)),$$

这里 $\cdot$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的通常内积; 于是对于 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集 $F$,

$$L(F)\bigcap L_c=\{(c,(a,b)\cdot(1,c)):(a,b)\in F\}.$$

取与向量 $(1,c)$ 的内积, 可以从几何上解释为到一条方向为 $(1,c)$ 的直线上的射影, 并且以 $\left(1+c^2\right)^{1/2}$ 为比例因子伸缩变化. 于是集 $L(F)\bigcap L_c$ 是与 $\mathrm{proj}_\theta F$ 几何相似的, $\mathrm{proj}_\theta$ 表示到通过原点且与 $x$ 轴夹角为 $\theta$ 的直线上的垂直投影, 这里 $c=\tan\theta$, 特别有

$$\dim_{\mathrm{H}}(L(F)\bigcap L_c)=\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_\theta F) \tag{12.1}$$

而且

$$\mathcal{L}(L(F)\bigcap L_c)=0 \text{ 当且仅当 } \mathcal{L}(\mathrm{proj}_\theta F)=0 \tag{12.2}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是一维勒贝格测度, 即长度. 按这种方法, 对偶把 $F$ 的投影 (对此已有第 6 章的理论) 同直线集 $L(F)$ 与垂直线的交集联系起来.

到 $y$ 轴的投影也有一种解释, 直线 $L(a,b)$ 的斜率恰好是 $b=\mathrm{proj}_{\pi/2}(a,b)$, 所以, 对于任何 $F$, 在直线集 $L(F)$ 中的直线的斜率所构成的集合是由 $\mathrm{proj}_{\pi/2}F$ 给出的.

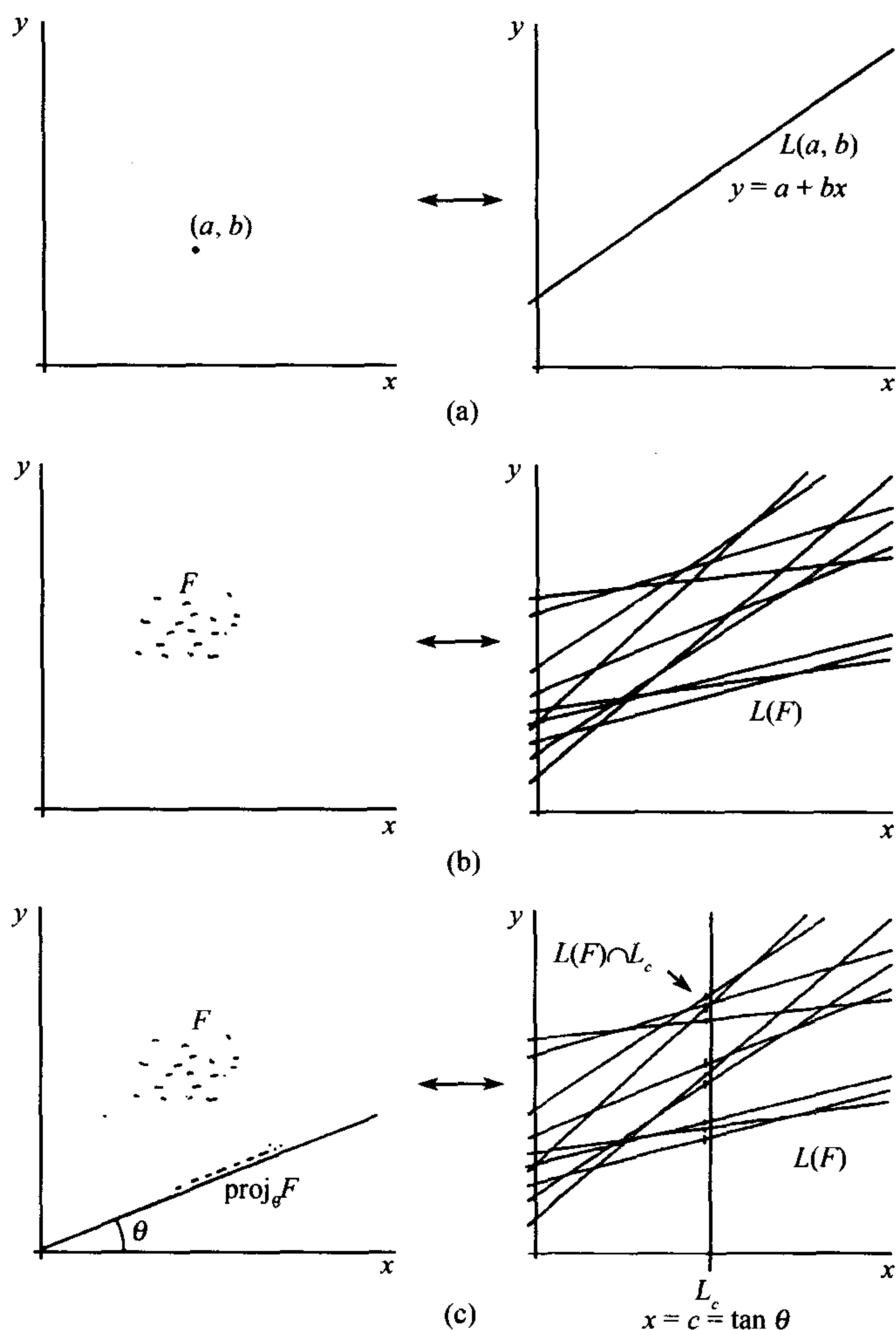



图 12.1　对偶原理：(a) 点 $(a,b)$ 对于直线 $y=a+bx$; (b) 集 $F$ 对应于直线集 $L(F)$; (c) 射影 $\text{proj}_\theta F$ 是与 $L(F)\bigcap L_c$ 几何相似的, 这里 $c=\tan\theta$

如果 $F$ 是分形, 它的直线集 $L(F)$ 经常具有分形结构, 尽管是高度纤维状的 (事实上, 如果 $F$ 是博雷尔集, $L(F)$ 不一定是博雷尔集, 虽然当 $F$ 是紧集时, $L(F)$ 是博雷尔集. 这里我们忽略推导上的较小的技巧困难).$F$ 与 $L(F)$ 有如下的维数关系.

**命题 12.1**　设 $L(F)$ 是博雷尔集 $F\subset\mathbf{R}^2$ 的直线集, 那么

(a) $\dim_{\mathrm{H}} L(F)\geqslant\min\{2,1+\dim_{\mathrm{H}} F\}$;

(b) 如果 $F$ 是一个 1 集, 那么 $\text{area}(L(F))=0$, 当且仅当 $F$ 是不规则的.

**证明**　(a) 由射影定理 6.1, 对几乎所有的 $\theta\in[0,\pi)$, $\dim_{\mathrm{H}}(\text{proj}_\theta F)=\min\{1,\dim_{\mathrm{H}} F\}$; 所以由式 (12.1), 对于几乎所有的 $-\infty<c<\infty$, $\dim_{\mathrm{H}}(L(F)\bigcap L_c)=$

$\min\{1, \dim_{\mathrm{H}} F\}$. 结论 (a) 可由推论 7.10 立即得出.

(b) 设 $F$ 是一个 1 集, 由推论 6.5 知, 如果 $F$ 是不规则的, 那么对几乎所有的 $\theta$, $\mathcal{L}(\mathrm{proj}_\theta F) = 0$, 否则 $\mathcal{L}(\mathrm{proj}_\theta F) > 0$ 对几乎所有的 $\theta$ 成立. 利用式 (12.2) 得到一个对偶的结论: 如果 $F$ 是不规则的, 那以对几乎所有的 $c$ 有 $\mathcal{L}(L(F) \bigcap L_c) = 0$, 否则对几乎所有 $c$ 有 $\mathcal{L}(L(F) \bigcap L_c) > 0$. 因为 $\mathrm{area}(L(F)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(L(F) \bigcap L_c)\,\mathrm{d}c$ 即得 (b).

Kakeya 在 1917 年提出了寻找单位直线段可以在其内部调转方向的最小面积的平面集的问题 (称为挂谷问题), 也就是连续地移动此单位直线段而不离开此集使它旋转 180° 并回到原来的位置. 这个问题基本上可归结为寻找包含每个方向单位直线段的最小区域的问题, 当然任何在其内的单位线段能够转到相反方向的集一定具有此性质. Bisicovitch 在 1928 年发现了一个单位线段可以在它内部转到相反方向, 但它的面积却可以任意小的令人惊奇的集的构造. 只是在很多年以后, 他才意识到对偶方法给出了这个问题的一个简短又巧妙的解答.

**命题 12.2** *有一个面积为零的平面集, 它在所有方向上都包含一直线. 任何具有这种性质的博雷尔集的豪斯多夫维数一定等于 2.*

**证明** 设 $F$ 是个不规则 1 集, 且 $F$ 在 $y$ 轴上的射影 $\mathrm{proj}_{\pi/2}F$ 包含区间 $[0,1]$.(图 0.4 表示的集合, 以及例 2.6 和例 6.7 研究的集肯定满足这个要求.) 因为 $F$ 是不规则的, 由命题 12.1(b) 知 $L(F)$ 有零面积. 然而, 因为 $[0,1] \subset \mathrm{proj}_{\pi/2}F$, 所以集 $L(F)$ 包含与 $x$ 轴成 0 到 $\pi/4$ 之间所有角度的直线. 把 $L(F)$ 以及 $L(F)$ 分别旋转 $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$ 所得到的集组合在一起, 就给出了一个在所有方向上都包含一条直线的面积为零的集合.

对第二部分, 假设 $E$ 在所有方向都包含一条直线, 如果

$$F = \{(a,b) : L(a,b) \subset E\}$$

那么 $\mathrm{proj}_{\pi/2}F$ 是整个 $y$ 轴. 因为射影并不增加维数 (见式 (6.1)), 所以 $\dim_{\mathrm{H}} F \geqslant 1$. 由命题 12.1(a), $\dim_{\mathrm{H}} L(F) = 2$; 又因为 $L(F) \subset E$ 所以得到 $\dim_{\mathrm{H}} E = 2$. □

$\mathbf{R}^n$ 中在每个方向包含有一个直线段的集合称为*贝希科维奇集*(Besicovitch set), 命题 12.2 证明了 $\mathbf{R}^2$ 中存在贝希科维奇集; 取这种集与 $\mathbf{R}^{n-2}$ 的乘积集, 就得到了 $\mathbf{R}^n$ 上的贝希科维奇集. 有一个已经有很长时间的猜想是: $\mathbf{R}^n$ 上的任意贝希科维奇集的维数等于 $n$, 上面已经对 $n=2$ 证明了这个结论.

这种类型的集在泛函分析里有重要的应用. 下面举一个简单的例子, 给定函数 $g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, 用 $G(\theta,t)$ 表示 $g$ 沿与 $x$ 轴成 $\theta$ 角且与原点的垂直距离为 $t$ 的直线上的积分. 记 $F$ 是在所有方向上都包含一直线的面积为零的集, 并且当 $(x,y) \in F$ 时, 令 $g(x,y) = 1$, 反之 $g(x,y) = 0$. 显然 $G(\theta,t)$ 对所有固定的 $\theta$ 值, 在点 $t$ 是不连续

的. 与 3 维的情况比较, 这个例子变得相当有意义. 如果 $g: D \to \mathbf{R}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的有界区域 $D$ 上的有界函数, 并且 $G(\theta, t)$ 是函数 $g$ 在垂直于单位向量 $\theta$ 且与原点垂直距离是 $t$ 的平面上的积分, 可以证明: 对几乎所有的单位向量 $\theta$, $G(\theta, t)$ 对 $t$ 一定是连续的.

贝希科维奇构造可以认为是把所有方向上的直线填充到一个面积为零的集中. 也可以考虑相似的其他曲线类的填充问题. 例如, 存在面积为零的集, 它包含以所有长度为半径的圆的圆周 (见练习 12.1 和 12.2). 然而, 最近已经证明: 在平面上, 以每一点为圆心的某些圆的圆周共同组成的集一定有正的面积.

## 12.2 Vitushkin 猜想

一个在复位势理论上长期存在的 Vitushkin 猜想最近用分形的构造否定了.

从几何角度来看, 将复平面 $\mathbf{C}$ 看作等同于欧几里平面 $\mathbf{R}^2$.

设 $F$ 是 $\mathbf{C}$ 的紧子集, 称 $F$ 是*可去*(removable) 集, 如果给定任何包含 $F$ 的有界开区域 $V$ 和在余集 $V \setminus F$ 上的任何有界解析 (即在复意义下是可微的) 函数 $f$, 那么 $f$ 可以扩展到整个 $V$ 上且保持解析性质. 这样, 在 $V$ 上的有界解析函数本质上与 $V \setminus F$ 上的有界解析函数一样, 去掉 $F$ 没有任何影响.

可去集的几何特征这个问题要追溯到很多年前. $F$ 的可去性或不可去性可以分别列成下面的几种情形:

| 可　去 | 不　可　去 |
|---|---|
| $\dim_{\mathrm{H}} F < 1$ | $\dim_{\mathrm{H}} F > 1$ |
| $0 < \mathcal{H}^1(F) < \infty$, 且 $F$ 是不规则的 | $0 < \mathcal{H}^1(F) < \infty$, 且 $F$ 不是不规则的 |

这个表应该使读者回想起第 6 章的射影定理. 根据定理 6.1 和推论 6.5, 如果 $\dim_{\mathrm{H}} F < 1$, 则对几乎所有的 $\theta$, 射影 $\mathrm{proj}_\theta F$ 有零长度. 另一方面, 如果 $\dim_{\mathrm{H}} F > 1$ 或者 $F$ 不是一个不规则 1 集, 则对几乎所有的 $\theta$, $\mathrm{proj}_\theta F$ 有正长度. 可去性与几乎所有射影有零长度的一致性, 以及大量的进一步的证据, 使 Vitushkin 猜想的提出似乎是很自然了: 当且仅当对几乎所有的 $\theta \in [0, \pi)$, 都有 $\mathrm{proj}_\theta F = 0$, 则 $F$ 是可去的.

分形构造表明, Vitushkin 猜想不是真的. 设 $V$ 是 $\mathbf{C}$ 上的开区域, 并设 $\phi: V \to \phi(V)$ 是 $V$ 上的一个非线性保形映射 (即解析双射), 因此直线被典型地映射到 (非直的) 曲线上; 如果把 $V$ 当成是单位圆盘, $\phi(z) = (z+2)^2$ 当然满足条件. 可以构造一个 $V$ 的紧子集 $F$ 使得在所有方向 $\theta$ 上, 射影 $\mathrm{proj}_\theta F$ 有零长度, 但 $\mathrm{proj}_\theta \phi(F)$ 在几乎所有方向 $\theta$ 上有正长度. 这可以利用 "迭代的活动百叶窗" 构造方法得到, 这种方法在定理 6.9 的证明中已给出了大概轮廓, 可以证明 "板条" 的排列一般使它在 $V$ 中的直线方向上错开, 但往往与 $\phi(V)$ 上的直线在 $\phi$ 下的逆像相交 (见图 12.2).

由此可知性质 "$\mathrm{proj}_\theta F$ 对几乎所有 $\theta$ 有零长度" 不是在保形变换下不变的, 因为它可以对 $F$ 成立, 但对 $\phi(F)$ 不成立. 然而, 可去性是保形不变的, 因为函数 $f(z)$ 在 $\phi(V)$(相应地在 $\phi(V\backslash F)$) 上是解析的当且仅当 $f(\phi(z))$ 在 $V$ 上 (相应地在 $V\backslash F$) 解析. 因此, 具有在几乎所有方向上都有零长度射影的性质不能等价于可去性.

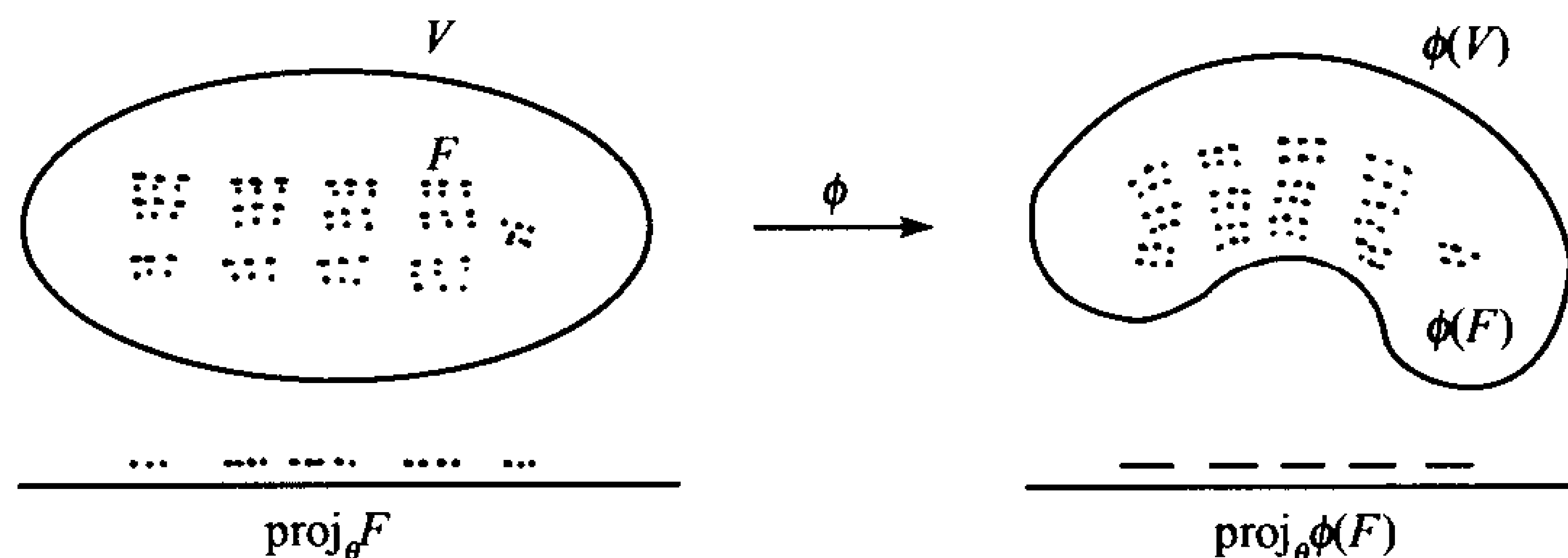



图 12.2 $\phi$ 是解析映射, 它使得对几乎所有 $\theta$, $\mathrm{proj}_\theta F$ 有零长度: 但对几乎所有 $\theta$, $\mathrm{proj}_\theta \phi(F)$ 有正长度

这个特别讨论一个令人惊奇的特点是: 仍旧不清楚, 几乎所有的射影都是零长度的集必定是可去的呢, 还是反过来成立. 能得出的结论只是二者不能全对.

利用迭代的构造, 最近得到了一个几乎射影都是零长度的不可去集.

## 12.3 凸 函 数

一个连续函数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 称为是凸的(convex), 如果对任意的 $x,y\in\mathbf{R}^2$ 和 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

从几何上看, 如果 $S=\left\{(x,f(x)):x\in R^2\right\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上表示 $f$ 的图的曲面, 那么, 如果连接 $S$ 上任意两个点的线段在 $S$ 内或在 $S$ 上, 则 $f$ 是凸的.

一个凸函数$f$ 不必是特别光滑的, 也许在有些点上 $f$ 是不可微的. 但是凸性意味着: 在维数的意义下, "奇异" 点的集不可能太大. 注意到如果 $f$ 在点 $x$ 不可微, 那么曲面 $S$ 在点 $(x,f(x))$ 支撑有不止一个切平面. 又注意到, 如果 $p_1$ 和 $p_2$ 是点 $(x,f(x))$ 处的不同的切平面, 那么就有一个通过这个点的切平面的连续统, 就是包含直线 $p_1\bigcap p_2$, 且 "介于 $p_1$ 和 $p_2$ 之间" 的那些平面族.

**定理 12.3** 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是一个凸函数, 那么 $f$ 的不可微点所组成的集包含于可求长曲线的可数并中, 所以特别地, 这个集的豪斯多夫维数最多为 1.

**证明** 不失一般性, 可设 $f$ 的最小值严格为正的. 设 $S$ 是由 $f$ 的图给出的曲面, 再设 $g:\mathbf{R}^2\to S$ 是 "最近点" 映射, 即如果 $x\in\mathbf{R}^2$, 那么 $g(x)$ 是使距离 $|g(x)-x|$ 最小的 $S$ 中的点 (见图 12.3), $f$ 的凸性保证了这个点是唯一的. 如果 $x,y\in\mathbf{R}^2$, 那

么 (可能是斜的) 四边形 $x, g(x), g(y), y$ 在 $g(x)$ 和 $g(y)$ 处所成的角一定都是最小为 $\pi/2$; 否则线段 $[g(x), g(y)]$ 将包含一个在 $S$ 内或在 $S$ 上的点, 使它到 $x$ 或 $y$ 的距离更近. 由此得到 $g$ 是距离递减的, 即

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |x - y| \quad (x, y \in \mathbf{R}^2). \tag{12.3}$$

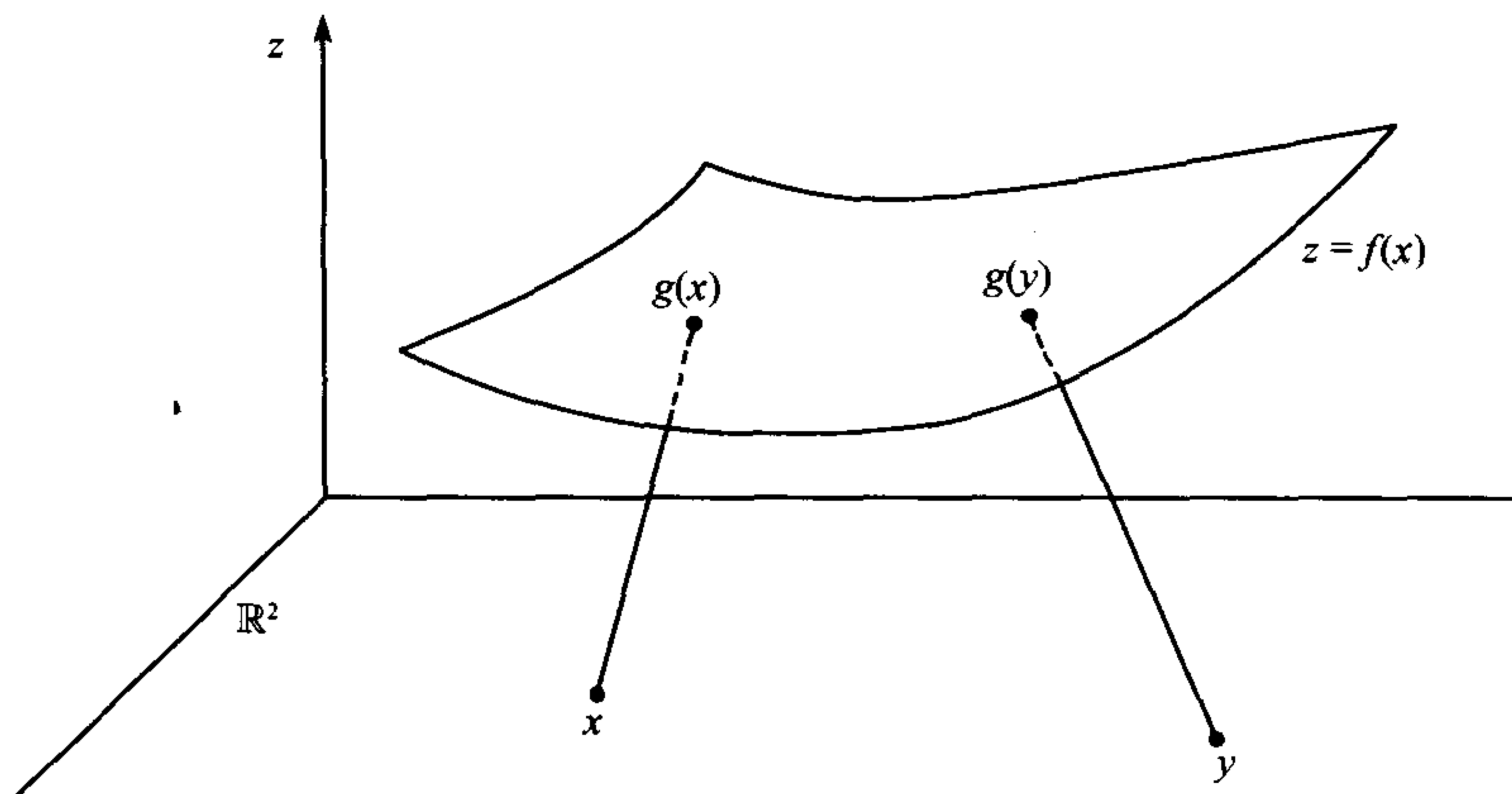



图 12.3 从 $\mathbf{R}^2$ 到凸曲面 $Z = f(X)$ 的 "最近点映射" 是距离递减的

如果 $F$ 在点 $x$ 不可微, 那么 $S$ 在 $(x, f(x))$ 处支撑不止一个切平面. 因此 $g^{-1}(x, f(x))$, 由 $g$ 映射到点 $(x, f(x))$ 的坐标平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点组成的子集, 是 $\mathbf{R}^2$ 与 $S$ 在点 $(x, f(x))$ 处切平面的法线的交, 因此包含一直线段. 设 $\{L_1, L_2, \cdots\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上端点为有理数坐标的 (可数的) 直线段族, 如果 $f$ 在点 $x$ 是不可微的, 那么 $g^{-1}(x, f(x))$ 包含一个至少与 $\{L_i\}$ 中的一条直线段相交的直线段. 这样, 如果 $F = \{(x, f(x)) : f\text{在点 } x \text{ 是不可微的}\}$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} g(L_i) \supset F$. 利用式 (12.3) 得到 $g(L_i)$ 或是一点或是一条可求长曲线, 且 $\mathcal{H}^1(g(L_i)) \leqslant \text{length}(L_i) < \infty$, 见式 (2.9). 则知 $\bigcup_{i=1}^{\infty} g(L_i)$ 是包含 $F$ 的可求长曲线的可数并, 因此它的维数最大为 1.

因为对 $x, y \in \mathbf{R}^2$, $|x - y| \leqslant |(x, f(x)) - (y, f(y))|$, $f$ 的不可微点 $x$ 所组成的集的维数最大也为 1, 并且包含在可求长曲线的可数并中; 又见式 (2.9). □

利用豪斯多夫维数, 我们能通过各种不同的方式去度量曲面的不规则性. 例如, 一个凸曲面可以包含直线段; 然而可以证明, 这种直线段的方向所构成的集的维数最多为 1.

## 12.4 分数维的群和环

$\mathbf{R}$ 的一个子集 $F$ 是在加法运算下的实数的*子群*(subgroup),如果

(i) $0 \in F$,

(ii) $x+y \in F$, 只要 $x \in F$ 且 $y \in F$,

(iii) $-x \in F$ 只要 $x \in F$.

集 $F$ 是 $\mathbf{R}$ 在加法和乘法运算下的子环 (subring), 如果还有

(iv) $xy \in F$ 只要 $x \in F$ 及 $y \in F$.

具有这种结构的简单例子有很多: 整数、有理数和数集 $\left\{r+s\sqrt{2} : r,s \in \mathbf{Z}\right\}$ 都是 $\mathbf{R}$ 的子环 (因此也是 $\mathbf{R}$ 的子群). 这些例子都是可数集, 因此它们的豪斯多夫维数都是 0. 是否存在 $\mathbf{R}$ 的豪斯多夫维数为 $s$ $(0<s<1)$ 的子群和子环呢?

为得到任意给定维数的子群, 相对比较容易的方法是修改先前的例 4.7.

**例 12.4** 固定 $0<s<1$, 设 $n_1, n_2, \cdots$ 是一个快速增长的整数序列, 比如说对任意 $k$, $n_{k+1} \geqslant \max\left\{n_k^k, 4n_k^{1/s}\right\}$. 而对 $r=1,2,\cdots$ 令

$$F_r = \left\{x \in \mathbf{R} : \text{对任意 } k, \text{存在整数 } p, \quad \text{使 } |x-p/n_k| \leqslant r n_k^{-1/s}\right\}$$

再设 $F = \bigcup_{r=1}^{\infty} F_r$, 那么 $\dim_{\mathrm{H}} F = s$, 并且 $F$ 是在加法运算下的 $\mathbf{R}$ 的子群.

**计算** $F_r$ 本质上是例 4.7 中的集, 所以 $\dim_{\mathrm{H}} F_r = s$ 对任意 $r$ 成立 (很容易看到 $r$ 的值并不影响维数). 取可数并即得 $\dim_{\mathrm{H}} F = s$.

显然 $0 \in F_1 \subset F$, 如果 $x,y \in F$, 那么存在某个 $r$, 使 $x,y \in F_r$, 注意到如果 $r \geqslant r'$, 则 $F_r' \subset F_r$. 于是对任意 $k$, 存在整数 $p$, $q$ 使得

$$|x-p/n_k| \leqslant r n_k^{-1/s} \qquad |y-q/n_k| \leqslant r n_k^{-1/s}.$$

相加得

$$|x+y-(p+q)/n_k| \leqslant 2r n_k^{-1/s}$$

所以 $x+y \in F_{2r} \subset F$. 显然, 如果 $x \in F_r$, 那么 $-x \in F_r$, 所以 $F$ 满足前面的条件 (i)~(iii).

对于环的分析相当困难, 一种几何方法是取决于估计从平面集得到的距离集的维数. 如果 $E$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的子集, 通过下式定义距离集(distance set):

$$D(E) = \{|x-y| : x,y \in E\} \subset \mathbf{R}.$$

**定理 12.5** 设 $E \subset \mathbf{R}^2$ 是博雷尔集, 那么

$$\dim_{\mathrm{H}} D(E) \geqslant \min\left\{1, \dim_{\mathrm{H}} E - \frac{1}{2}\right\}. \tag{12.4}$$

**证明注记** 这个定理的位势论方法证明有点复杂, 傅里叶变换和卷积定理被用来研究中心在 $E$ 上且与 $E$ 相交的圆. 而式 (12.4) 不像是可能的最好不等式.

有了这个定理, 就不难得到子环问题的部分解.

**定理 12.6** *设 $F$ 是在加法和乘法运算下 $\mathbf{R}$ 的子环, 那么, 如果 $F$ 是博雷尔集, 则或者 $\dim_{\mathrm{H}} F = 0$, 或者 $F = \mathbf{R}$.*

**证明** 用几何方法证明, 没有一个维数在 1/2 和 1 之间的子环. 用 $(x, y)$ 表示 $\mathbf{R}^2$ 上的坐标, 如果 $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2) \in F \times F \subset \mathbf{R}^2$, 那么因为 $F$ 是子环, 则 $|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \in F$. 于是, 如果 $D^2(F \times F)$ 表示 $F \times F$ 上的点与点之间距离的平方所成的集, 就有 $D^2(F \times F) \subset F$. 因为映射 $t \to t^2$ 保持豪斯多夫维数不变 (见练习 2.6), 于是利用定理 12.5 和乘积公式 7.2 得.

$$\begin{aligned}\dim_{\mathrm{H}} F &\geqslant \dim_{\mathrm{H}} D^2(F \times F) = \dim_{\mathrm{H}} D(F \times F) \\ &\geqslant \min\left\{1, \dim_{\mathrm{H}}(F \times F) - \frac{1}{2}\right\} \\ &\geqslant \min\left\{1, 2\dim_{\mathrm{H}} F - \frac{1}{2}\right\}\end{aligned}$$

这个不等式当且仅当 $\dim_{\mathrm{H}} F = 1$ 或 $\dim_{\mathrm{H}} F \leqslant 1/2$ 时才成立.

## 12.5 注记和参考文献

关于 Kakeya 问题及其变化的更详细叙述由 Besicovitch(1963), Cunningham (1974) 以及 Falconer(1985a) 给出. 对偶的方法由 Besicovitch(1964) 引进; 较近的论述见 Wolff(1999) 以及 Katz and Tao(2000); Stein(1993) 包含了 Kakeya 集在函数和调和分析中的应用.

关于 Vitushkin 猜想的讨论见 Mattila(1995),Murai(1988) 以及 David(1999).

这里叙述的构造参考了 Mattila(1986), Jones 和 Murai(1988) 讨论了具有零长度射影的不可去集, David(1999) 证明了不规则 1 集是可去的.

对凸几何的全面介绍见 Gruber and Wills(1993). 这里给出的结果参考了 Anderson and Klee(1952). 包括豪斯多夫维数和凸性的其他结果见 Dalla and Larman(1980) 以及 Schneider(1993)

分数维群的例子由 Erdös 和 Volkmann(1966) 给出, 他们还提出了环的维数问题.Falconer(1985c) 用傅里叶变换的方法证明了博雷尔环不能有 1/2 到 1 之间的维数, 也可以见 Mattila(1995). Edgar and Miller(2003) 给出了定理 12.6 的完整证明.

### 练 习

**12.1** 构造一个面积为零的平面集, 使它包含到原点垂直距离为 0 和 1 之间每一值的所有直线.(提示: 考虑在命题 12.2 中由变换 $(a, b) \to \left(a\left(1 + b^2\right)^{1/2}, b\right)$ 之下得到的集 $F$ 的像.)

**12.2** 用极坐标变换：$(r,\theta) \to (1/r,\theta)$ 对上题得到的集进行变换，证明存在平面上的面积为零的子集，它包含任意半径 $r > 0$ 的圆周.

**12.3** 证明，存在面积为零且包含经过 $x$ 轴任一点的不同直线的平面的子集.

**12.4** 设 $A$ 是 $[0,\pi)$ 的一个 (博雷尔) 子集，并设 $F$ 是平面的一个子集，对于每个 $\theta \in A$，它都包含方向 $\theta$ 上的一直线. 证明：

$$\dim_{\mathrm{H}} F \geqslant 1 + \dim_{\mathrm{H}} A.$$

**12.5** 把定理 6.9 对偶化，由此证明具有有限面积 $a$ 的博雷尔集，都可以由总面积为 $a$ 的直线族完全覆盖.

**12.6** 证明：如果 $\mathbf{C}$ 的一个紧子集 $F$ 支撑一质量分布 $\mu$，使得 $f(z) = \int_F (z-w)^{-1}\mathrm{d}\mu(w)$ 是有界的，那么在 12.2 节的意义下，$F$ 不是可去的. 证明这正是 $1 < \dim_{\mathrm{H}} F \leqslant 2$ 的情形 (提示：见定义 4.13(b) 的证明.)

**12.7** 证明任意有限集都是可去的，而单位圆是不可去的.

**12.8** 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一个凸函数，证明 $f$ 的不可微点所构成的集是有限的或可数的.

**12.9** 找出凸函数 $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$，使 $f$ 的不可微点所构成的集的豪斯多夫维数等于 1；找出 (非凸) 函数 $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$，使 $f$ 的不可微点所构成的集的豪斯多夫维数等于 2 .

**12.10** 证明：在加法运算下，$\mathbf{R}$ 的任意子群的盒维数等于 0 或者 1.

**12.11** 证明：在向量加法运算下，对任意 $0 < s < 2$，存在 $\mathbf{R}^2$ 的具有豪斯多夫维数为 2 的子群.(提示：考虑 $\mathbf{R}$ 的子群的乘积.)

# 第13章　动力系统

人们从理论和应用的角度对动力系统进行了持续深入的研究. 这主要归功于应用了功能强大的计算机, 计算机使得理论分析能够与数值研究互补. 另外, 研究系统定性性质的 "拓扑" 方法, 拓展了较传统的定量方法. 越来越多的各领域应用带动了这个学科的发展, 现在动力系统已被用作生物学、地理学和经济学中一些现象的模型, 并且在工程和物理传统学科中也找到了动力系统的模型. 在动力系统和混沌方面已经有了很多著作. 本章并不打算给出有关动力系统的总概括, 否则这就将偏离分形这个主题而探讨遍历理论、分支理论和很多其他领域, 但是我们会举例说明动力系统中分形可能发生的各种方式.

设 $D$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集 (时常就是 $\mathbf{R}^n$ 本身), 并且设 $f: D \to D$ 是一个连续映射. 正如通常所使用的, $f^k$ 表示 $f$ 的 $k$ 次迭代, 因此 $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x)), \cdots$. 注意如果 $x$ 是 $D$ 中的点, 显然对任意 $k$, $f^k(x)$ 都是 $D$ 中的点. 典型地, 可以把 $x$, $f(x)$, $f^2(x), \cdots$ 当作在时刻 0, 1, 2, $\cdots$ 时某一数量的值. 所以, 在时刻 $k+1$ 的值是根据在时刻 $k$ 的值通过函数 $f$ 给出. 可以举出 $k$ 年后某个生物种群的规模, 服从一定利息的税务条件的投资额, 在稳定流体中一个流体粒子的位置等一些例子.

一个迭代函数图 $\{f^k\}$ 就称为一个*离散的动力系统*. 人们感兴趣的是对各种不同的初始点 $x \in D$, 迭代*序列*或*轨道* $\{f^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 的变化状况, 特别是当 $k$ 充分大时它们的性质. 例如, 如果 $f(x) = \cos x$, 对任何初始点 $x$, 当 $k \to \infty$ 时迭代序列 $f^k(x)$ 都收敛到 0.739; 在计算器上反复按 cos 键试一试就能看到! 有时迭代的分布几乎是随机出现的. 另外, $f^k(x)$ 可能收敛到一个不动点 $w$, 也就是 $D$ 中使得 $f(w) = w$ 的一个点 $w$. 更一般的, $f^k(x)$ 可能收敛到*周期为 $p$ 的点的轨道* $\{w, f(w), \cdots, f^{p-1}(w)\}$, 这里 $p$ 是使 $f^p(w) = w$ 的最小正整数, 在这种意义下, 当 $k \to \infty$ 时 $|f^k(x) - f^k(w)| \to 0$. 可是, 有时 $f^k(x)$ 可能是随机摆动的, 但总是保持趋向于某一个集, 这个集可能就是一个分形. 在这一章中将研究几种重要的情形, 在这些情形中, 可能有 "分形吸引子" 或 "奇异吸引子" 发生.

不严格地说, 一个吸引子就是一个集合, 附近的所有轨道都收敛到这个集合上. 可是, 正如动力系统理论中经常出现的, 精确的定义因人而异. 一般称 $D$ 的子集 $F$ 是 $f$ 的吸引子, 如果 $F$ 是一个闭集, 并且在 $f$ 的作用下是不变的(也就是 $f(F) = F$), 使得对包含 $F$ 的一个开集 $V$ 中的所有点 $x$, $f^k(x)$ 到 $F$ 的距离随 $k$ 趋于无穷而趋

于零. 满足这种性质的最大的开集 $V$ 称为 $F$ 的吸引域. 通常应当没有 $F$ 的真子集满足这些条件, 在这个意义下, $F$ 是最小的. 类似地, 对一个闭不变子集 $F$, 如果 $F$ 的附近且不在 $F$ 上的所有点经迭代后远离 $F$, 那么 $F$ 就叫斥子(repeller). 粗略地说, $f$ 的斥子 $F$ 和 $f$ 的逆 (可能是多值的)$f^{-1}$ 的 "吸引子" 是等价的. 吸引子和斥子可能正好是一个单点或一个周期为 $p$ 的轨道. 可是, 即使相对比较简单的映射 $f$ 也可以有分形吸引子.

注意到 $f(D) \subset D$, 所以 $f^k(D) \subset f^{k-1}(D) \subset \cdots \subset f(D) \subset D$, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} f^i(D) = f^k(D)$. 于是, 集 $F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f^k(D)$ 在 $f$ 下是不变的. 因为对任何 $x \in D$, $f^k(x) \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} f^i(D)$, 所以当 $k \to \infty$ 时, 迭代 $f^k(x)$ 趋于 $F$, 因此 $F$ 时常是 $f$ 的吸引子.

很常见的, 如果 $f$ 有分形吸引子或分形斥子 $F$, 那么 $f$ 在 $F$ 上的性质表现为 "混沌" 的. 混沌有各种各样的定义; 如果下列条件都成立, $f$ 在 $F$ 上无疑地被认为是混沌的:

(1) 存在 $x \in F$, 轨道 $\{f^k(x)\}$ 在 $F$ 中稠;

(2) $F$ 中的 $f$ 的周期点在 $F$ 中稠 (存在正整数 $p$, 使得 $f^p(x) = x$ 的这种点就称为 $f$ 的周期点);

(3) $f$ 有对初始条件敏感的依赖性; 即对任何 $x \in F$, 都存在数 $\delta > 0$, 任意接近 $x$ 的 $y$ 以及整数 $k$, 使得 $|f^k(x) - f^k(y)| \geqslant \delta$. 因此在初始时相互非常接近的点, 在 $f$ 的迭代下并不保持其接近性.

条件 (1) 蕴涵着 $F$ 不能被分成更小的闭的不变集, 条件 (2) 指出了在 $F$ 的结构上规则性的轮廓, 条件 (3) 反映了 $F$ 上的点经迭代后的不可预见性. 特别, 条件 (3) 意味对 $f$ 的轨道作精确持久的数值接近是不可能的, 因为很小的数值误差经过迭代后将会被放大. 导致分形吸引子的条件时常就能导致混沌性质.

动力系统当然适宜于计算机研究. 粗略地说, 当轨道在计算机上被绘制时, 吸引子就是能看到的那些点的集合. 对某初始点 $x$, 比如说绘制 $k$ 起始值为 101, $k \geqslant 10\ 000$ 时的 $f^k(x)$; 就是在认为它们与任一吸引子没有什么区别的假设下绘制的. 如果一个吸引子看起来像分形, 那么用 "计盒" 的方法就能估计出它的维数. 可是计算机图像常常使人误解, 因为在计算机图像上, $f^k(x)$ 在整个吸引子上的分布是非常不均匀的, 吸引子的某些部分可能只有 $f^k(x)$ 的很少的点.

## 13.1 斥子与迭代函数系

在一定条件下, 动力系统的一个斥子和对应的迭代函数系的吸引子是一样的.

通过一个例子就能很好地看清这一点. 映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是由式

$$f(x)=\frac{3}{2}(1-|2x-1|)$$

定义的, 因为它的图与帐状(tent map) 相似, 一般就把这个映射称为帐状映射 (见图 13.1). 很清楚 $f$ 是把 $\mathbf{R}$ 以两点对一点的形式映射到 $(-\infty,3/2)$ 上. 用下面两个压缩映射定义迭代函数系 $S_1,S_2:[0,1]\to[0,1]$

$$S_1(x)=x/3,\quad S_2(x)=1-x/3$$

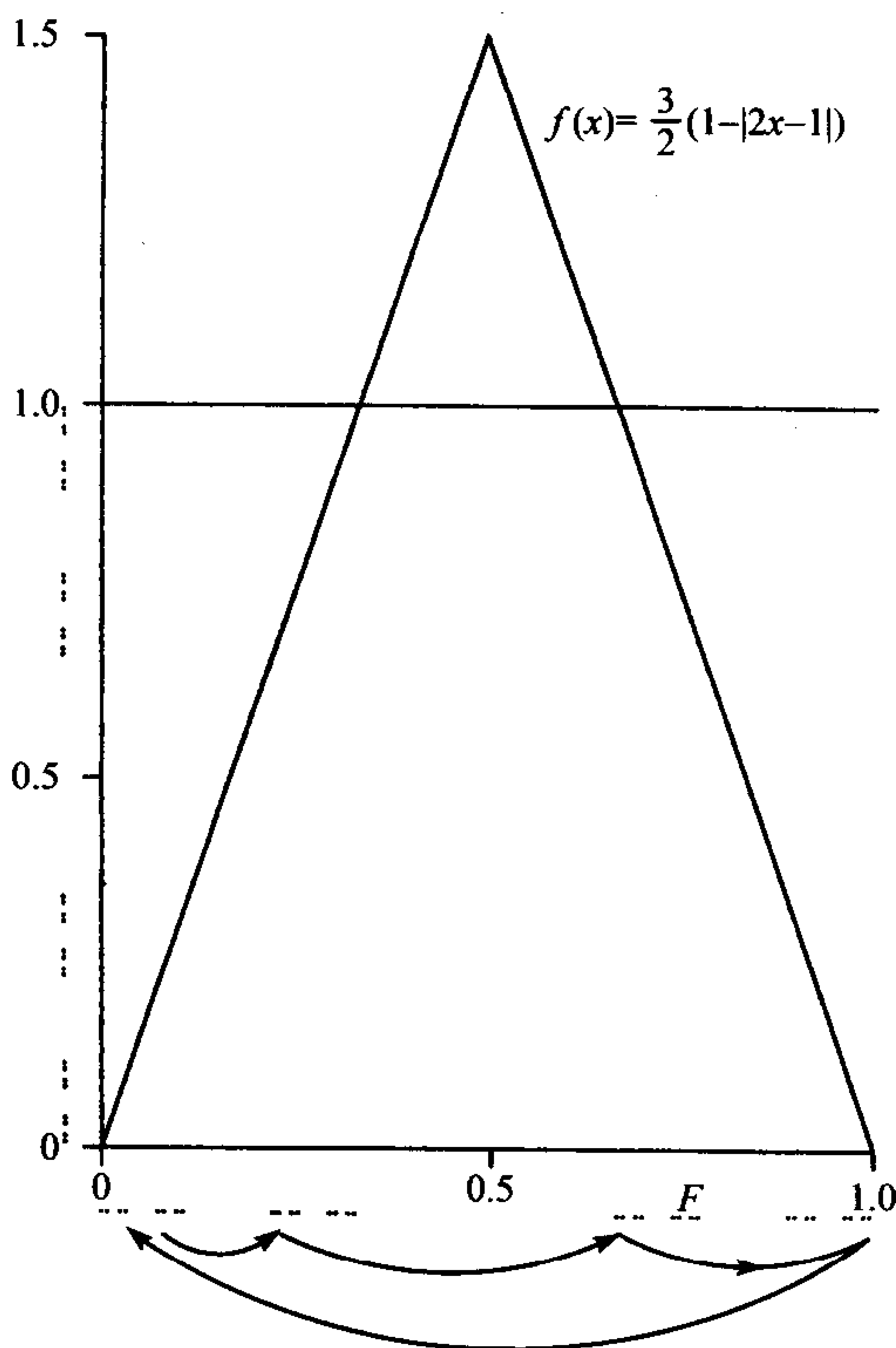



图 13.1　帐状映射 $f$. 注意 $f$ 把三分康托尔集 $F$ 映射到它自身, 并且 $F$ 是不变斥子. 同时也注意 $f$ 在 $F$ 上的混沌性质. 图下方箭头所表示的是一个点的迭代

可以看出

$$f(S_1(x))=f(S_2(x))=x\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

所以 $S_1$ 和 $S_2$ 是 $f^{-1}$ 的两个分枝. 因为 $S_1$ 和 $S_2$ 在区间 $[0,1]$ 上都是压缩的, 由定

理 9. 1 知道存在唯一的非空紧吸引子 $F \subset [0,1]$, 满足

$$F = S_1(F) \bigcup S_2(F) \tag{13.1}$$

这里又可以表示成：$F = \bigcap\limits_{K=0}^{\infty} S^k([0,1])$(对任意集 $E$, 记 $S(E) = S_1(E) \bigcup S_2(E)$). 很显然, 吸引子 $F$ 是豪斯多夫维数和盒维数均为 $\ln 2/\ln 3$ 的三分康托尔集.

从式 (13.1) 得出 $f(F) = F$. 为了看清 $F$ 是 $f$ 的一个斥子, 注意到如果 $x < 0$, 那么 $f(x) = 3x$, 所以当 $k \to \infty$ 时, $f^k(x) = 3^k x \to -\infty$. 而如果 $x > 1$, 那么 $f(x) < 0$, 则 $f^k(x)$ 也还是随着 $k$ 趋于无穷而趋于 $-\infty$. 如果 $x \in [0,1] \backslash F$, 于是就存在 $k$, 使得 $x \notin S^k[0,1] = \bigcup \{S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}[0,1] : i_j = 1,2\}$, 所以 $f^k(x) \notin [0,1]$, 因此同样有当 $k \to \infty$ 时, $f^k(x) \to -\infty$. 即 $F$ 外的所有点经过迭代后都趋于 $-\infty$, 所以 $F$ 是一个斥子.

沿用 9.1 节的记号, $f$ 在 $F$ 上的混沌性质已经很明显了. 像式 (9.7) 中那样, 用 $x_{i_1,i_2,\cdots}$ 表示 $F$ 中的点, 其中 $i_j = 1,2$; 如果 $i_1 = i'_1, \cdots, i_k = i'_k$, 那么

$$|x_{i_1,i_2,\cdots} - x_{i'_1,i'_2,\cdots}| \leqslant 3^{-k}$$

因为 $x_{i_1,i_2,\cdots} = S_{i_1}(x_{i_2,i_3},\cdots)$, 所以 $f(x_{i_1,i_2,\cdots}) = x_{i_2,i_3,\cdots}$. 假设 $(i_1, i_2, \cdots)$ 是一个无穷序列, 并且由 1 和 2 构成的任何有限序列都在这个序列中作为一个连续块出现, 例如

$$(1,2,1,1,1,2,2,1,2,2,1,1,1,1,1,2,\cdots)$$

这里数的间隔正好表示着数列的形式. 那么, 对 $F$ 中的任何点 $x_{i'_1,i'_2,\cdots}$ 和任何整数 $q$, 都可以找到整数 $k$, 使得 $(i'_1, i'_2, \cdots, i'_q) = (i_{k+1}, \cdots, i_{k+q})$. 于是有 $|x_{i_{k+1},i_{k+2},\cdots} - x_{i'_1,i'_2,\cdots}| \leqslant 3^{-q}$, 所以对适当大的 $k$, 迭代 $f^k(x_{i_1,i_2},\cdots) = x_{i_{k+1},i_{k+2}}\cdots$ 就能任意接近 $F$ 中的任一点, 所以 $f$ 在 $F$ 中有稠的轨道. 类似地, 因为 $x_{i_1,\cdots,i_k,i_1,\cdots,i_k,i_1\cdots}$ 是周期为 $k$ 的周期点, 因此 $f$ 的周期点也应在 $F$ 中稠. 因为 $f^k(x_{i_1,i_2,\cdots,i_k,1,\cdots}) \in [0,1/3]$, 但 $f^k(x_{i_1,i_2,\cdots,i_k,2,\cdots}) \in [2/3,1]$, 由此可以看出迭代对初始条件有敏感的依赖性. 总结以上可以得出 $F$ 为 $f$ 的混沌斥子的结论.(在 $f$ 的作用下, $F$ 中的点可以表示成序列 $(i_1, i_2, \cdots)$, 对这样 $f$ 的研究称为*符号动力学*.)

用完全相同的方法就可以知道, 一般的迭代函数系的吸引子也同样对应到函数的斥子. 如果 $S_1, \cdots, S_m$ 都是定义域 $D$ 上的压缩的一一映射, 它们的吸引子是 $F$, 且 $S_1(F), \cdots, S_m(F)$ 相互不交的, 那么对当 $x$ 在 $S_i(F)$ 附近时, 使得 $f(x) = S_i^{-1}(x)$ 的任一映射 $f$, $F$ 就是 $f$ 的一个斥子. 进一步地, 通过验证 $f$ 在点 $x_{i_1,i_2,\cdots}$ 上的作用, 就可以证明 $f$ 在 $F$ 上的混沌作用. 确实, 对许多动力系统而言, 它的定义域可以分解成几个部分 (称为*马尔可夫分解*), 使得 $f^{-1}$ 在每一部分上的分支看起来像个迭代函数系. 作为复平面上的一个例子, 请参看定理 14.15.

## 13.2　逻辑斯谛映射

逻辑斯谛 (logistic) 映射 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是由下式给出的

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x) \tag{13.2}$$

其中 $\lambda$ 是一个正常数. 这个映射是作为模拟某个物种的总量变化的模型而引入的：如果在任一年末总量为 $x$, 设想在下一年末的总量为 $f_\lambda(x)$. 目前, 逻辑斯谛映射作为一维动力系统的原始模型, 被深入系统地进行研究. 在这里, 对较大 $\lambda$ 的分析已经相当令人满意了, 而对较小的 $\lambda$, 还只是一个简要的讨论.

对给定的 $\lambda > 2+\sqrt{5} = 4.236\cdots$, 则可以得到 13.1 节的帐状映射斥子的一个非线性变形. 记 $a = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/\lambda}$, $1 - a = 1/2 + \sqrt{1/4-1/\lambda}$ 是方程 $f_\lambda(x) = 1$ 的两个根, 区间 $[0, a]$ 和 $[1-a, 1]$ 上的每个点都通过 $f_\lambda$ 一一映射到 $[0,1]$ 中. 映射 $S_1 : [0,1] \to [0,a]$ 和 $S_2 : [0,1] \to [1-a,1]$ 的定义如下：

$$S_1(x) = 1/2 - \sqrt{1/4 - x/\lambda} \qquad S_2(x) = 1/2 + \sqrt{1/4 - x/\lambda}$$

分别是逆映射 $f_\lambda^{-1}$ 在 $[0,a]$ 和 $[1-a,1]$ 上函数值, 并且对每个 $x \in [0,1]$, 有 $f_\lambda(S_1(x)) = f_\lambda(S_2(x)) = x$. 当 $i$=1, 2 时, 可以得到：

$$|S_i'(x)| = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

所以, 如果 $0 \leqslant x \leqslant 1$, 则

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant |S_i'(x)| \leqslant \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2}{4} - \lambda\right)^{-\frac{1}{2}}$$

根据中值定理, 得：

$$\frac{1}{\lambda}|x-y| \leqslant |S_i(x) - S_i(y)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2}{4} - \lambda\right)^{-\frac{1}{2}}|x-y|$$

$$(0 \leqslant x, y \leqslant 1) \tag{13.3}$$

这样, 如果 $\lambda > 2+\sqrt{5}$, 映射 $S_1$ 和 $S_2$ 都是 $[0,1]$ 上的压缩映射, 所以, 根据定理 9.1, 迭代函数系 $\{S_1, S_2\}$ 有唯一的 (非空紧的) 吸引子 $F \subset [0,1]$, 它满足

$$F = S_1(F) \bigcup S_2(F)$$

所以, 由此得到 $f_\lambda(F) = F$. 因为 $S_1(F)$ 和 $S_2(F)$ 相互不交, 所以 $F$ 是全不连通的. 利用和帐状映射证明中完全一样的方法, 可以知道 $F$ 是一个斥子, 且满足当 $x \notin F$ 时, $f_\lambda^k(x) \to -\infty$, 并且 $f$ 在 $F$ 上是混沌的.

为了估计 $F$ 的维数, 可使用例 9.8 中用到的方法. 根据推论 9.6 和推论 9.7, 从式 (13.3) 可以得出

$$\frac{\ln 2}{\ln\lambda} \leqslant \dim_{\mathrm{H}} F \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant \frac{\ln 2}{\ln\left(\lambda\,(1-4/\lambda)^{1/2}\right)}$$

所以如果 $\lambda$ 很大, $F$ 的维数就很接近 $\ln 2/\ln\lambda$.

对较小的 $\lambda$, 逻辑斯谛映射 (13.2) 的动力性是很微妙的. 如果 $0<\lambda\leqslant 4$, 函数 $f_\lambda$ 把 $[0,1]$ 区间映成 $[0,1]$ 自身, 此时可以把注意力限制在区间 $[0,1]$ 上. 如果 $x$ 是 $f$ 的 $p$ 周期点, 即 $f^p(x)=x$, 且 $p$ 为具有这种性质的最小正整数, 当 $|(f^p)'(x)|<1$ 时, 就称 $x$ 是稳定的, 反之, 当 $|(f^p)'(x)|>1$ 时, 就说 $x$ 是不稳定的. 稳定的周期点吸引附近的轨道, 而不稳定的周期点排斥它们附近的轨道. 如果 $0<\lambda\leqslant 1$, 那么在对所有 $x\in[0,1]$, $f_\lambda^k(x)\to 0$ 的意义下, 0 点是 $f_\lambda$ 的一个不动点, 并且它是吸引的. 当 $1<\lambda<3$, 函数 $f_\lambda$ 有一个不稳定的不动点 0 和一个稳定的不动点 $1-1/\lambda$, 所以对所有 (0, 1) 区间中的点 $x$, $f_\lambda^k(x)\to 1-1/\lambda$. 随着 $\lambda$ 的值增加超过 $\lambda_1=3$ 时, 在 $1-1/\lambda$ 的这个不动点变得不稳定, 分裂成一个周期为 2 的稳定轨道, 在这个轨道上, 除了 (0, 1) 区间中可数个点外其他点都被吸引 (见图 13.2). 当 $\lambda$ 到达 $\lambda_2=1+\sqrt{6}$ 时, 周期为 2 的轨道变得不稳定并被一个周期为 4 的稳定轨道代替. 随着 $\lambda$ 进一步增加, 在 $\lambda=\lambda_q$ 时, 这个加倍周期持续变到周期为 $2^q$ 的稳定轨道, 这个轨道吸引了除 (0, 1) 区间中可数个点外的所有点.

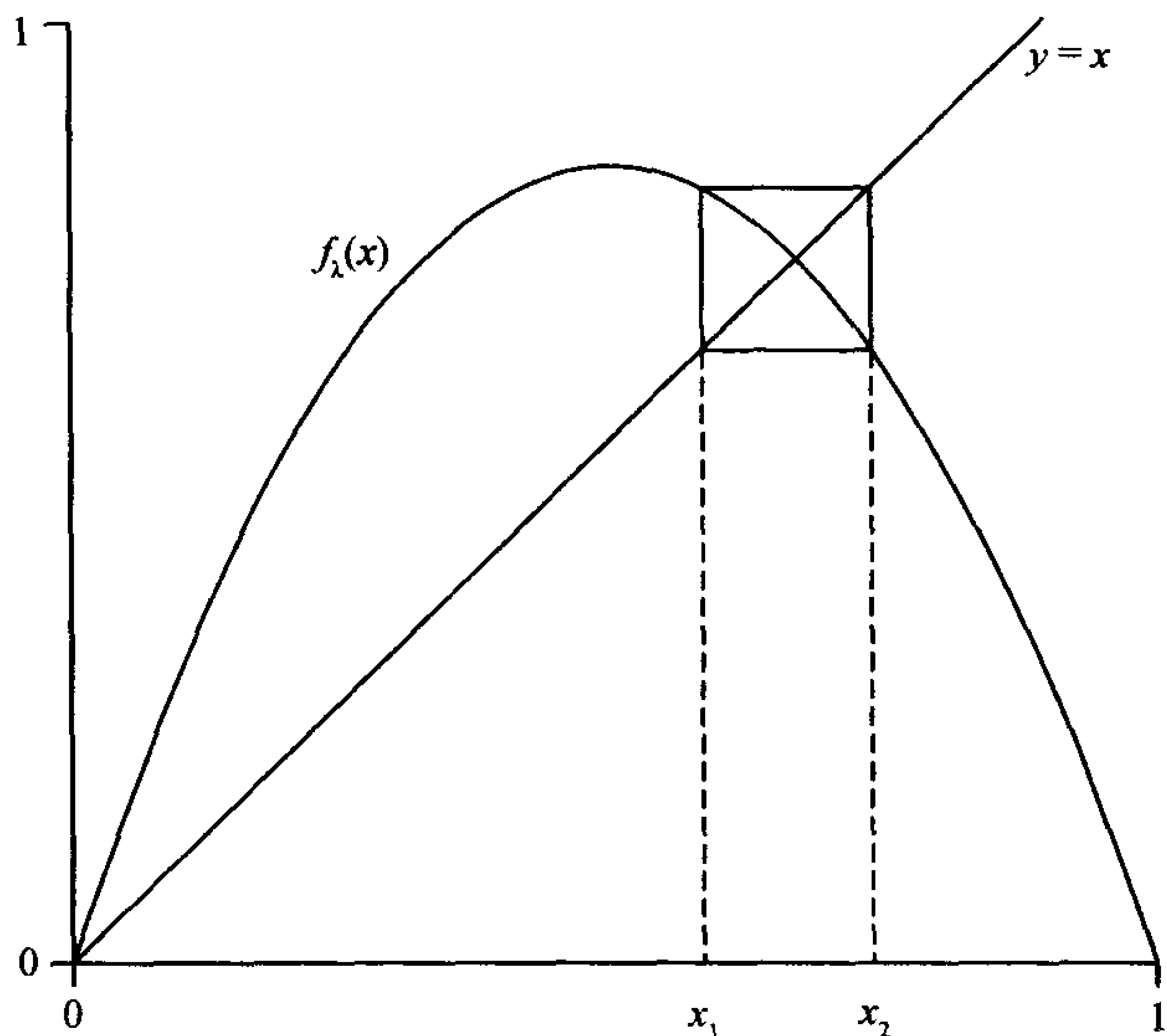



图 13.2 $\lambda=3.38$ 时的逻辑斯谛映射 $f(x)=\lambda x(1-x)$. 注意满足 $f(x_1)=x_2$, $f(x_2)=x_1$ 的周期为 2 的轨道 $x_1$, $x_2$

这个过程的令人惊奇的性质之一就是随着 $\lambda$ 增加, 周期加倍的这个过程越来越频繁, 且当 $\lambda \to \lambda_\infty$ 时, 有 $q \to \infty$, 这里 $\lambda_\infty \simeq 3.570$. 当 $\lambda$ 趋向 $\lambda_\infty$, 周期为 $2^q$ 的稳定轨道反复分裂成附近的周期为 $2^{q+1}$ 的稳定轨道, 这样就得到了一个吸引轨道的序列, 这个轨道序列逼近一个康托尔集 (见图 13.3).

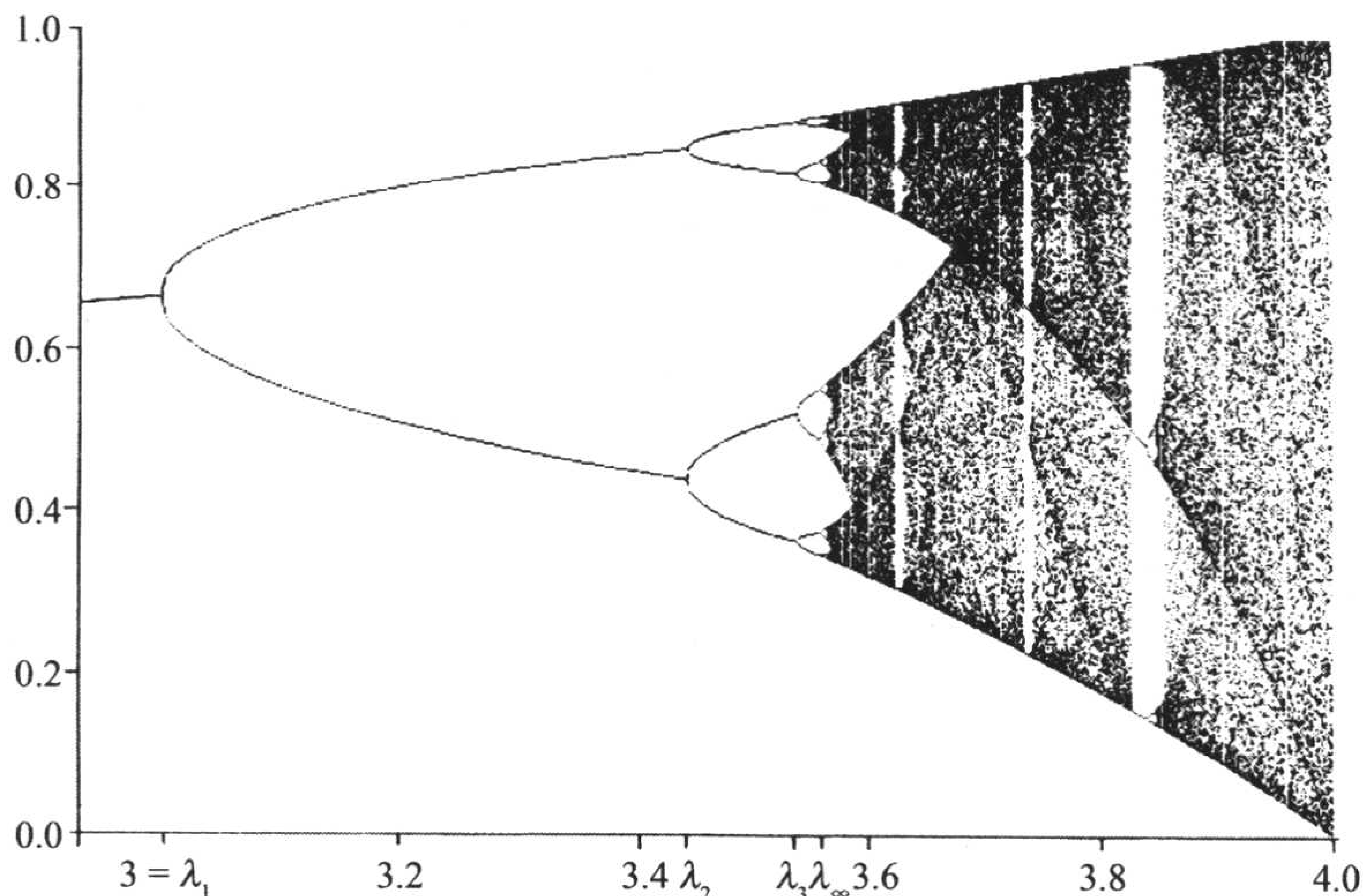



图 13.3 对适当的初始点 $x$, 对每一个 $\lambda$ 绘出当 $k$ 介于 150 和 300 之间的迭代 $f^k(x)$. 当 $\lambda<\lambda_\infty$ 时图中与垂直线的交就是周期吸引子. 当 $\lambda$ 逼近 $\lambda_\infty$ 时, 周期轨道反复分裂在 $\lambda=\lambda_\infty$ 时形成了康托尔集形式的吸子

当 $\lambda=\lambda_\infty$ 时, 吸引子 $F$ 实际上就是一个康托尔集类型的集. 那么 $F$ 在 $f_{\lambda_\infty}$ 下是不变的, 并且除了可数个点以外, [0,1] 中的所有点在 $f_{\lambda_\infty}$ 的迭代下都逼近 $F$(例外点就是迭代时进入不稳定周期轨道的那些点). 当 $q$ 相当大时, 通过对 $f_{\lambda_q}$ 的周期轨道的分析就能推断 $f_{\lambda_\infty}$ 在 $F$ 上的作用. 存在着稠密轨道, 但对初始条件没有敏感的依赖性. 有可能证明 $F$ 在式 (9.2) 的意义下, 是某个迭代函数系的吸引子, 并且利用例 9.8 的方法可以估计出它的豪斯多夫维数为 $0.538\cdots$. 对这个分形吸引子的结构的完整分析已经超出本书的范围.

在 $\lambda_\infty<\lambda<4$ 时, 有几种类型的状况发生: 存在一个参集 $K$, 使得如果 $\lambda\in K$, 则 $f_\lambda$ 有一个具有正长度的真正的混沌吸引子. 并且 $K$ 本身有正的勒贝格测度. 然而, 在 $K$ 的间隙或 "窗口" 上, 双倍的周期再次发生. 例如, 当 $\lambda\approx 3.83$ 时, 存在一个周期为 3 的稳定轨道; 随着 $\lambda$ 的增加, 它首先分裂成周期为 6 的稳定轨道, 然后再分裂成周期为 12 的稳定轨道, 等等. 当 $\lambda$ 到达大约 3.855 时, 这些稳定轨道的 "极限" 就是一个类型康托尔集的吸引子. 类似地, 存在其他的窗口, 在这些窗口加倍周期分裂是从以 5 为周期, 以 7 为周期, 以及其他素数等开始的.

这种加倍周期的最吸引人的性质之一就是它的普遍性：随着 $\lambda$ 值的增加，逻辑斯谛映射的性状与区间上的任何变换族 $f_\lambda(x) = \lambda f(x)$ 的性质是相同的，只要其中的 $f$ 是单峰的，即 $f$ 比如说在某点 $c$ 有唯一的极大值，也就是满足 $f''(c) < 0$. 虽然加倍周期出现的值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 依赖于 $f$，但是在这些点值趋近 $\lambda_\infty$ 的速度是一致的，即 $\lambda_\infty - \lambda_k \simeq c\delta^{-k}$，这里 $\delta = 4.6692$，称之为 Feigenbaum 常数；而 $c$ 依赖于函数 $f$. 此外，对任何可微的单峰函数 $f$，$f_{\lambda_\infty}$ 的分形吸引子的豪斯多夫维数都等于 $0.538\cdots$.

已经被用来作为生物种群的模型，并表现出有类似性质的映射包括下列一些：

$$f_\lambda(x) = \lambda \sin \pi x$$
$$f_\lambda(x) = x \exp(\lambda(1-x))$$
$$f_\lambda(x) = x(1+\lambda(1-x))$$
$$f_\lambda(x) = \lambda x/(1+ax)^5$$

## 13.3 拉伸与折叠变换

平面上带有分形吸引子的最简单动力系统之一就是"面包师"变换 (the 'baker's' transformation)，之所以这样叫是因为它们看起来好像重复地拉伸面团然后折成两块. 设 $E = [0,1] \times [0,1]$ 是一个单位正方形，对固定的 $0 < \lambda < 1/2$，按如下方式定义面包师变换 $f : E \to E$

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x, \lambda y) & 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ (2x-1, \lambda y + 1/2) & 1/2 < x \leqslant 1 \end{cases} \tag{13.4}$$

这个变换可以认为是把 $E$ 拉伸成为一个 $2 \times \lambda$ 的矩形，然后把它割成两个 $1 \times \lambda$ 的矩形，再把这两个矩形叠起来，在它们中间留有一个 $1/2 - \lambda$ 的缝隙 (见图 13.4). 于是 $E_k = f^k(E)$ 是一个递减的集序列，并且 $E_k$ 由 $2^k$ 个高等于 $\lambda^k$ 的水平窄条组成，这些窄条之间的空隙至少为 $(1/2-\lambda)\lambda^{k-1}$. 因为 $f(E_k) = E_{k+1}$，所以紧极限集 $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ 满足 $f(F)=F$.(严格地说，做为 $f$ 不连续的推论，$f(F)$ 不包含在正方形 E 左边界上面的那一部分，但这对我们的研究几乎没有什么影响). 如果 $(x,y) \in E$，那么 $f^k(x,y) \in E_k$，所以 $f^k(x,y)$ 落在与集 $F$ 的距离最多为 $\lambda^k$ 的范围内. 所以 $E$ 中的所有点都在 $f$ 的迭代下被 $F$ 吸引.

如果初始点是 $(x, y)$，其中 $x$ 的二进制展开式为 $x = 0.a_1a_2\cdots$，且 $x \neq 1/2, 1$，那么很容易验证：

$$f^k(x,y) = (0.a_{k+1}a_{k+2}\cdots, y_k)$$

这里的 $y_k$ 是从 $E_k$ 最下端编号为 0 的窄条数起的第 $a_ka_{k-1}\cdots a_1$(二进制数) 个窄条中的点. 这样当 $k$ 很大时，$f^k(x,y)$ 的位置主要依赖于 $x$ 的二进制展开式中的数

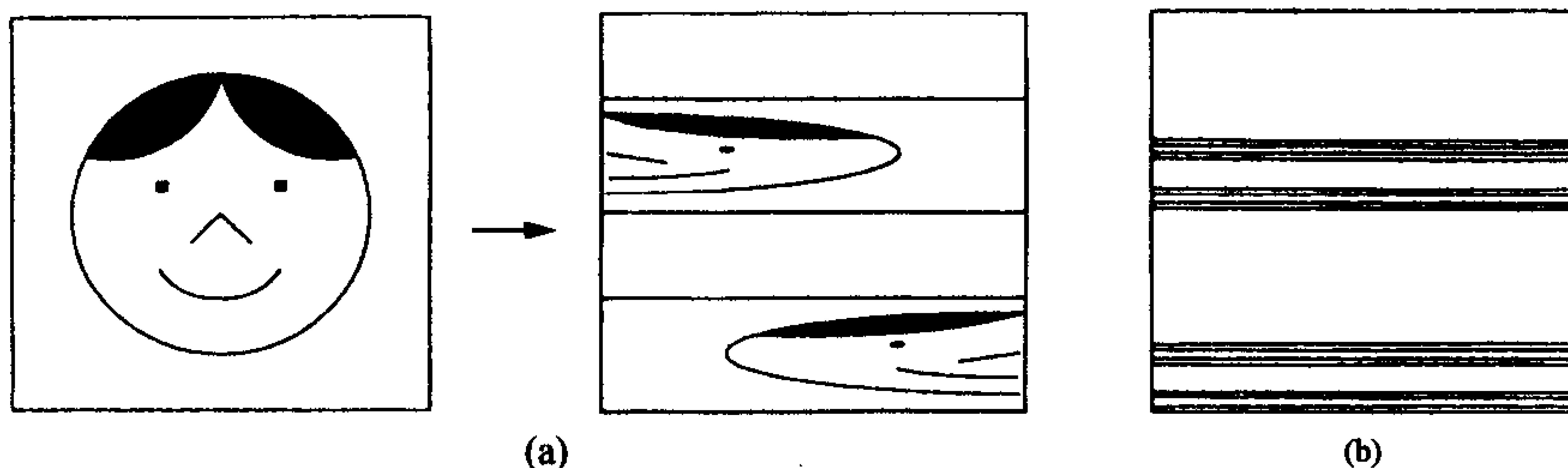



图 13.4 面包师变换：(a) 在单位正方形上变换的结果.(b) 变换的吸引子

字 $a_i$, 这里要求 $i$ 与 $k$ 很接近的. 通过选择一个二进制展开式中包括所有的有限序列 (0 和 1 的) 的 $x$, 对确定的初始点 $(x, y)$, 就可以使得 $f^k(x,y)$ 在 $F$ 中稠, 这正和帐状映射的情形相同.

沿着这个线索进一步分析就能证明 $f$ 对初始条件有敏感的依赖性, 并且 $f$ 的周期点也在 $F$ 中稠, 所以 $F$ 是 $f$ 的一个混沌吸引子. 当然 $F$ 也是一个分形, 它本质上是乘积集 $[0,1]\times F_1$, 这里 $F_1$ 是一个康托尔集, 即由变换 $S_1(x)=\lambda x$ 和 $S_2(x)=1/2+\lambda x$ 组成的 IFS 的吸引子, 由定理 9.3 给出维数公式, 易知: $\dim_H F_1 = \dim_B F_1 = (\ln 2)/(-\ln\lambda)$, 所以根据推论 7.6 有 $\dim_H F = 1+(\ln 2)/(-\ln\lambda)$.

面包师的变换人为的痕迹很明显, 因为这个变换是逐段线性的而且又是不连续的, 可是它确实适合用来说明 "拉伸和割切" 是如何产生分形吸引子的.

平面上的连续函数也能出现像 "拉伸和折叠" 这样紧密联系的过程. 设 $E=[0,1]\times[0,1]$, 并设 $f$ 是把 $E$ 一对一地映射到一个马蹄形区域 $f(E)$ 上的映射, 并使 $f(E)$ 包含在 $E$ 中. 那么 $f$ 可以被认为是把 $E$ 拉成一个又长又薄的矩形然后在中间对折, 通过 $f$ 把这个图形反复地拉伸和对折使得 $f^k(E)$ 包含的肩并肩的窄条数目不断增加 (见图 13.5). 因此有 $E\supset f(E)\supset f^2(E)\supset\cdots$, 紧集 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(E)$ 吸引 $E$ 中的所有点. 局部地, $F$ 看起来像一个康托尔集与一个区间的乘积.

在这个构造中作一个变动就可以给出特征差别相当大的变换 (见图 13.6). 如果 $D$ 是平面上包含单位正方形 $E$ 的区域, $f$: $D\to D$ 为一个使 $f(E)$ 是马蹄形的映射, 并且 "末端" 和 "弧" 都在 $D$ 中, 但却落在集 $E$ 之外, 而且在以后的迭代中都不能回到 $E$ 内; 那么正方形 $E$ 上的几乎所有点 (在平面测度意义下) 最后都能通过 $f$ 迭代到 $E$ 的外面. 如果对任意正数 $k$, $f^k(x,y)\in E$, 那么 $(x,y)\in\bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-k}(E)$. 对适当定义的 $f$, $f^{-1}(E)$ 由穿过 $E$ 的两个水平条形集构成, 所以 $\bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-k}(E)$ 也是区间 [0,1] 与一个康托尔集的乘积. 而集合

$$F=\bigcap_{k=-\infty}^{\infty} f^k(E)=\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(E)\right)\cap\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-k}(E)\right)$$

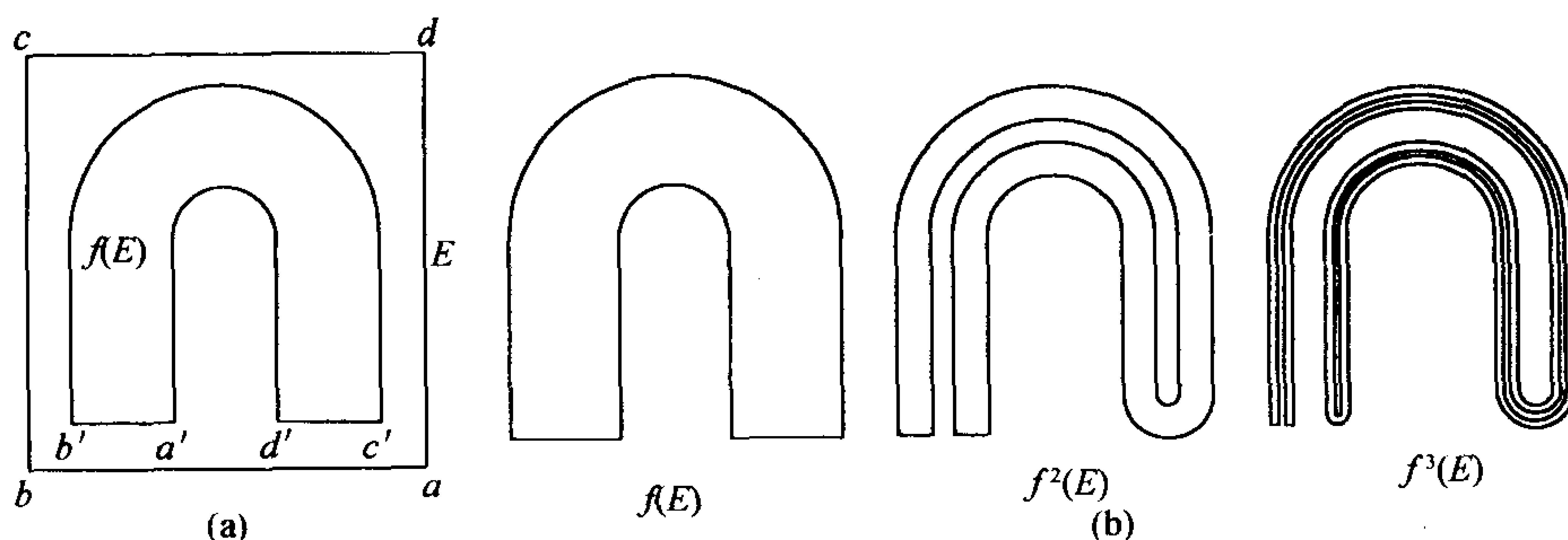



图 13.5 马蹄映射 (a) 通过拉伸和折叠把正方形 $E$ 变换成马蹄形集 $f(E), a, b, c, d$ 分别映射成 $a', b', c', d'$(b) 在 $f$ 的作用下, $E$ 的迭代形成了一个局部是直线与康托尔集的乘积形式的集

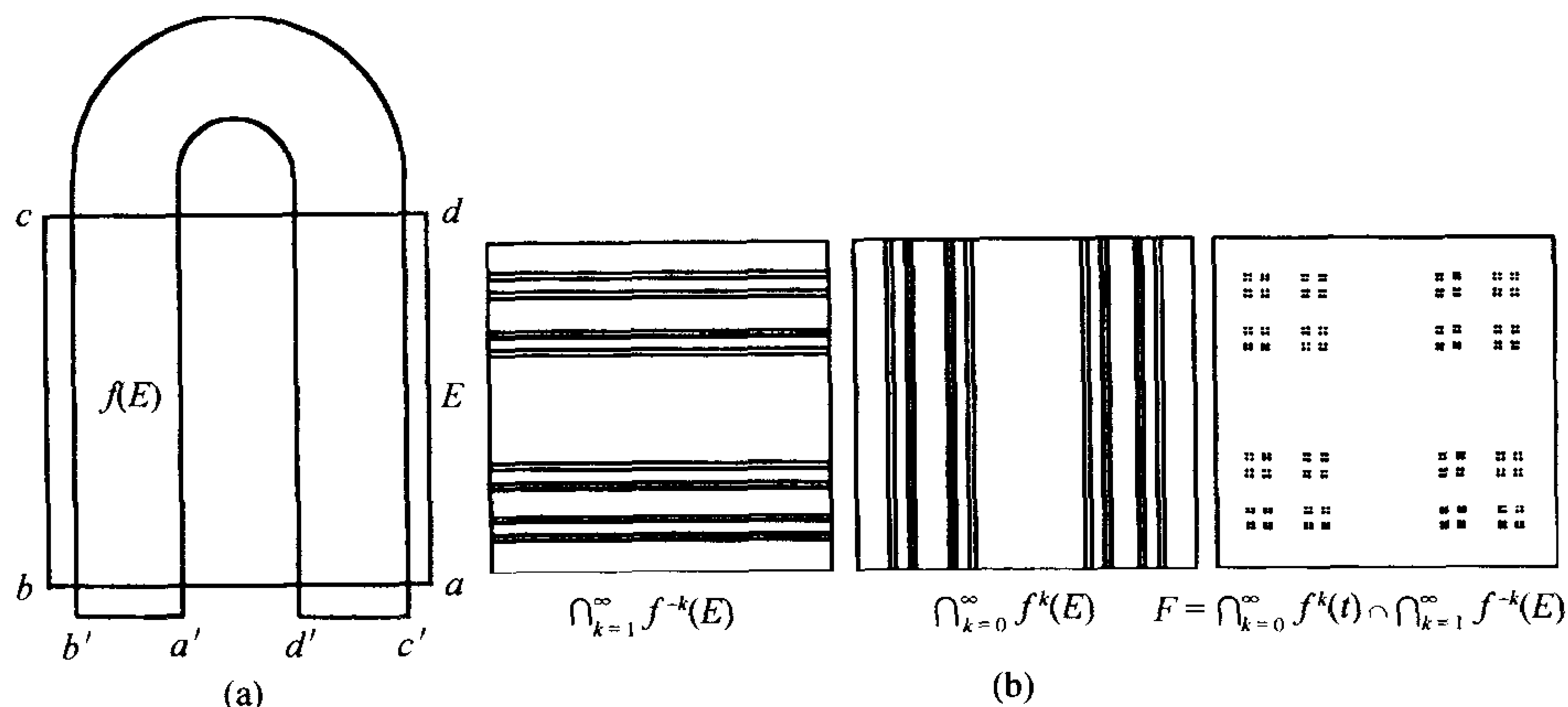



图 13.6 变化的马蹄形映射.(a) 变换后正方形 $E$ 的像 $f(E)$ 的“弧”和“端点”位于 $E$ 外.(b) 集 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f^{-k}(E)$ 和 $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} f^{k}(E)$ 都是康托尔集与单位区间的乘积. 它们的交 $F$ 是 $f$ 的不稳定的不变集

是紧的并且对 $f$ 也是不变的, 同时 $F$ 也是两个康托尔集的乘积. 然而, $F$ 不是吸引子, 因为任意接近 $F$ 的点都被迭代到 $E$ 的外面.

“拉伸和折叠”变换的一个具体例子就是 Hénon 映射, 此映射 $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 是由式 (13.5) 给出的,

$$f(x,y) = (y + 1 - ax^2, bx) \tag{13.5}$$

这里 $a$ 和 $b$ 是常数.(通常选择 $a$=1. 4, $b$=0.3 作研究, 对这些值存在一个四边形 $D$, 使得 $f(D) \subset D$, 可以把注意力集中在这个区域上), 对所有的 $(x, y)$, 这个映射的雅可比行列式的值都为 $-b$, 所以它的面积在 $\mathbf{R}^2$ 上以一个常速率收缩. 对坐标进行线性变换, 式 (13.5) 是带有这种性质的最一般的二次变换. 变换 (13.5) 可以分解为一

个 (保面积的) 弯曲变换、一个压缩变换和一个反射变换的组合, 最终效果是变得"像马蹄形"(见图 13.7). 这使我们可以期望 $f$ 有一个分形吸引子, 而这已被计算机图像证实了 (见图 13.8). 精确的图像表明了这个集的带状特征, 并且在局部上它是一直线段和一个类康托尔集的乘积. 数值估计得出当 $a$=1.4, $b$=0.3 时, 吸引子的盒维数大约为 1.26.

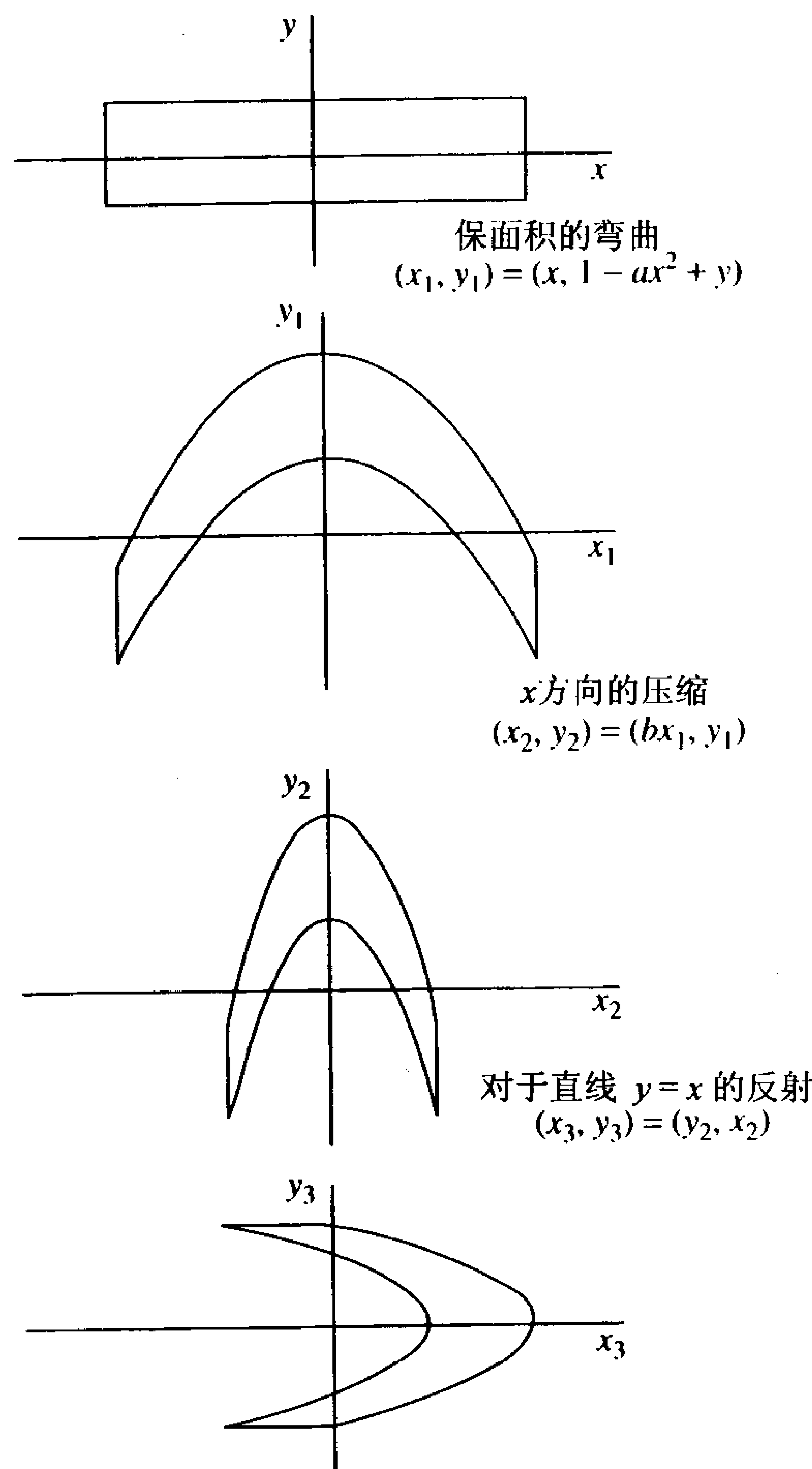



图 13.7 Hénon 映射被分解成一个面积保持不变的弯曲、一个压缩和一个关于直线 $y = x$ 的反射, 图中显示了这些变换在一个矩形上的连续作用

对 Hénon 映射的动力系统的细致分析是十分困难的, 它的动力性还不是完全清楚. 特别随 $a$ 和 $b$ 变化时在 (分枝) 性质上发生的定性变化是非常复杂的.

可能还有很多的其他类型的 "拉伸和折叠" 变换. 变换可以折叠几次或者甚至是多对一的; 例如, 马蹄形的端点可以交叉. 这样的变换时常有分形吸引子, 但是对

它们的分析变得更加困难.

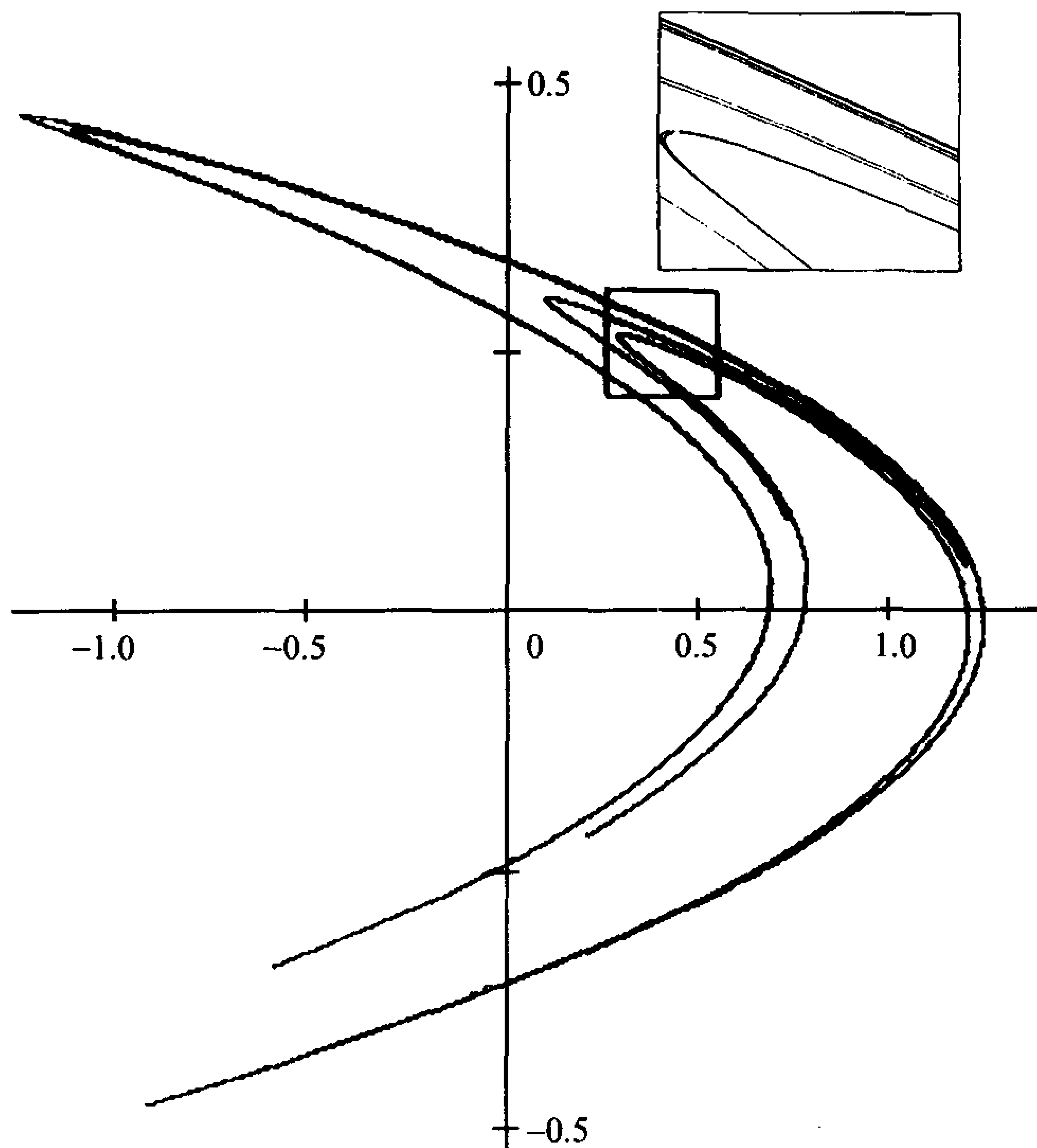



图 13.8 在 Hénon 映射 (13.5) 下, 点的迭代显示了吸引子的形式. (b) 中显示的是 (a) 中小正方形的放大, 这里带条变得很明显

## 13.4 螺 线 管

下一个例子就是三维区域上的变换 —— 实心环形曲面 (solid torus). 如果一个单位圆盘 $B$ 绕与 $B$ 在同一平面上且与 $B$ 不交的轴 $L$ 旋转 360°, 一个实心环形曲面 $D$ 就产生了. 环面 $D$ 可以看成是由 $B$ 的中心绕 $L$ 轴旋转得到的半径 $r>1$ 的圆 $C$ 与 $B$ 的乘积. 这就给出了环面 $D$ 的很方便的参数表示:

$$\{(\phi,\omega)\in C\times B:0\leqslant\phi<2\pi,|\omega|\leqslant 1\}$$

这里角 $\phi$ 确定了 $C$ 的一个点, $\omega$ 是相对于 $B$ 的中心的位置向量 (见图 13.9).

固定 $0<a<1/4$, 由下式定义 $f:D\to D$

$$f(\phi,\omega)=\left(2\phi(\bmod 2\pi),a\omega+\frac{1}{2}\hat{\phi}\right) \tag{13.6}$$

这里 $\hat{\phi}$ 是 $B$ 上与外向轴成 $\phi$ 角的单位向量. 那么 $f$ 就把 $D$ 映射成半径为 $a$ 的实心

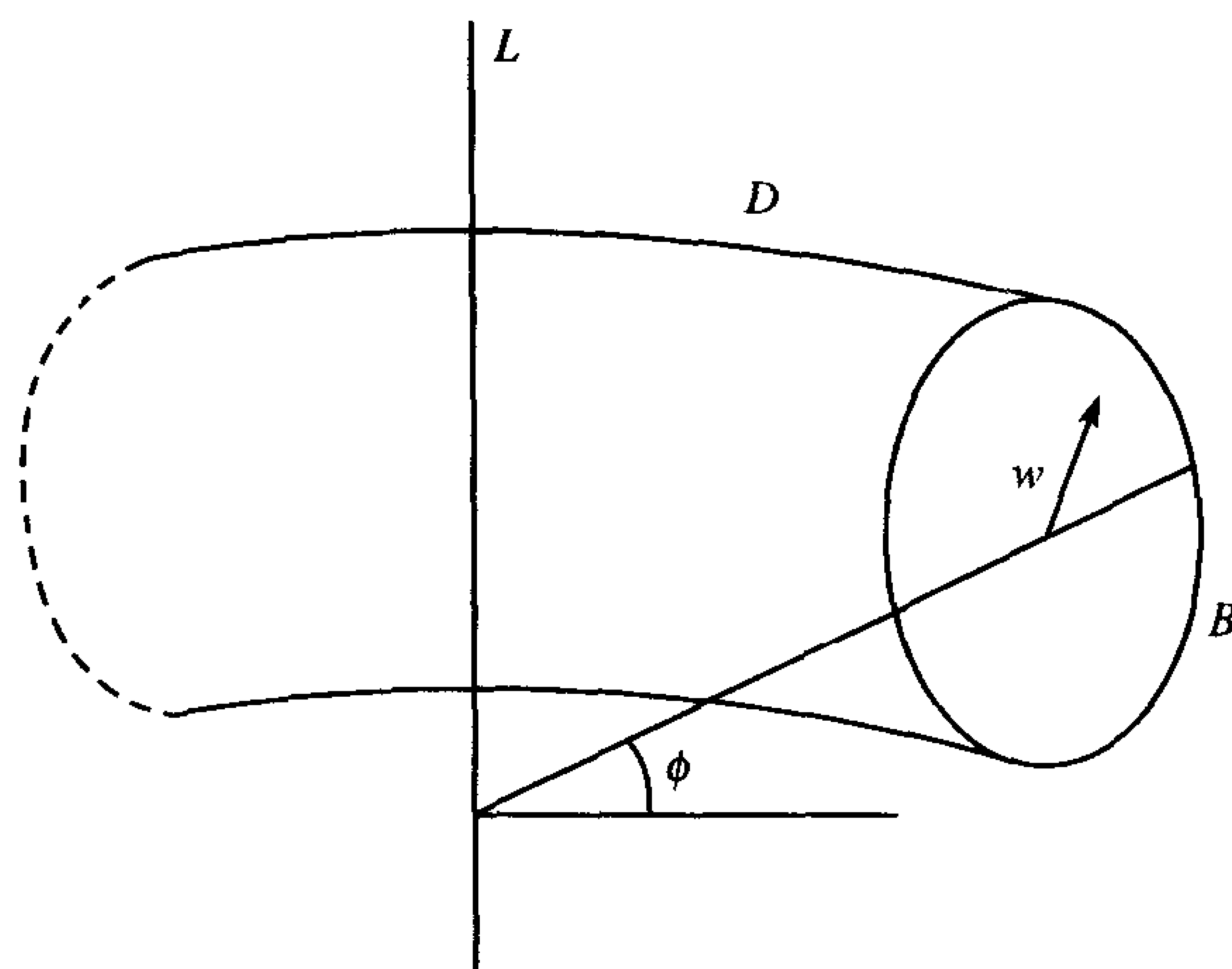



图 13.9 环面 D 的参数表示

管并且在 $D$ 内环绕两圈 (见图 13.10). 注意 $(\phi,\omega)$ 和 $(\phi+\pi,\omega)$ 都被映射到 $D$ 的同样的 "薄片" 上的点, 即以 $L$ 为边界的同一个半平面上. 第二次迭代 $f^2(D)$ 是半径为 $a^2$ 的管并且环绕 $f(D)$ 两圈, 因此 $f^2(D)$ 环绕 $D$ 四圈, 同样 $f^3(D)$ 环绕 $D$ 八圈, 等等. 交集 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(D)$ 是非常纤细的, 局部看起来像一束直线段并且在 $D$ 的任何截口上都是一个类康托尔集. 集 $F$ 叫做**螺线管**(solenoid), $F$ 在 $f$ 作用下是不变的并且吸引 $D$ 中的所有点.

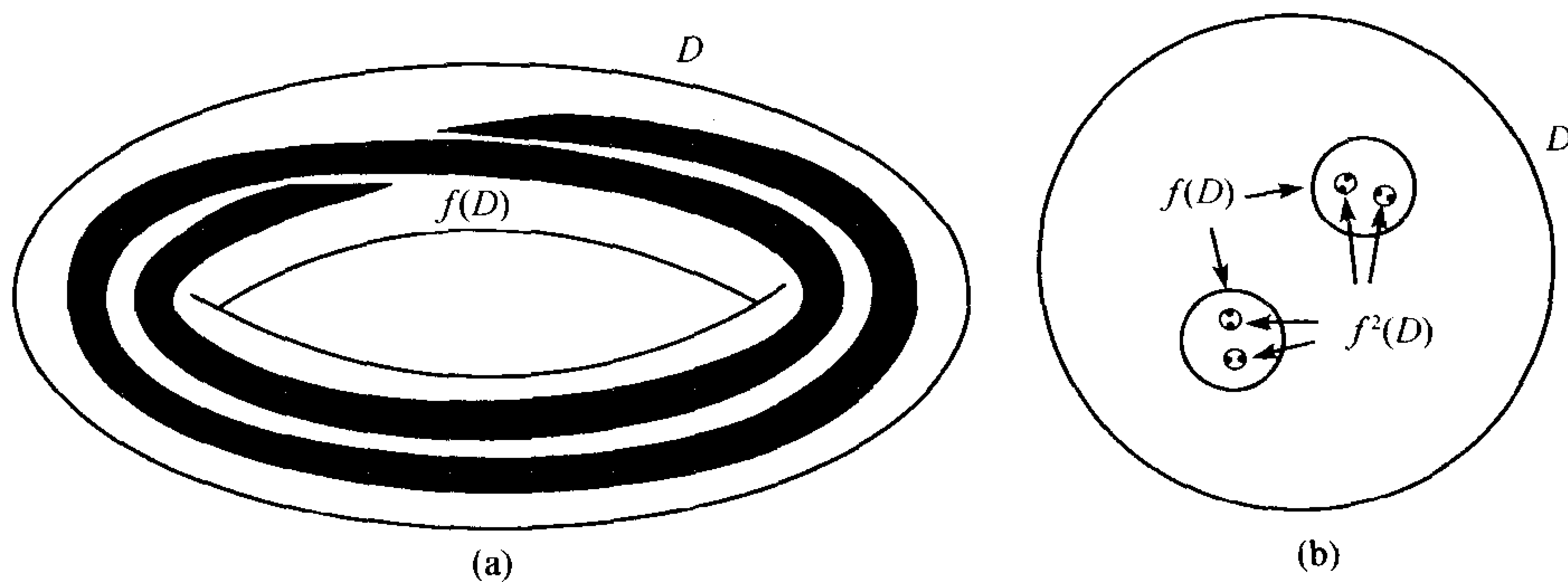



图 13.10 螺线管 (a) 环面 $D$ 和它在 $f$ 下的像.(b) 横断 $D$ 的平面截口与 $F$ 的交为类康托尔集

可以利用通常的方法求出 $F$ 的维数. 设 $P_\phi$ 是以 $L$ 为边界的半平面, 并且与 $C$ 相交成 $\phi$ 角. 注意到 $f^k(C)$ 是一个绕环面 $2^k$ 次的光滑闭曲线, 所以它的总长度最大是 $2^k c$, 这里 $c$ 与 $k$ 无关 ($f^k(C)$ 不能摆动得太大, $f^k(C)$ 的每一圈曲线与每一个半平面 $P_\phi$ 之间的夹角有正的下界). 集 $f^k(D)$ 就是曲线 $f^k(C)$ 的 "充实或加肥" 使

之成为半径为 $a^k$ 的管, 所以它能被沿着曲线 $f^k(C)$、相距为 $a^k$、半径为 $2a^k$ 的球族所覆盖; 显然 $2\times 2^k ca^{-k}$ 个球足以覆盖 $f^k(D)$, 所以应用命题 4.1 并采用通常的方法可以得到 $\dim_{\mathrm{H}} F \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant s$, 并且 $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, 这里 $s = 1 + (\ln 2)/(-\ln a)$.

为了得到它的维数的下界估计, 对每个 $\phi$, 研究截口 $F \bigcap P_\phi$. 集 $f(D) \bigcap P_\phi$ 包含了在 $D \bigcap P_\phi$ 中, 半径为 $a$ 的两个圆盘, 它们的中心相距为 1/2, 且同在 $D \bigcap P_\phi$ 的一个直径上, 并且分别在 $D \bigcap P_\phi$ 中心的两侧. 每个这样的圆盘又包含了 $f^2(D) \bigcap P_\phi$ 中半径为 $a^2$ 的两个圆盘, 并且中心相距为 $a/2$, 等等. 在 $F \bigcap P_\phi$ 上分配一个质量分布 $\mu$, 使得 $f^k(D) \bigcap P_\phi$ 的 $2^k$ 个圆盘中的每一个都有质量 $2^{-k}$. 如果 $U \subset P_\phi$ 满足

$$a^k(1/2 - 2a) \leqslant |U| < a^{k-1}(1/2 - 2a)$$

对整数 $k$, 则 $U$ 最多与 $f^k(D) \bigcap P_\phi$ 中的最多一个圆盘相交, 所以

$$\mu(U) \leqslant 2^{-k} = a^{k(\ln 2)/(-\ln a)} \leqslant c_1 |U|^{(\ln 2)/(-\ln a)}$$

这里 $c_1$ 与 $|U|$ 无关. 则可以由质量分布原理 4.2 得出

$$\mathcal{H}^{(\ln 2)/(-\ln a)}\left(F \bigcap P_\phi\right) \geqslant c_1^{-1}.$$

因为 $F$ 是从截口 $F \bigcap P_\phi (0 \leqslant \phi < 2\pi)$ 构造出来的, 从命题 7.9 的一个高维推广可以得到 $\mathcal{H}^s(F) > 0$, 这里 $s = 1 + (\ln 2)/(-\ln a)$. 于是证明了 $\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{B}} F = s$, 且 $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

如果 $\phi/2\pi = 0.a_1a_2\cdots$ 为二进制小数, 从式 (13.6) 得出 $f^k(\phi,\omega) = (\phi_k, v_k)$, 这里 $\phi_k/2\pi = 0.a_{k+1}a_{k+2}\cdots$; 并且对 $d \leqslant k$, 表示为 $a_k a_{k-1}\cdots a_{k-d+1}$ 的二进制整数决定了点 $v_k$ 属于 $f^d(D) \bigcap P_{\phi_k}$ 中的 $2^d$ 个圆盘中的哪一个. 正如前面例子中的那样, 适当选择数字 $a_1, a_2, \cdots$ 能够使初始点 $(\phi,\omega)$ 在 $f^k(\phi,\omega)$ 的作用下在 $F$ 中稠, 或者能得到周期性轨道, 所以 $f$ 在 $F$ 上是混沌的.

## 13.5 连续动力系统

离散的动力系统可以看成是在长时间延续的离散时间间隔上, 一个数量值的变化公式. 如果时间间隔可以趋于零, 那么公式按通常的方法就变成了微分方程. 这样很自然地把一个独立存在 (时间独立) 的微分方程当作一个连续的动力系统.

设 $D$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个定义域, 再设 $f: D \to \mathbf{R}^n$ 是一个光滑函数, 微分方程

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x) \tag{13.7}$$

有充满 $D$ 的一族解曲线 (solution curve)或轨道(trajectony). 如果初始点 $x(0)$ 给定, 对任意时间 $t$, 解 $x(t)$ 都保持在通过 $x(0)$ 的唯一轨道上; 当 $t \to \pm\infty$ 时, $x(t)$ 的性

质可以由得到的轨道发现. 对 $f$ 给定一个合理的条件, 就不会有两个轨道相交, 否则方程 (13.7) 不能决定 $x$ 的运动. 此外轨道除了在点 $\dot{x}=f(x)=0$ 和轨道为单点外都十分光滑地穿过 $D$.

正如在离散系统中看到的, 连续动力系统也能导出吸引子和斥子.$D$ 的一个闭子集 $F$ 称为包含 $F$ 的吸引域 $V$ 的吸引子, 如果对开集 $V$ 中的所有初始点 $x(0)$, 通过 $x(0)$ 的轨道 $x(t)$ 随着 $t$ 无限增大而接近 $F$. 当然, 要求 $F$ 是不变的, 所以如果 $x(0)$ 是 $F$ 中的点, 那么对 $-\infty<t<\infty$, $x(t)$ 都在 $F$ 中, 这就意味着 $F$ 是一些轨道的并. 同时也要求 $F$ 在下面的意义下是最小的, 即存在一点 $x(0)$, 使得 $x(t)$ 在 $F$ 中稠.

当 $D$ 是一平面区域时, 连续动力系统的吸引子的范围是相当有限的. 仅有的吸引子可能是孤立点 (在式 (13.7) 中满足 $f(x)=0$ 的 $x$) 或是闭环. 比较复杂的吸引子不可能发生. 为了证明这点, 假设 $x(t)$ 是一个吸引子的稠密轨道, 并且假设在 $t_2$ 附近的 $t$ 对应的轨道 $x(t)$ 与在 $t_1$ 附近的轨道 $x(t_1)$ 是非常接近的, 但是截然不同, 因为轨道是非常光滑地变化的, $x(t)$ 在 $t_1$ 和 $t_2$ 的方向几乎是平行的 (见图 13.11). 所以对 $t>t_2$, 轨道 $x(t)$ 被 "阻塞" 而不能接近 $x(t_1)$, 所以事实上 $x(t_1)$ 不能是吸引子上的一个点.(这个事实的精确公式就是著名 Poincaré-Bendixson 定理).

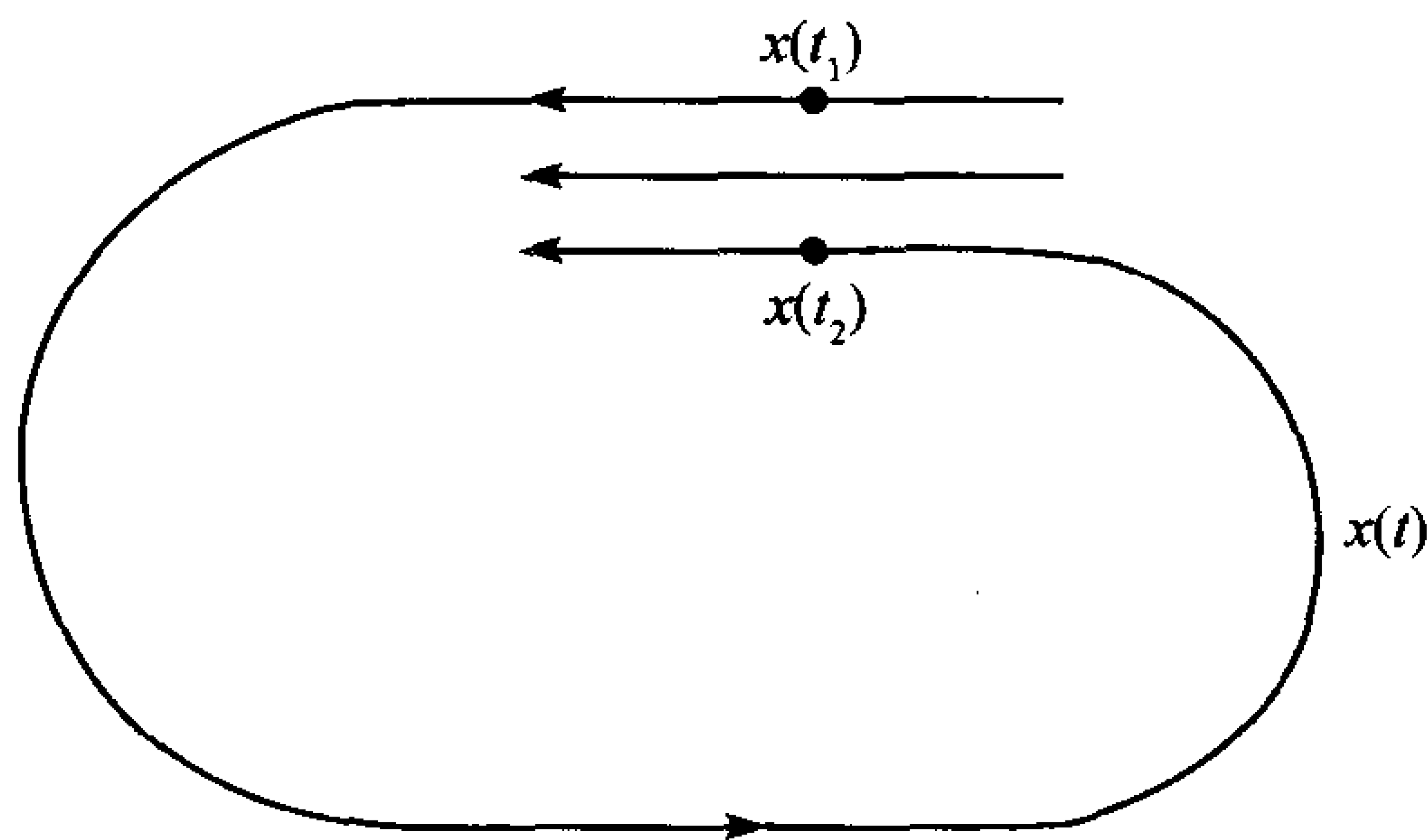



图 13.11 平面上连续动力系统的轨道. 假设轨道光滑地变化, 对任何 $t>t_2$, 轨道显示出被 "阻塞" 而不能接近 $x(t_1)$

因此, 为了找到带有分形吸引子的连续动力系统, 需要在 3 维或更高维的空间中考察系统. 线性微分方程 (在式 (13.7) 中, 使 $f(x)$ 是 $x$ 的线性函数) 用经典的方法完全可以解决, 它的解包括周期项或指数项. 然而即使是非常简单的非线性项都可以导致相当错综复杂的轨道. 众所周知, 非线性微分方程, 特别是高维情形是非常难分析的, 目前, 关于这个问题的讨论来源于定性的数学分析和数值研究的结合. 一个标准的方法是把 3 维连续系统通过平面 "截口" 变成二维离散系统, 这种截口又被称为 "Poincaré 截口". 如果 $P$ 是横截这些轨道的平面区域, 就可以定义 "第一次返回" 映射 (first return map)$g: P\to P$, $x$ 作为 $P$ 上的一点, $g(x)$ 就取为通过

$x$ 的轨道下一次与 $P$ 的交点 (见图 13.12). 那么 g 就是 $P$ 上一个离散动力系统. 如果 g 在 $P$ 上有一个吸引子 $E$, 那么通过 $E$ 中的点的轨道的并就是 $f$ 的一个吸引子 $F$, 局部看起来 $F$ 像是 $E$ 和一线段的乘积, 根据推论 7.4 的一个变化, 对典型的问题可以得出 $\dim_H F = 1 + \dim_H E$ 的结果.

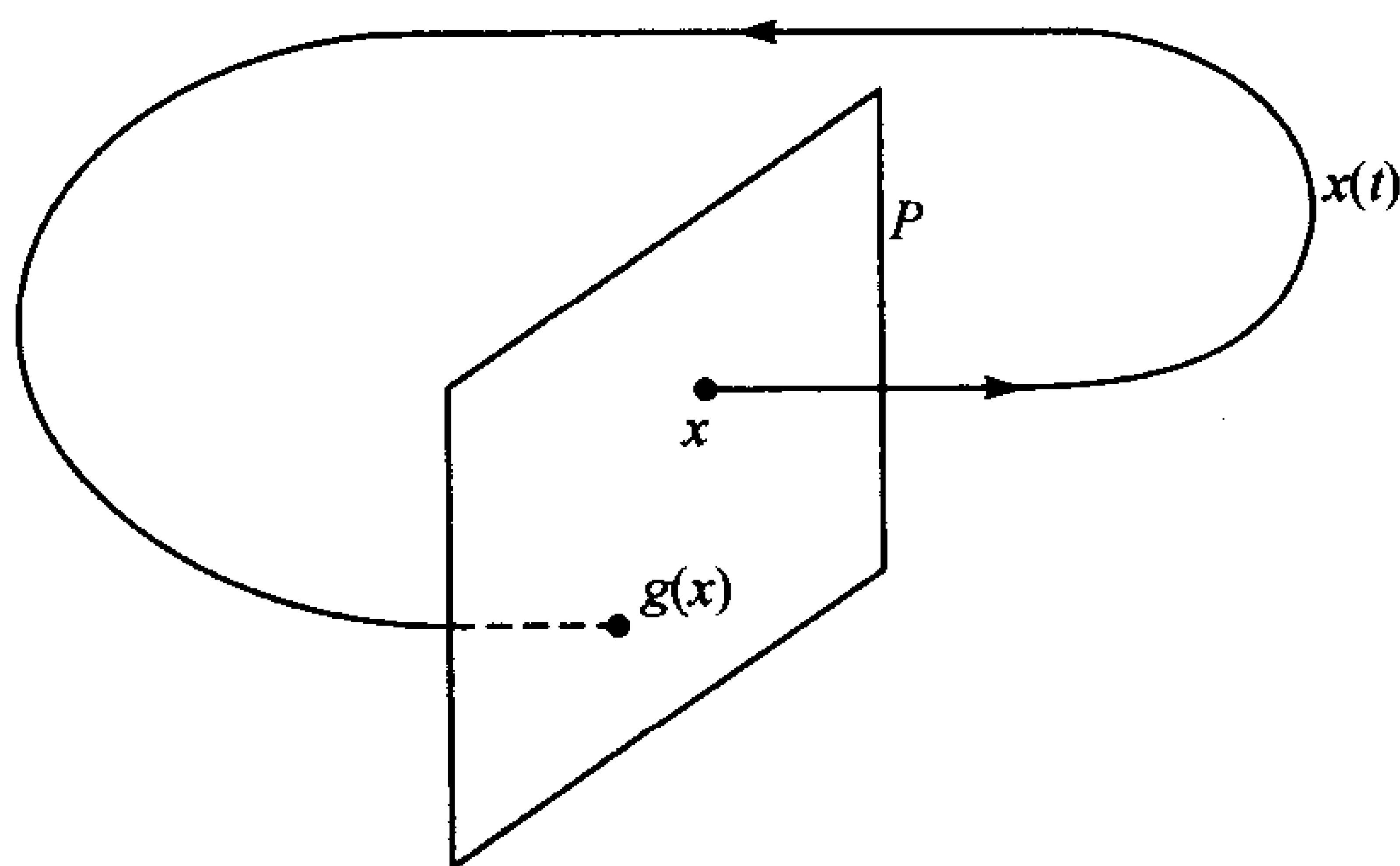



图 13.12 在 $\mathbf{R}^3$ 上的连续动力系统通过 "第一次返回" 映射 g 导出的一个平面上的离散动力系统

带有分形吸引子的连续动力系统中已知的最好的例子, 可能就是洛伦兹系统方程. 洛伦兹研究了从下面加热的流体的一个水平层的热量积聚, 由于液体的浮力, 在加热时热的流体上升并形成了圆筒形的对流. 在一定条件下这些单元就是一系列平行旋转的圆筒形对流 (见图 13.13). 洛伦兹用连续方程和流体动力学中的 Navier-Stokes 方程, 还有热传导方程描述这些圆筒形对流中的一个性质, 一系列的近似和简化导出了*洛伦兹方程*(Lorenz equations).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x)\\ \dot{y} &= rx - y - xz\\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned} \tag{13.8}$$

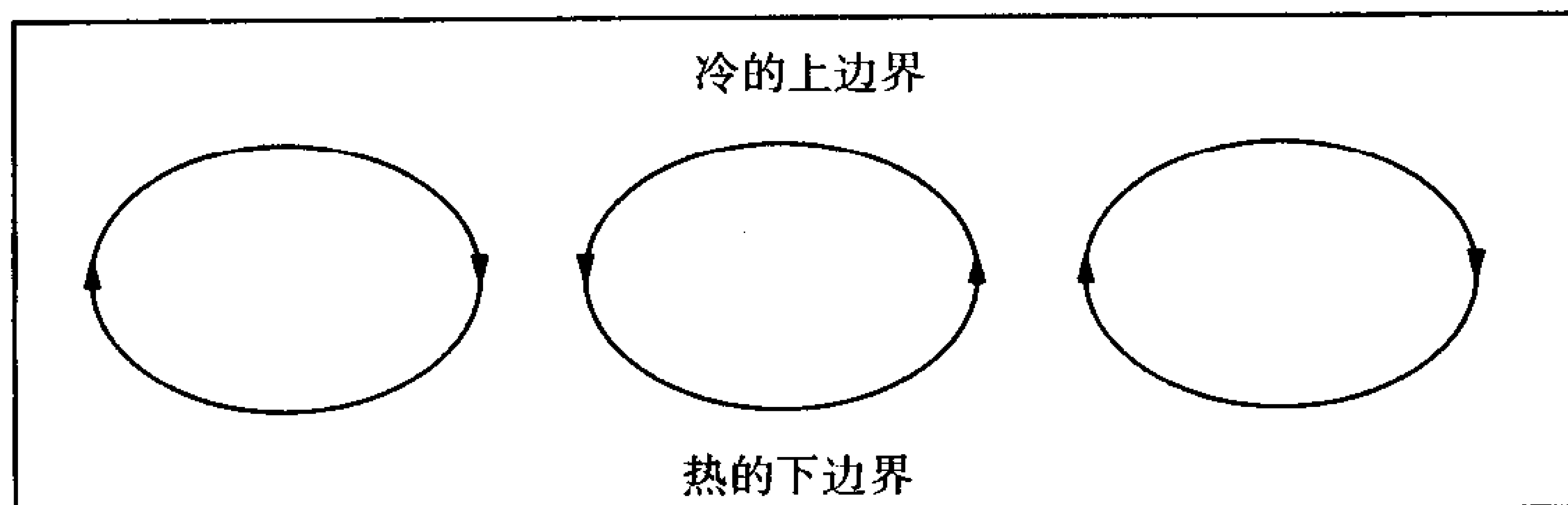



图 13.13 洛伦兹方程描述了热传导过程中, 黏性液体内旋转的圆筒形对流的一个性质

$x$ 项代表圆柱的旋转速度, $z$ 表示垂直线方向的温度变化率, $y$ 项对应的是圆柱里外两面的温度差, 常数 $\sigma$ 是空气的 Prandtl 系数 (Prandtl 系数包含有黏滞度和热的传

导性两方面的性质), $b$ 依赖于液面宽与液体高的比率, $r$ 是一个控制参数, 表示在系统的底部与顶部的温度差. 第二和第三个方程中的非线性是由于流体方程的非线性所导致的.

在 $(x, y, z)$ 空间考虑问题, 首先必须注意的就是, 系统 (13.8) 以一个常速率压缩体积. 在一个很小的边长为 $\delta$ 的坐标盒的相对面上速度的差近似等于 $\delta(\partial\dot{x}/\partial x)$, $\delta(\partial\dot{y}/\partial y), \delta(\partial\dot{z}/\partial z)$, 所以盒的体积变化率是 $\delta^3(\partial\dot{x}/\partial x + \partial\dot{y}/\partial y + \partial\dot{z}/\partial z) = -(\sigma + b + 1)\delta^3 < 0$. 不过如取 $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$(通常选择这些值来研究) 轨道就集中在形式非常复杂的一个吸引子上. 这个洛伦兹吸引子包含两个 "圆盘", 每一个都是由螺线形轨道构成的 (见图 13.14). 某些轨道几乎是垂直地离开圆盘中的每一个而进入另一个圆盘中. 如果要计算轨道 $x(t)$, 则下面的性质是典型的. 随着 $t$ 的增加, $x(t)$ 先绕一个圆盘旋转几圈, 然后 "跳" 到另一个圆盘中. 绕第二个圆盘旋转几圈后, 又跳回原来的圆盘. 并以这样的方式继续下去, 在离开每个圆盘之前所绕的圈数是一个明显的随机数. 这个运动近乎是一个混沌状态, 特别, 在吸引子的两个圆盘中最初非常接近的点很快就有完全不同的存在形式. 对初始条件的这种敏感的依赖性的解释就是, 不可能对天气作长期预报.

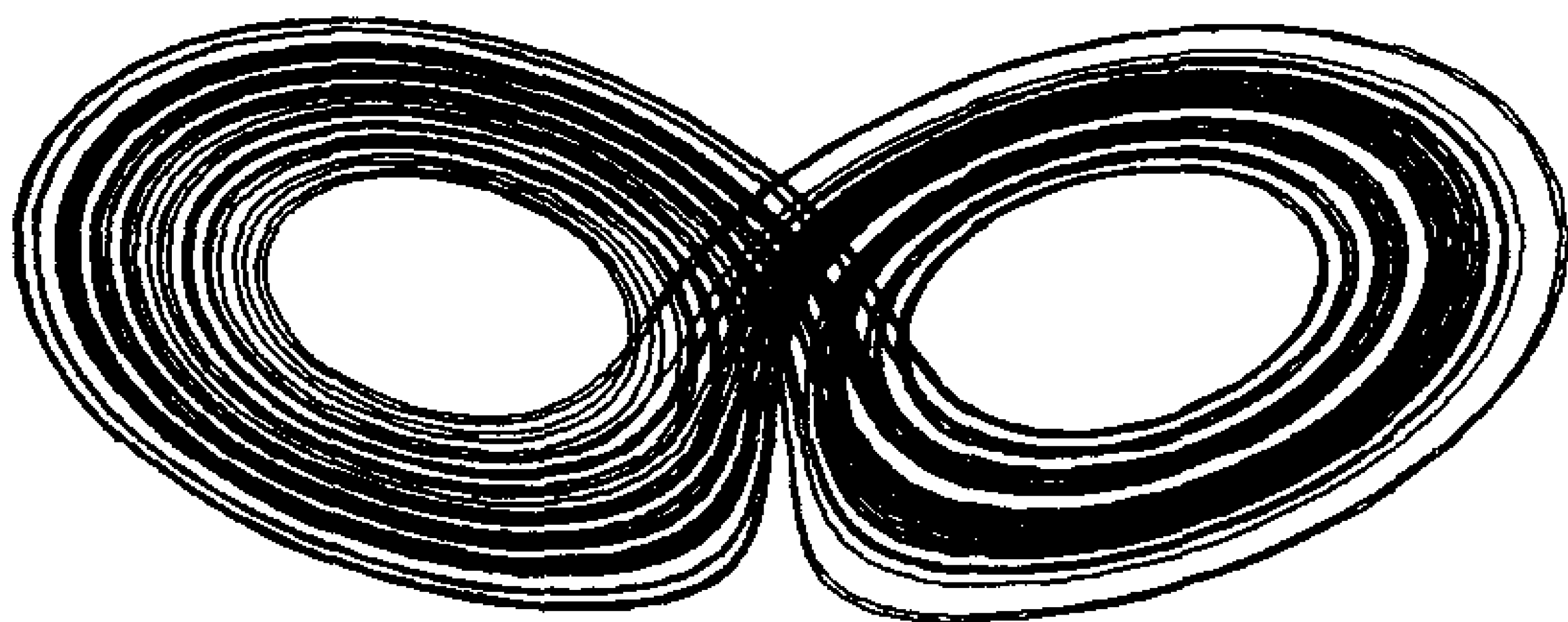


图 13.14 $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ 时洛伦兹吸引子的视图. 注意到是绕两个圆盘旋转并且从一个圆盘 "跳入" 另一个

洛伦兹吸引子显然也是一个分形, 当 $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ 时通过数值估计, 这个吸引子的维数大约为 2.06.

其他的微分方程系统也有分形吸引子.Rössler 研究了如下这个方程:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c) \end{aligned}$$

如果适当地选择固定的 $b$ 和 $c$, 吸引子的性质随着 $a$ 的变化而变化. 当 $a$ 很小时, 吸引子是一个简单闭曲线, 但是随着 $a$ 的增加, 这个曲线就分裂成一个两圈的环, 继而分裂成四圈的环等. 这样, 一类加倍的周期又出现了, 当 $a$ 到达临界值时, 有一个带状形式的分形吸引子 (见图 13.15), 这个带在其内有一个扭转, 非常像 Möbius 带.

对大的范围, 每一个连续的动力系统都必须各自分别进行研究, 几乎不存在普

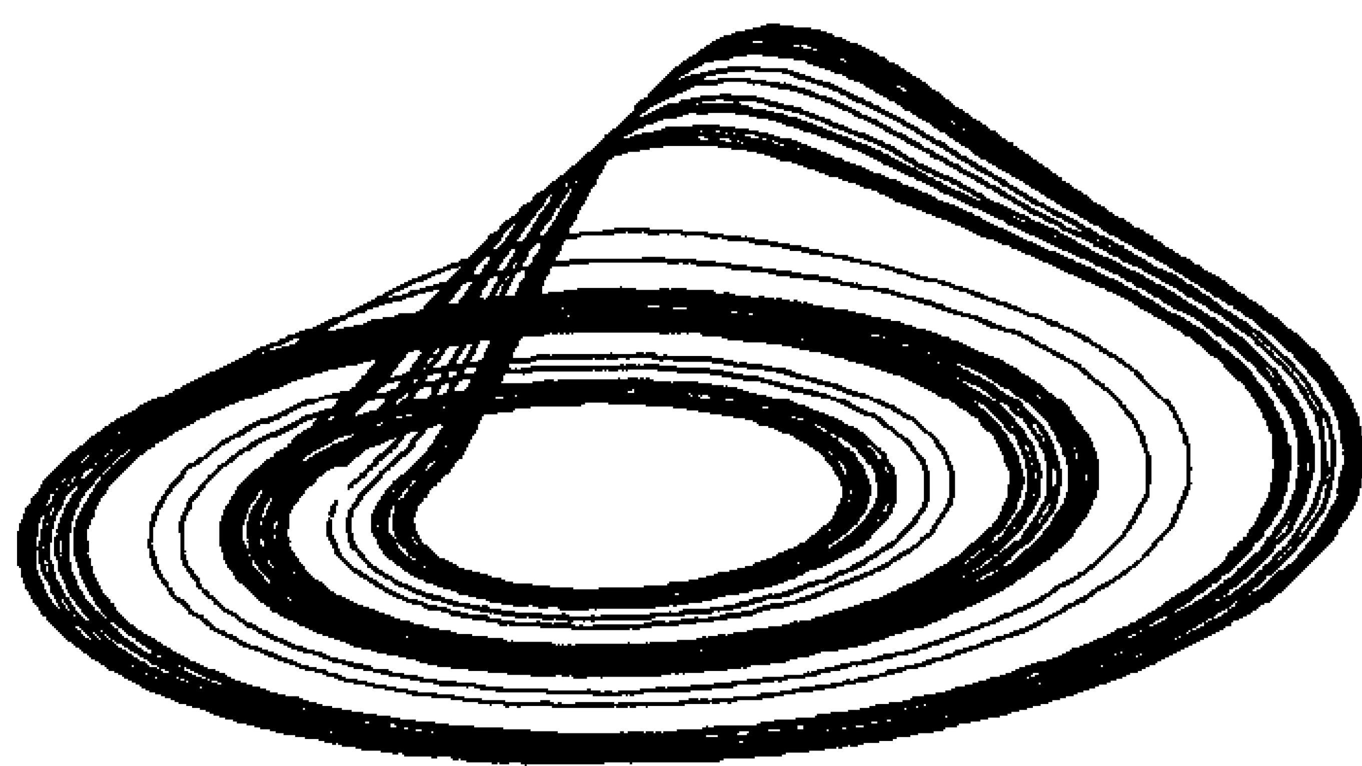


图 13.15 $a = 0.173, b = 0.4, c = 8.5$ 时 Rössler 带吸引子的视图，注意这个就是局部蕴含着康托尔集与直线段乘积所得到的集

遍适用的理论. 连续系统的吸引子非常适合计算机研究，数学家经常受到挑战去解释在计算机屏幕上观察到的 "奇异的" 吸引子.

## *13.6 小因子理论

很多重要的动力系统都依赖参数 $\omega$，在某种意义下如果 $\omega$ "不太接近一个有理数"，那么这个系统就是稳定的，换句话说，也就是在 10.3 节的意义下，$\omega$ 是可以很坏地逼近的. 根据 Jarník 定理 10.3，可以很好地逼近的数构成了分形集，所以稳定参数位于带有分形补集的集里.

下面这个简单例子将表明，可以很坏地逼近的参数是怎样导致稳定系统的.

设 $C$ 是具有单位半径的无限柱面 $\{(\theta, y) : 0 \leqslant \theta < 2\pi, -\infty < y < \infty\}$，固定 $\omega \in \mathbf{R}$，由下式定义一个离散的动力系统 $f : C \to C$

$$f(\theta, y) = (\theta + 2\pi\omega(\mathrm{mod} 2\pi), y). \tag{13.9}$$

很显然，$f$ 正好把圆柱面上的点旋转 $2\pi\omega$，$y=$ 常数的圆周在 $f$ 的作用下是不变的. 很自然地要问，如果对变换 (13.9) 稍作扰动，这些不变曲线是否是稳定的？这个圆柱面还能否被这些不变闭曲线族覆盖 (见图 13.16)？令人惊奇的是，这依赖于数 $\omega$ 的性质：如果 $\omega$ 是 "充分无理的"，那么不变曲线仍然保持不变.

对变换 (13.9) 进行修改，使之成为

$$f(\theta, y) = (\theta + 2\pi\omega(\mathrm{mod} 2\pi), y + g(\theta)) \tag{13.10}$$

这里 $g$ 是一个 $C^\infty$ 函数 (即 $g$ 有任意阶连续导数). 用分部积分很容易证明，一个函数是 $C^\infty$ 的当且仅当傅里叶系数 $a_k$ 收敛到 0 的速度，要比 $k$ 的任意次幂收敛速度都快. 因此，如果

$$g(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$$

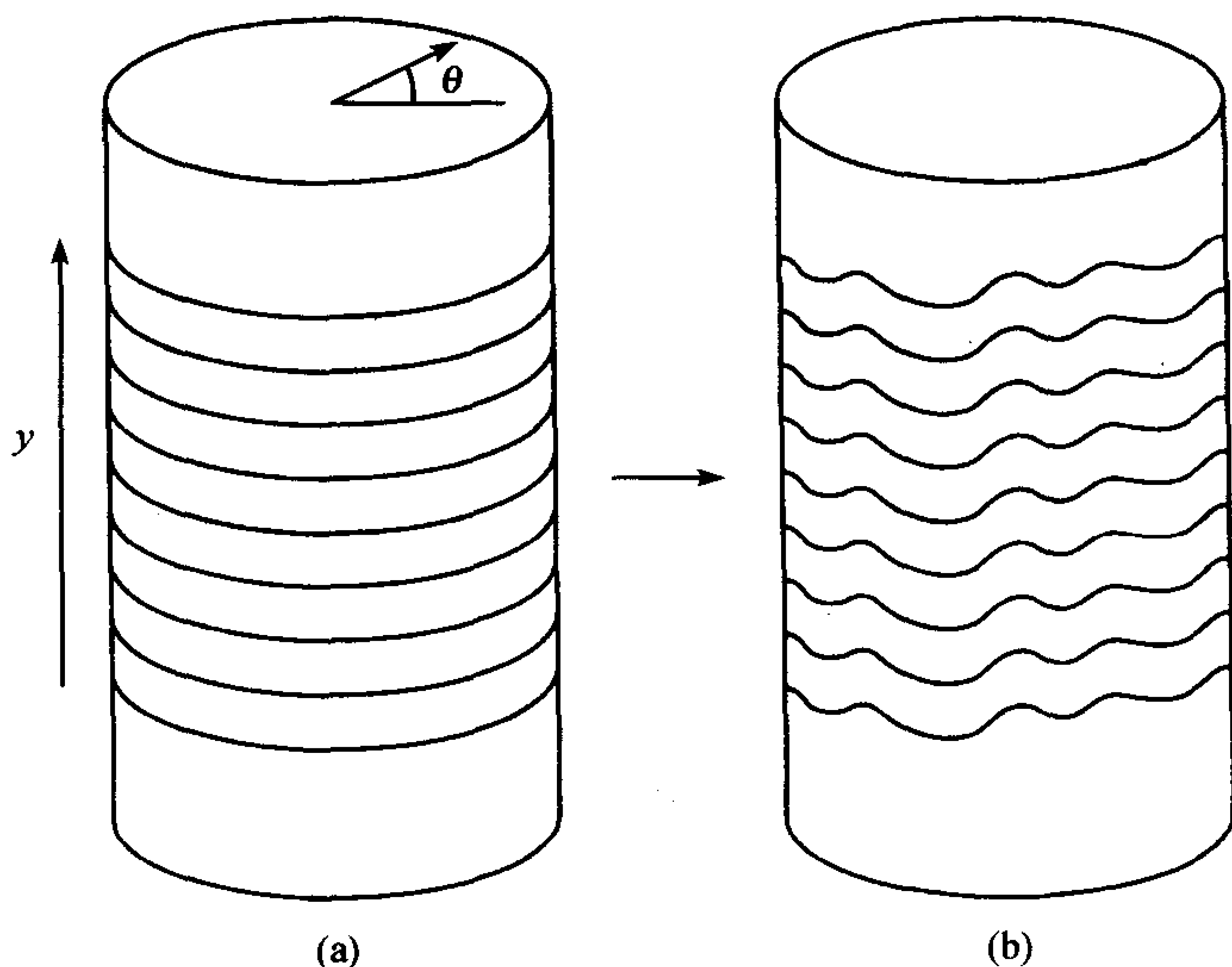



图 13.16 (a) 映射 $f(\theta,y)=(\theta+2\pi\omega(\mathrm{mod}2\pi),y)$ 的不变圆. (b) 如果 $\omega$ 不是 "太有理", 对映射 $f(\theta,y)=(\theta+2\pi\omega(\mathrm{mod}2\pi),y+g(\theta))$ 作一个小摄动, 这些不变圆扭成一族光滑不变曲线

是 $g$ 的傅里叶级数, 那么对每一个正整数 $m$, 都存在一个常数 $c$, 使得对 $k\neq 0$,

$$|a_k|\leqslant c\,|k|^{-m}.$$

假设 $y=y(\theta)$ 是式 (13.10) 之下的不变曲线, 并设 $y$ 的傅里叶级数为

$$y(\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty}b_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}.$$

只要 $(y,y(\theta))$ 在曲线上, 则点 $(\theta+2\pi\omega(\mathrm{mod}2\pi),y(\theta)+g(\theta))$ 也一定位于此曲线上, 因此就有

$$y(\theta+2\pi\omega(\mathrm{mod}2\pi))=y(\theta)+g(\theta)$$

或者

$$\sum_{-\infty}^{\infty}b_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\theta+2\pi\omega)}=\sum_{-\infty}^{\infty}b_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}+\sum_{-\infty}^{\infty}a_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}.$$

比较上式两边 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$ 项的系数, 如果 $\omega$ 是无理数, 可以得到 $a_0=0$, 而 $b_0$ 是任意数, 并且

$$b_k=\frac{a_k}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k\omega}-1}\quad(k\neq 0).$$

所以不变曲线由

$$y(\theta)=b_0+\sum_{k\neq 0}\frac{a_k}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k\omega}-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\tag{13.11}$$

给出, 如果此傅里叶级数收敛到一连续函数; 只要分母 $e^{2\pi ik\omega}-1$ 取 "太小的值不太频繁", 就会发生这种情形. 假设对某个 $\alpha>2$, $\omega$ 不是 $\alpha$ 很好可逼近的 (见式 10.4), 那么存在一个常数 $c_1$ 使得对任意的 $k\neq 0$

$$\left|e^{2\pi ik\omega}-1\right|\geqslant \min_{m\in\mathbf{Z}}|k\omega-m|=||k\omega||\geqslant c_1|k|^{1-a}$$

所以对每一个 $m$ 存在常数 $c$, 使得

$$\left|\frac{a_k}{e^{2\pi ik\omega}-1}\right|\leqslant\frac{c_1^{-1}|a_k|}{|k|^{1-a}}\leqslant cc_1^{-1}|k|^{-m-1+a}.$$

因此, 如果 g 是一个 $C^\infty$ 函数, 则对某些 $\alpha>2$, $\omega$ 不是 $\alpha$ 很好可逼近的. 由式 (13.11) 给出的函数 $y(\theta)$ 是 $C^\infty$ 的, 故 $f$ 有一族 $C^\infty$ 的不变曲线. 在定理 10.3 中已经看到, 对所有 $\alpha>2$ 的 $\alpha$ 很好可逼近的数集的维数为 0, 所以对 "大部分的" $\omega$, 不变曲线都是稳定的.

上面的例子称为扭曲映射, 它是一个相当普遍的柱变换类中的一个特殊情形. 定义 $f:C\to C$ 为

$$f(\theta,y)=(\theta+2\pi\omega(y)(\bmod 2\pi),y). \tag{13.12}$$

这里, $y=$ 常数的圆仍然是不变的, 但这里旋转的角度 $\omega(y)$ 可以随 $y$ 非常平滑地变化. 对 $f$ 加上一个扰动, 使它变成:

$$f(\theta,y)=(\theta+2\pi\omega(y)+\varepsilon h(\theta,y)(\bmod 2\pi),y+\varepsilon g(\theta,y)) \tag{13.13}$$

其中 $h$ 和 $g$ 都是光滑函数, $\varepsilon$ 很小, 要问的是, 这时环绕 $C$ 的不变曲线是否仍然还保持呢? Moser 扭曲定理是一个很深刻的结论, 粗略地说就是如果存在常数 $c_1$ 对所有的 $k\neq 0$, $||k\omega||\geqslant c_1|k|^{-3/2}$ 且 $\varepsilon$ 充分小, 那么对式 (13.12) 中的 $y=$ 常数的不变圆 (这里 $\omega(y)=\omega$) 将被变成式 (13.13) 中的可微的闭不变曲线. 所以根据定理 10.3, 频率 $\omega$ 的例外集的维数为 4/5. 典型地, $C$ 被与可以很坏地逼近的 $\omega$ 对应的不变曲线和一个区域所充满, 其中在不变曲线上的运动是规则的, 而在这个区域上运动是混沌的. 混沌区域随 $\varepsilon$ 的递增而增加.

小因子理论的最重要应用可能是 Hamilton 系统的稳定性. 考虑由参数 $(\theta_1,\theta_2,j_1,j_2)$ 表示的四维空间, Hamilton 函数 $H(\theta_1,\theta_2,j_1,j_2)$ 由下列微分方程

$$\dot\theta_1=\partial H/\partial j_1,\dot\theta_2=\partial H/\partial j_2,\dot j_1=-\partial H/\partial\theta_1,\dot j_2=-\partial H/\partial\theta_2$$

决定了一个保守 (体积保持不变) 动力系统. 所以如果 $H(\theta_1,\theta_2,j_1,j_2)=H_0(j_1,j_2)$ 与 $\theta_1,\theta_2$ 无关, 可以得出解

$$\theta_1=\omega_1t+c_1,\qquad \theta_2=\omega_2t+c_2,\qquad j_1=c_3,\qquad j_2=c_4,$$

这里 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 是角频率 (它们可能依赖 $j_1, j_2$), $c_1, c_2, c_3, c_4$ 是常数. 对所有的时间, 系统的一个轨道保持在 $(j_1, j_2) =$ 常数的同一个 2 维环面上, 这样的环面就称为是不变的.

一件很重要的事情, 是了解这样的不变环面在系统的很小的扰动下是否是稳定的. 如果 Hamilton 函数被

$$H_0(j_1, j_2) + \varepsilon H_1(\theta_1, \theta_2, j_1, j_2)$$

代替, 这里 $\varepsilon$ 是很小的数. 是不是经过适当的坐标变换 $(\theta_1, \theta_2, j_1, j_2) \mapsto (\theta'_1, \theta'_2, j'_1, j'_2)$, 这个新系统的轨道还保持在 $(j'_1, j'_2) =$ 常数这样一个新的不变环面上? 换句话说, 把原来系统的不变环面轻轻地扭转一下, 它就变成了新系统的不变环面, 或者是做了很大的改变? 对这个问题, 著名的 Kolmogorov-Arnold-Moser(KAM) 定理给出了答案 —— 如果角频率之比 $\omega_1/\omega_2$ 不能被有理数很好地逼近的, 那么一个环面在很小的扰动下是稳定的; 更精确地说, 如果对所有的正整数 $p$, g, 存在 $c > 0$, 使 $|\omega_1/\omega_2 - p/q| \geqslant c/q^{5/2}$, 那么环面就是稳定的. 根据定理 10.3, 不满足这个条件的集是维数为 4/5 的分形集, 所以, 特别地, 几乎所有的频率比 (在勒贝格测度意义下) 在很小的扰动下都有不变的环面.(事实上, 条件还能减弱到对任何 $\alpha > 2$, $|\omega_1/\omega_2 - p/q| \geqslant c/q^{\alpha}$.)

对小因子理论存在一些天文学的证据. 例如, 小行星的角频率 $\omega$ 趋向于避开一个值, 这个值使比 $\omega/\omega_J$ 接近 $p/q$, 这里 $q$ 是一个小整数, $\omega_J$ 是木星的角频率, 主要的扰动影响来自木星. 假设太阳系行星的轨道都是稳定的 (幸好事实似乎如此), 同时还假定可以孤立地考虑一对运行的物体 (这个假设过于简化了问题), KAM 理论预测了有理频率比的回避性.

## *13.7 李雅普诺夫指数和熵

到目前为止, 大多数都是从几何的观点考察动力系统的吸引子, 然而一个动力系统 $f$ 提供了比纯粹的几何结构更丰富的结构. 在这一节中, 将概括 $f$ 的一些性质, 这些性质时常与分形吸引子结合在一起发挥作用.

不变测度的概念是动力系统的理论基础. 在 $D$ 上的一个测度 $\mu$ 对映射 $f: D \to D$ 是不变的, 如果对 $D$ 的任何子集 $A$, 有

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A). \tag{13.14}$$

假定 $\mu$ 已经规范化, 即 $\mu(D) = 1$. 任何吸引子 $F$ 至少支撑一个不变测度: 对 $F$ 的吸引域中的点 $x$, $A$ 是一个博雷尔集, 定义

$$\mu(A) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \# \{k : 1 \leqslant k \leqslant m, f^k(x) \in A\} \tag{13.15}$$

$\mu(A)$ 就是 $x$ 经 $f$ 迭代后进入 $A$ 的次数与迭代总次数之比. 在非常普通的条件下, 利用遍历理论可以证明, 这个极限对吸引域中的 $\mu$ 几乎所有点都存在, 并且极限值相等. 显然, 在给定式 (13.14) 下, 如果 $A$ 与 $B$ 不交的, 则 $\mu(A\bigcup B)=\mu(A)+\mu(B)$, 并且 $f^k(x)\in A$ 当且仅当 $f^{k-1}(x)\in f^{-1}(A)$. 测度 (13.15) 浓缩在 $f^k(x)$ 无穷多次任意接近的那些点的集合上, 因此 $\mu$ 的支撑就是 $f$ 的吸引子. 测度 $\mu(A)$ 反映了迭代时位于 $A$ 中的点占总点数的比例, 当大量迭代 $f^k(x)$ 在计算机屏幕上绘出时, 测度 $\mu(A)$ 就可认为是所看到的分布. 这个测度强度可以遍及整个吸引子; 这种变化通常是利用多重分形分析来进行分析的 (见第 17 章). 就吸引子的大小而言, 经常涉及的维数是不变测度 $\mu$ 所占据的集的维数, 而不是完整的吸引子的维数. 记住了这点, 对满足 $\mu(D)=1$ 的测度 $\mu$, 就可以如下定义测度的豪斯多夫维数 $\dim_{\rm H}\mu$:

$$\dim_{\rm H}\mu=\inf\left\{\dim_{\rm H}E:E\ \text{是满足}\ \mu(E)>0\ \text{的博雷尔集}\right\}. \tag{13.16}$$

如果 $F$ 为 $\mu$ 的支撑集, 很显然有 $\dim_{\rm H}\mu\leqslant\dim_{\rm H}F$, 但是可以有严格不等式 (见练习 13.10). 然而, 如果存在 $s>0$ 和 $c>0$, 使得对任意集 $U$, 有不等式

$$\mu(U)\leqslant c|U|^s \tag{13.17}$$

成立, 那么由质量分布原理 4.2 得出: 对任意满足 $\mu(E)>0$ 的集 $E$, 都有 $\mathcal{H}^s(E)\geqslant\mu(E)/c>0$, 所以 $\dim_{\rm H}E\geqslant s$. 因此如果式 (13.17) 成立, 则

$$\dim_{\rm H}\mu\geqslant s. \tag{13.18}$$

一旦 $f$ 与一个不变测度 $\mu$ 联系起来, 就可以定义一些其他的动力系统常数. 为了简单起见, 假设 $D$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个区域, 函数 $f:D\to D$ 是可微的, 微分 $(f^k)'(x)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的线性映射, 记 $a_k(x)$ 和 $b_k(x)$ 分别为椭圆 $(f^k)'(x)(B)$ 的长半轴和短半轴的长度, 这里 $B$ 是单位球. 所以半径等于 $r$, 中心在 $x$ 的小球在 $f^k$ 的作用下的像, 就近似地是长轴为 $ra_k(x)$, 短轴为 $rb_k(x)$ 的椭圆. 定义**李雅普诺夫指数**(Liapounov exponent)为这些半轴随 $k$ 增加时的平均对数速率, 即

$$\lambda_1(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln a_k(x),\qquad \lambda_2(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln b_k(x). \tag{13.19}$$

利用遍历定理的技巧可以证明如果 $\mu$ 对 $f$ 是不变的, 则对 $\mu-$ 几乎所有的 $x$, 这些指数存在并且分别有相同的值 $\lambda_1,\lambda_2$. 因此在带有一个不变测度的系统中, 系统的李雅普诺夫指数就是指 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$; 李雅普诺夫指数表示 $f$ 的 “平均” 扩张速度. 如果 $B$ 是半径为 $r$ 的小圆盘, “典型地” $f^k(B)$ 就接近于半轴长度各为 $r{\rm e}^{\lambda_1 k}$ 和 $r{\rm e}^{\lambda_2 k}$ 的椭圆 (见图 13.17).

一个与动力学有联系的思想就是映射 $f:D\to D$ 的熵, 记

$$V(x,\varepsilon,k)=\{y\in D:\left|f^i(x)-f^i(y)\right|<\varepsilon\ \text{对}\ 0\leqslant i\leqslant k\} \tag{13.20}$$

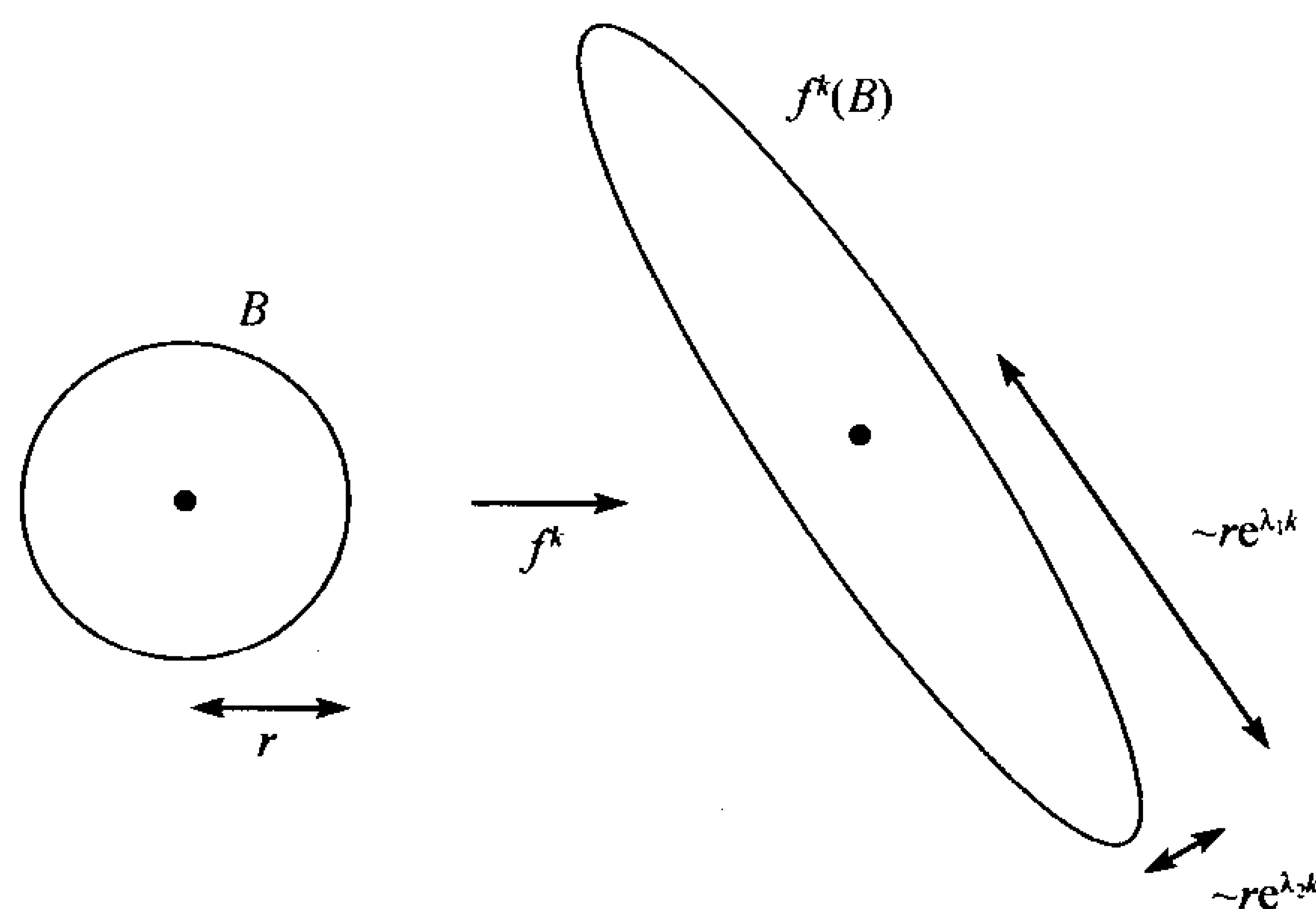



图 13.17 李雅普诺夫指数 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的定义

这里, $V$ 是由那些与 $x$ 的前 $k$ 次迭代距离小于 $\varepsilon$ 的点组成的集合. 如果 $\mu$ 是 $f$ 的不变测度, 则可以由下式定义 $f$ 的 $\mu$ 熵 ($\mu$-entropy):

$$h_\mu(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varliminf_{k \to \infty} \left( -\frac{1}{k} \ln \mu(V(x, \varepsilon, k)) \right). \tag{13.21}$$

在合理的条件下, 对 $\mu$ 几乎所有的 $x$, 这个极限存在并且有相同的值. 熵 $h_\mu(f)$ 反映了在 $f$ 的迭代下, $x$ 的附近点散逸开的速度; 或者说反映了, 从了解轨道上附加的点的位置而获得的关于轨道 $\{f^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 的额外的信息.

面包师映射 (13.4) 为这些思想提供了一个简单的解释 (不连续的直线几乎没有造成什么不同), 在吸引子 $F$ 上存在一个自然的不变的质量分布 $\mu$, 使得 $E_k$ 的 $2^k$ 个窄条的每一个都有质量 $2^{-k}$, 并且这个质量沿 $E$ 的宽度均匀地展开. 正如例 4.3 中那样, 可以得到 $\mu(U) \leqslant c|U|^s$, 这里 $s = 1 + \ln 2/(-\ln \lambda)$, 所以由式 (13.17) 和式 (13.18) 得到

$$s \leqslant \dim_{\mathrm{H}} \mu \leqslant \dim_{\mathrm{H}} F = s$$

李雅普诺夫指数也很容易求得. 式 (13.4) 的导数是 $f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$(如果 $x \neq 1/2$), 所以 $(f^k)'(x,y) = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$(除去点 $x = p/2^k$, 这里 $p$ 和 $k$ 为非负整数). 因此, $a_k(x,y) = 2^k, b_k(x,y) = \lambda^k$. 根据式 (13.19), 对 $\mu$ 几乎所有的 $(x, y)$ 都有 $\lambda_1(x,y) = \ln 2$, $\lambda_2(x,y) = \ln \lambda$; 且这个系统的李雅普诺夫指数为 $\lambda_1 = \ln 2, \lambda_2 = \ln \lambda$.

因为 $f^k$ 是按因子 $2^k$ 在水平方向上拉长, 并且按因子 $\lambda^k$ 在垂直方向上压缩, 利用式 (13.20) 以及忽略 $f$ 的 "切割" 影响, 如果 $(x,y) \in F$, 则 $V((x,y),\varepsilon,k)$ 逼近一个边长为 $2^{-k}\varepsilon$ 和 $\varepsilon$ 的矩形, 并且这个矩形的 $\mu$ 测度逼近 $\varepsilon^s 2^{-k}$. 因此

$$h_\mu(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varliminf_{k \to \infty} \left( -\frac{1}{k} \ln(\varepsilon^s 2^{-k}) \right) = \ln 2.$$

一个给定的动力系统的不变测度的豪斯多夫维数、盒维数、李雅普诺夫指数和李雅普诺夫熵, 可以通过计算机或实验的方法进行估计, 在比较不同的动力系统时, 这些数时常是有用的. 然而, 正是这些量的性质决定了他们之间不可能完全相互独立, 对 2 维曲面上的光滑一一变换 $f$, 严格导出的一个关系, 就是式 (13.22). 如果 $\mu$ 是 $f$ 的不变测度, 且李雅普诺夫指数 $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, 那么

$$\dim_{\mathrm{H}} \mu = h_\mu(f) \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right). \tag{13.22}$$

很容易看到, 对面包师变换的指数计算满足这个公式.

下面猜想出的关系在很多情形下已知是成立的: 如果 $f$ 是一个平面变换, 并且它的吸引子为 $F$, 李雅普诺夫指数为 $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, 那么

$$\dim_{\mathrm{B}} F \leqslant 1 - (\lambda_1/\lambda_2). \tag{13.23}$$

支持这个观点的论证如下: 设 $N_\delta(F)$ 是能够覆盖 $F$ 的半径为 $\delta$ 的最少的圆盘个数, 如果 $\{U_i\}$ 是 $N_\delta(F)$ 个这样的圆盘, 那么 $f^k(F)$ 能被 $N_\delta(F)$ 个集 $f^k(U_i)$ 覆盖, 并且 $f^k(U_i)$ 近似为一个半轴长为 $\delta\exp(\lambda_1 k)$ 和 $\delta\exp(\lambda_2 k)$ 的椭圆. 这些椭圆就可以被大约 $\exp((\lambda_1 - \lambda_2)k)$ 个半径为 $\delta\exp(\lambda_2 k)$ 的圆盘覆盖, 所以

$$N_{\delta\exp(\lambda_2 k)}(F) \leqslant \exp((\lambda_1 - \lambda_2)k) N_\delta(F)$$

故

$$\frac{\ln N_{\delta\exp(\lambda_2 k)}(F)}{-\ln(\delta\exp(\lambda_2 k))} \leqslant \frac{\ln(\exp((\lambda_1 - \lambda_2)k) N_\delta(F))}{-\ln(\delta\exp(\lambda_2 k))} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)k + \ln N_\delta(F)}{-\lambda_2 k - \ln\delta}.$$

令 $k \to \infty$, 得出 $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant 1 - (\lambda_1/\lambda_2)$. 这个论证的缺陷是假定李雅普诺夫指数在区域 $D$ 上是常数, 而事实不一定如此.

上述这些概念与其他的动力参数之间的关系还没有完全弄清楚, 可是它们与 $f$ 的混沌性质和吸引子的分形性质有着密切的内部联系, 这一点是很清楚的.

最近, 多重分形测度的理论已经被引入来分析测度, 如动力系统中的不变测度, 这一点将在第 17 章讨论.

## 13.8 注记和参考文献

动力系统方面的文献数量是巨大的. 大量关于这个课题的讨论可以在下列书中找到: Guckenheimer and Holmes(1993), Schuster(1984), Thompson and Stewart(1986), Devaney(1989), Hale and Kocak(1991), Peitgen, Jürgens 及 Saupe(1992),

Drazin(1992) 以及 Katok and Hasselblatt(1995) 等; 计算机逼近方面则由 Stuart and Humphries(1996) 和 Nusse 和 Yorke(1998) 给出. 由 Gvitanovic(1989), Holden(1986), Bedford and Swift(1988) 以及 Ledrappier, Lewowicz and Newhouse(1996) 论文集中着重于相关方向的种种变化.

关于动力系统更详细的介绍参见 Bedford, Keane and Series(1991), Lind and Marus(1995) 以及 Pesin(1997); 逻辑斯谛映射的研究包含在 May(1976) 以及上面提到的大部分书; 马蹄型吸引子是在 Smale(1967) 的重要论文中引入的; 而 Hénon 吸引子是在 Hénon and Pomeau(1976) 中出现的. Sparrow(1982) 中包含了洛伦兹方程的完整叙述.

小因子理论的主要理论和应用收集在 Mackay and Meiss(1987) 的有关 Hamilton 动力系统的论文集中; 李雅普诺夫指数与维数的关系的结论可参见 Young(1982), Frederickson, Kaplan, Yorke and Yorke(1983), Mayer - Kress(1986), 以及 Temam (1997) 和 Pesin(1997).

## 练　习

**13.1** 找出由 $f(x)=2(1-|2x-1|)$ 给出的 "帐状" 映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的一个分形不变集 $F$. 证明对 $f$ 来说 $F$ 是斥子; 并证明 $f$ 在 $F$ 上是混沌的. $\dim_{\mathrm{H}} F$ 是多少?

**13.2** 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 由下式给出:

$$f(x)=\begin{cases}5x & (x\leqslant 1)\\ 10-5x & (1<x<2)\\ 5x-10 & (x\geqslant 2)\end{cases}$$

确定一个 IFS$S_1,S_2,S_3:[0,5]\to[0,5]$, 使得对每个 $i, f(S_i(x))=x$. 证明这个 IFS 的吸引子 $F$ 是 $f$ 的斥子, 并且求出 $F$ 的豪斯多夫维数和盒维数.

**13.3** 设 $f_\lambda:[0,1]\to\mathbf{R}$ 是由下式定义的函数: $f_\lambda(x)=\lambda\sin\pi x$, 证明当 $\lambda$ 充分大时, 存在正整数 $k$, 使得如果 $x\notin F$, 就有 $f_\lambda^k(x)\notin[0,1]$ 的意义下, $f_\lambda$ 有斥子 $F$; 求出一个以 $F$ 为吸引子的 IFS; 并且对充分大的 $\lambda$, 估计 $\dim_{\mathrm{H}} F$ 的值 (见例 9.8).

**13.4** 对各种不同的值 $\lambda$ 和初始点 $x$ 研究逻辑斯谛映射 (13.2) 在区间 $[0,1]$ 中的迭代 $f_\lambda^k(x)$. 证明如果迭代序列收敛, 那么它或者收敛到 0 或者收敛到 $1-1/\lambda$. 证明如果 $\lambda=1/2$, 那么对区间 (0, 1) 中的所有 $x$, 迭代数列都收敛到 0; 但如果 $\lambda=2$, 那么它们收敛到 1/2. 证明如果 $\lambda=4$, 那么存在区间 (0, 1) 中的无穷多个 $x$ 使得 $f_\lambda^k(x)$ 收敛到 0, 并存在区间 (0, 1) 中无穷多个 $x$ 使得 $f_k^k(x)$ 收敛到 3/4, 也存在区间 (0, 1) 中无穷多个 $x$ 使得 $f_\lambda^k(x)$ 是不收敛的. 利用一个可编程的计算器或计算机研究 $\lambda$ 取其他值时轨道的性质. 用类似的方法研究 13.2 节末尾所列的其他变换.

**13.5** $[0,1]$ 上的逻辑斯谛映射 $f_\lambda$ 的迭代, 当 $\lambda=2$ 和 $\lambda=4$ 时, 可能获得一个简单的公式. 对给定的 $x=x_0$, 我们记 $x_k=f_\lambda^k(x)$.

(i) 证明：如果 $\lambda = 2$, 选择一个 $a$ 使得 $x = (\exp a - 1)/2$, 那么迭代就可以表成 $x_k = (1 - \exp(2^k a))/2$.

(ii) 证明：如果 $\lambda = 4$, 选定 $0 \leqslant a < 1$ 使得 $x = \sin^2(\pi a)$, 那么, $x_k = \sin^2(2^k \pi a)$. 记 $a = 0.a_1a_2\cdots$ 为二进制, 证明对所有正整数 $p$, $f_4$ 有周期为 $p$ 的不稳定轨道并且有稠密的轨道.

**13.6** 考虑修改的面包师变换 $f: E \to E$, 这里 E 是单位正方形, $f(x, y)$ 由下式给出

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x, \lambda y) & (0 \leqslant x \leqslant 1/2) \\ (2x-1, \mu y + 1/2) & (1/2 < x \leqslant 1) \end{cases}$$

这里 $0 < \lambda, \mu < 1/2$, 证明存在一个集 $F$ 吸引 $E$ 中的所有点, 并且求出 $F$ 的豪斯多夫维数.

**13.7** 考虑 $a$=1.4, $b$=0.3 的 Hénon 映射 (13.5), 证明顶点为 (1.32, 0.133), (−1.33, 0.42),(−1.06, −0.5), (1.245, −0.14) 的四边形 $D$ 被 $f$ 映射成它本身. 用计算机绘制出 $D$ 中一个典型点的迭代.

**13.8** 和第 13.4 节记号相同, 考虑由

$$f(\phi, \omega) = \left(3\phi \bmod (2\pi), a\omega + \widehat{\phi}/2\right)$$

给出的实心环面 $D$ 的变换 $f$, 这里 $0 < a < 1/10$. 证明 $f$ 具有豪斯多夫维数和盒维数都为 $1+\ln 3/(-\ln a)$ 的吸引子 $F$, 并证明 $f$ 在 $F$ 上是混沌的.

**13.9** 设 $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是可微的有界函数, $h: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 是由

$$h(t,x) = (\lambda t, \lambda^{2-s}(x - g(t)))$$

给出的映射, 这里 $\lambda > 1, 0 < s < 2$, 证明 $f$ 的图就是 $h$ 的斥子, 这里 $f$ 是函数

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} g(\lambda^k t).$$

所以 Weierstrass 类型 [参见式 (11.7)] 的函数在动力系统中可以作为不变集出现.

**13.10** 给出 [0, 1] 上满足 $\dim_{\mathrm{H}} \mu < \dim_{\mathrm{H}} F$ (这里的 $F$ 是 $\mu$ 的支撑) 的质量分布 $\mu$ 的例子 (提示：考见 10.1 节).

**13.11** 考虑映射 $f: E \to E$, 这里 $E$ 是一个单位正方形, $f$ 是由下式给出

$$f(x,y) = (x + y(\mathrm{mod}\,1)), x + 2y(\mathrm{mod}\,1)$$

(这个映射就是著名 Arnold 的映射 (Arnold's cat map)) 证明平面勒贝格测度对 $f$ 是不变的 (即 $f$ 保持面积不变) 并且求出 $f$ 的李雅普诺夫指数.

**13.12** 编写一个计算机程序, 用来绘制平面上的一个区域的映射在迭代作用下点 $x$ 的轨道, 并且用这个程序研究面包师变换的吸引子, 以及 Hénon 映射和其他一些函数的吸引子.

**13.13** 编写一个计算机程序, 绘出洛伦兹方程 (13.8) 的轨道, 看一下这个轨道如何随 $\delta$, $r$ 和 $b$ 而变化, 对 Rössler 方程也作类似的研究.

# 第 14 章 复变函数的迭代 —— Julia 集

Julia 集提供了一个看起来很简单的过程却能产生很复杂的集合的非常引人注目的例证, 复平面 $\mathbf{C}$ 上像 $f(z)=z^2+c$ 这样的带有常数 $c$ 的简单函数, 却能生成具有奇异形状的分形 (可先参见图 14.7).

Julia 集由复变函数 $f$ 的迭代生成, 所以与上一章讨论的动力系统有联系, 一般地, Julia 集是动力系统的斥子. 然而, 通过对复平面上解析函数 (即当 $z,w\in\mathbf{C}$ 时, $f'(z)=\lim\limits_{w\to 0}(f(z+w)-f(z))/w$ 作为一复数是存在的这种可微函数) 的深入研究, 可以利用复变函数理论中强有力的技巧, 得到关于这个排斥集构造的很多比较详尽的知识.

## 14.1 Julia 集的一般理论

为了叙述方便, 取 $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 为复系数的 $n\geqslant 2$ 阶的多项式 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$. 注意到, 如果 $f$ 是拓广的复平面 $\mathbf{C}\bigcup\{\infty\}$ 上的有理函数 $f(z)=p(z)/q(z)$(这里 $p$, $q$ 都是多项式), 只要稍微修改一下, 一般理论仍然正确; 若 $f$ 为任一亚纯函数 (除去有限个极点外, 在 $\mathbf{C}$ 上是解析的), 一般理论的大部分也仍然是正确的.

按照惯例, 记 $f^k$ 为函数 $f$ 的 $k$ 重复合 $f\circ\cdots\circ f$, 所以 $f^k(w)$ 为 $w$ 的第 $k$ 次迭代 $f(f(\cdots(f(w))\cdots))$.

当 $k$ 较大时, Julia 集是通过 $f^k(z)$ 的迭代形式来定义的：首先, 定义多项式 $f$ 的*充满的* Julia *集* (filled-in Julia set),

$$K(f)=\{z\in\mathbf{C}:f^k(z)\not\to\infty\}.$$

$f$ 的 Julia 集的就是充满的 Julia 集的边界, $J(f)=\partial K(f)$ (当函数很明确时, 用 $K$ 代替 $K(f)$, $J$ 代替 $J(f)$). 如果在 $z$ 的每一个邻域里都存在不同的点 $w$ 和 $v$, 使得 $f^k(w)\to\infty$, 而 $f^k(v)\not\to\infty$, 那么 $z\in J(f)$.

Julia 集的余集称为*Fatou 集* 或者*稳定集* (stable set), 记为 $F(f)$. 本章研究多项式的 Julia 集的几何性质和结构; 特别地, $J$ 通常都是分形.

举一个简单的例子, 设 $f(z)=z^2$, 所以 $f^k(z)=z^{2^k}$. 显然, 当 $k\to\infty$ 时, 如果 $|z|<1$, 则 $f^k(z)\to 0$; 而如果 $|z|>1$, 则 $f^k(z)\to\infty$; 但是对所有的 $k$, 如果 $|z|=1$, 则 $f^k(z)$ 总在单位圆 $|z|=1$ 上. 于是, 充满的 Julia 集 $K$ 是单位圆盘 $|z|\leqslant 1$, Julia

集 $J$ 是单位圆 $|z|=1$, Julia 集 $J$ 是在迭代过程中分别趋于 0 和 $\infty$ 的点集之间的分界. 当然, 在这个特殊的情况下, $J$ 不是分形.

假若稍微修改一下这个例子, 取 $f(z)=z^2+c$, $c$ 为较小的复数, 容易看出, 如果 $z$ 也较小, 则 $f^k(z)\to w$, 这里 $w$ 是 $f$ 的接近于零的不动点; 而如果 $z$ 较大, 则 $f^k(z)\to\infty$. 虽然 Julia 集也是这两类不同表现形式的点集之间的分界, 但现在却显示出 $J$ 是分形曲线 (见图 14.1).

需要用到一些关于 $f$ 的不动点和周期点的术语: 和前面的章节一样, 如果 $f(w)=w$, 就称 $w$ 为 $f$ 的不动点; 如果存在某个大于或等于 1 的整数 $p$, 使得 $f^p(w)=w$, 则称 $w$ 是 $f$ 的周期点; 使 $f^p(w)=w$ 的最小的 $p$ 称为 $w$ 的周期, 称 $w, f(w), \cdots, f^p(w)$ 是周期为 $p$ 的轨道. 设 $w$ 是周期为 $p$ 的周期点, 且 $(f^p)'(w)=\lambda$, 这里一撇表示复变微商. 如果 $0\leqslant|\lambda|<1$, 点 $w$ 称为吸引的, 此时 $w$ 附近的点在 $f$ 的迭代下将被吸引到轨道上; 如果 $|\lambda|>1$, 称 $w$ 为斥性的, 此时轨道附近的点在 $f$ 的迭代下将远离轨道. 研究从不同初始点 $z$ 出发的迭代序列 $f^k(z)$, 就称为复动力学. 和 Julia 集 $J(f)$ 相关的 $z$ 的位置是所研究的这个迭代序列性质的关键.

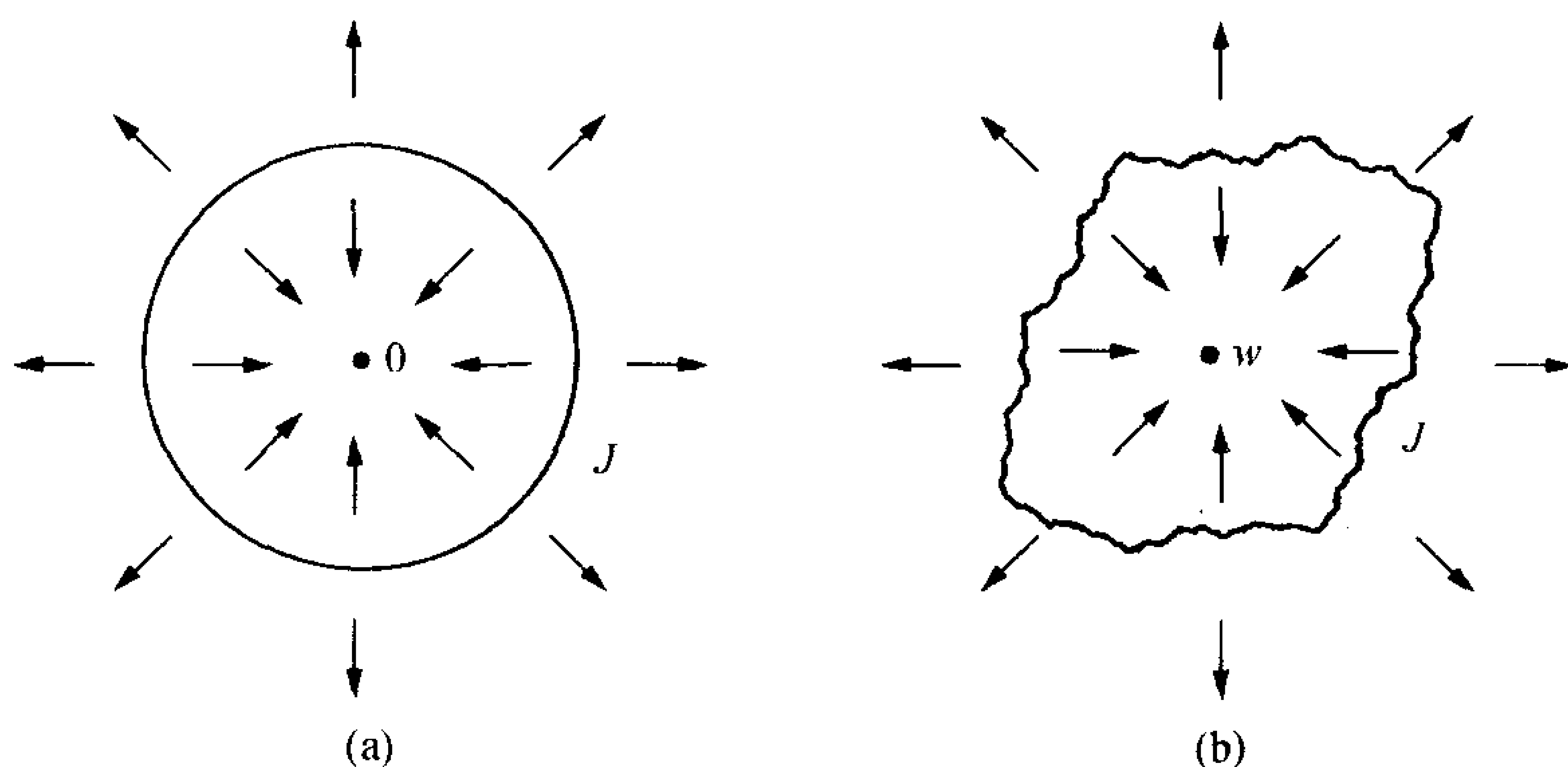



图 14.1 (a) $f(z)=z^2$ 时的 Julia 集为圆 $|z|=1$, 如果 $z$ 在 $J$ 内, 迭代 $f^k(z)\to 0$, 如果 $z$ 在 $J$ 外, $|f^k(z)|\to\infty$. (b) 若对 (a) 中的函数加上一个小摄动 $c$, 得到函数 $f(z)=z^2+c$, 相应的图形就稍微改变, 曲线 $J$ 按两类点分开, 一类点 $z$ 使 $f^k(z)$ 收敛于 $f$ 在 0 附近的不动点 $w$, 另一类 $z$ 使 $|f^k(z)|\to\infty$. 曲线 $J$ 现在是分形

以下的引理在判断一个序列是否在迭代中趋于无穷时非常有用, 即取决于点是否在充满的 Julia 集的外部.

**引理 14.1** 给定多项式, $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0, a_n\neq 0$, 则存在一个数 $r$, 使得如果 $|z|\geqslant r$, 就有 $|f(z)|\geqslant 2|z|$; 特别地, 如果对某些 $m\geqslant 0$, 有 $|f^m(z)|\geqslant r$, 那么当 $k\to\infty$ 时, $f^k(z)\to\infty$. 因此, 或者 $f^k(z)\to\infty$, 或者 $\{f^k(z):k=0,1,2,\cdots\}$ 是有界集.

**证明**　可以选择足够大的 $r$ 使得, 如果 $|z| \geqslant r$, 就有 $\frac{1}{2}|a_n||z|^n \geqslant 2|z|$ 和 $(|a_{n-1}||z^{n-1}| + \cdots + |a_1||z| + |a_0|) \leqslant \frac{1}{2}|a_n||z|^n$. 于是, 如果 $|z| \geqslant r$, 就有

$$|f(z)| \geqslant |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + |a_0|) \geqslant \frac{1}{2}|a_n||z|^n \geqslant 2|z|.$$

进一步, 如果对某些 $m$, $|f^m(z)| \geqslant r$, 那么由归纳法得 $|f^{m+k}(z)| \geqslant 2^m|f^k(z)| \geqslant r$, 所以 $f^k(z) \to \infty$. □

可以很容易得到关于充满的 Julia 集以及 Julia 集构造的一些基本结论.

**命题 14.2**　设 $f(z)$ 是一个多项式, 那么充满的 Julia 集 $K(f)$ 和 Julia 集 $J(f)$ 是非空的并且是紧的, 且有 $J(f) \subset K(f)$, 同时 $J(f)$ 的内部是空的.

**证明**　由引理 14.1 容易得出, 对由其给出的 $r$, $K$ 被包含在圆盘 $B(0,r)$ 中, 因此它是有界的, $J$ 即是它的边界.

如果 $z \notin K$, 那么 $f^k(z) \to \infty$, 因此对某些整数 $m$, $|f^m(z)| > r$. 由 $f^m$ 的连续性, 对以 $z$ 为中心的充分小的圆盘中的所有点 $w$, 有 $|f^m(w)| > r$, 所以由引理 14.1 知, 对这样的 $w$, 一定有 $f^k(w) \to \infty$, 也就是 $w \notin K$. 于是, $K$ 的余集是开的, 所以 $K$ 是闭集; 作为 $K$ 的边界, Julia 集 $J$ 是闭的并且包含在 $K$ 内. 综上可知, $K$ 和 $J$ 是闭的且是有界的, 所以都是紧集.

方程 $f(z) = z$ 至少有一个解, 设这个解是 $z_0$, 则对任意 $k$, $f^k(z_0) = z_0$, 所以 $z_0 \in K$, 即知 $K$ 是非空的. 设 $z_1 \in \mathbf{C} \backslash K$, 则存在满足 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 的 $\lambda$, 使在连接 $z_0$ 和 $z_1$ 的线上的点 $\lambda z_0 + (1-\lambda)z_1$, 也同时落在 $K$ 的边界上; 取 $\lambda$ 为所有满足 $\lambda z_0 + (1-\lambda)z_1 \in K$ 的 $\lambda$ 值的下确界, 则得到的点 $\lambda z_0 + (1-\lambda)z_1$ 也在边界上, 因此, $J = \partial K$ 是非空的.

最后, 如果 $U$ 是 $J \subset K$ 的一个非空开子集, 那么 $U$ 位于的 $K$ 内部, 因此它必和边界 $J$ 有空的交集, 矛盾. □

令人惊奇的是, $f$ 和它的反函数都把 $J(f)$ 映射到自身.

**命题 14.3**　$f$ 的 Julia 集 $J = J(f)$ 在 $f$ 的正变换和逆变换下是全不变的, 即 $J = f(J) = f^{-1}(J)$.

**证明**　设 $z \in J$, 则 $f^k(z) \not\to \infty$, 而且可以找到收敛到 $z$ 的点序列 $w_n$, 满足: 对所有的 $n$, 当 $k \to \infty$ 时, $f^k(w_n) \to \infty$. 因此 $f^k(f(z)) \not\to \infty$, 而 $f^k(f(w_n)) \to \infty$, 这里, 由于 $f$ 的连续性, 可以选择 $f(w_n)$ 任意地接近 $f(z)$, 所以 $f(z) \in J$, 即 $f(J) \subset J$, 这也就意味着 $J \subset f^{-1}(f(J)) \subset f^{-1}(J)$.

类似地, 对上面的 $z$ 和 $w_n$, 如果 $f(z_0) = z$, 那么由 $\mathbf{C}$ 上多项式的映射性质, 可以找到 $v_n \to z_0$, 并使 $f(v_n) = w_n$. 因此, 当 $k \to \infty$ 时, $f^k(z_0) = f^{k-1}(z) \not\to \infty$, $f^k(v_n) = f^{k-1}(w_n) \to \infty$, 所以 $z_0 \in J$; 于是就有 $f^{-1}(J) \subset J$, 这也同样意味着 $J = f(f^{-1}(J)) \subset f(J)$. □

**命题 14.4** 对任意正整数 $p$, $J(f^p) = J(f)$.

**证明** 由引理 14.1, $f^k(z) \to \infty$, 当且仅当 $(f^p)^k(z) = f^{kp}(z) \to \infty$. 因此 $f$ 和 $f^p$ 有同样充满的 Julia 集, 所以它们是相同的 Julia 集. □

为了更深入地研究 Julia 集的理论, 不能不引进复变理论的一些技巧性的工具, 同样也不能回避正规解析函数族的概念和 Montel 定理.

[* 希望略去这些涉及到较深的复变理论技巧的读者, 可以阅读摘要 14.12.]

设 $U$ 是 $\mathbf{C}$ 的开子集, 对 $k = 1, 2, \cdots$, 设 $g_k : U \to \mathbf{C}$ 是一复解析函数族 (即在复变的意义下, 函数在 $U$ 上可微); 称 $\{g_k\}$*在 $U$ 上是正规的*, 如果从 $\{g_k\}$ 中选出的任一函数序列都有子序列在 $U$ 的任意紧子集上一致收敛, 并且或者收敛到有界解析函数, 或者收敛到 $\infty$. 注意到根据普通复变理论这意味着在 $U$ 的每一连通区域上, 子序列或者收敛到有限解析函数或者收敛到 $\infty$; 在这种 (正规) 情形中, 子序列的导数必定收敛于极限函数的导数. 如果存在 $U$ 的某个包含 $w$ 的开子集 $V$, 使得 $\{g_k\}$ 是 $V$ 上的正规族, 则称函数族 $\{g_k\}$ 在 $U$ 中的点 $w$ 上是正规的; 显然这等价于存在 $w$ 的一个邻域 $V$, 使得每一序列 $\{g_k\}$ 都有子列在 $V$ 上收敛于有界解析函数或 $\infty$.

在 Julia 集的研究中将反复用到的一个关键结果就是著名的 Montel 定理, 这个定理断言了非正规函数族实质上可以取到全部的复数值.

**Montel 定理 14.5** *设 $\{g_k\}$ 为开区域 $U$ 上的一族复解析函数, 如果 $\{g_k\}$ 是非正规族, 则对所有的 $w \in \mathbf{C}$(至多存在一个例外值), 存在 $z \in U$ 和 $k$, 使 $g_k(z) = w$.* □

**证明** 参见有关复变函数论的文献.

利用 Montel 定理可以直接得到 Julia 集的以下特征, 由于这个特征有比较广泛的适用性, 并且使对 Julia 集的研究可以运用许多复变量的技巧, 所以在比较前卫的研究著作中, 这个性质经常被用来作为 Julia 集的定义.

**命题 14.6** $J(f) = \{z \in \mathbf{C} : 函数族\ \{f^k\}\ 在\ z\ 是非正规的\}$ (14.1)

**证明** 如果 $z \in J$, 那么在 $z$ 的任意邻域 $V$ 中, 存在点 $w$, 使得 $f^k(w) \to \infty$, 同时 $f^k(z)$ 保持是有界的. 因此 $\{f^k\}$ 中没有一个子序列在 $V$ 上是一致收敛的. 所以 $\{f^k\}$ 在 $z$ 上是非正规的.

假设 $z \notin J$. 那么或者 $z \in \mathrm{int}K$, 在这种情况下, 取满足条件 $z \in V \subset \mathrm{int}K$ 的开集 $V$, 对任意 $w \in V$ 和任意 $k$, 有 $f^k(w) \in K$, 所以由 Montel 定理 14.5 知, $\{f^k\}$ 在 $w$ 上是正规的; 而如果 $z \in \mathbf{C}\backslash K$, 那么对某个 $k$, $|f^k(z)| > r$, 这里的 $r$ 是由引理 14.1 给出的, 所以对任意处于 $z$ 的某个邻域 $V$ 中的 $w$, 都有 $|f^k(w)| > r$, 由引理 14.1, $f^k(w)$ 在 $V$ 上一致趋向于 $\infty$, 故 $\{f^k\}$ 在 $w$ 上也是正规的. □

表达式 (14.1) 经常被用来作为一般复变函数的 Julia 集的定义, 比如有理函数或亚纯函数. 以此为定义, 从 Montel 定理进一步发展的理论可以推广到相当大的一类复变函数上. 然而, 注意到, 如果 $f : \mathbf{C}\bigcup\{\infty\} \to \mathbf{C}\bigcup\{\infty\}$ 是有理函数, 则 $J$ 一定是闭

的, 但不一定是有界的. 事实上, $J$ 可能是整个复平面; 例如, 函数 $f(z)=((z-2)/z)^2$.

现在的一个主要目的, 就是了解作为 $f$ 的斥性周期点的闭包 Julia 集 $J(f)$ 的更多的性质. 进一步发现, Julia 集有一些更为有趣的性质; 例如, 下一个结论将表明, $f$ 在 $J(f)$ 附近是 "混合" 的, 即 $J(f)$ 的点的邻域通过 $f$ 的迭代可以扩展到整个复平面 $\mathbf{C}$.

**引理 14.7** 设 $f$ 是多项式, 并设 $w\in J(f)$,$U$ 是 $w$ 的任意邻域. 则可能除一个点外, 对任意 $j=1,2,\cdots,W\equiv\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}f^k(U)$ 为 $\mathbf{C}$ 的全部. 任何这样的例外点不在 $J(f)$ 中, 且不依赖 $w$ 和 $U$ 的选择.

**证明** 由命题 14.6, 族 $\{f^k\}_{k=j}^{\infty}$ 在 $w$ 是非正规的, 由 Montel 定理 14.5 即知第一个结论成立.

设 $v\notin W$, 如果 $f(z)=v$, 则因 $f(W)\subset W$, 所以 $z\notin W$. 由于 $\mathbf{C}\backslash W$ 至多包含一个点, 因此 $z=v$. 所以 $f$ 是使 $f(z)-v=0$ 有唯一解 $v$ 的 $n$ 阶多项式, 由此知, 存在某个常数 $c$ 满足 $f(z)-v=c(z-v)^n$.

如果 $z$ 充分接近 $v$, 则当 $k\to\infty$ 时, $f^k(z)-v\to 0$, 且是一致收敛的, 比如说在 $\{z:|z-v|<(2c)^{-1/(n-1)}\}$ 上. 于是 $\{f^k\}$ 在 $v$ 是正规的, 所以例外点 $v\notin J(f)$. 显然 $v$ 仅依赖于这个多项式 $f$(事实上, 若 $W$ 略去 $\mathbf{C}$ 上的点 $v$, 则 $J(f)$ 是中心在 $v$, 半径为 $c^{-1/(n-1)}$ 的圆).

下面的推论是用计算机绘制许多 Julia 集的图形的基础 (见 14.3 节).

**推论 14.8** (a) 除了最多一个例外值外, 下面的结论对任意的 $z\in\mathbf{C}$ 都成立: 如果 $U$ 是与 $J(f)$ 相交的开集, 则有无穷多个 $k$, 使 $f^{-k}(z)$ 与 $U$ 相交.

(b) 如果 $z\in J(f)$, 则 $J(f)$ 是 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}f^{-k}(z)$ 的闭包.

**证明** (a) 如果 $z$ 不是引理 14.7 中的例外点, 则 $z\in f^k(U)$, 所以对无穷多个 $k$, $f^{-k}(z)$ 与 $U$ 相交.

(b) 如果 $z\in J(f)$, 则由命题 14.3 知 $f^{-k}(z)\subset J(f)$, 所以 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}f^{-k}(z)$ 及其闭包都包含于闭集 $J(f)$ 内; 另一方面, 如果 $U$ 是包含 $z\in J(f)$ 的开集, 则由 (a) 知, 存在某个 $k$, 使 $f^{-k}(z)$ 与 $U$ 相交; 由引理 14.7, $z$ 不能是例外点, 所以 $z$ 在 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}f^{-k}(z)$ 的闭包内. □

**命题 14.9** $J(f)$ 是完全备集 (即闭的且无孤立点), 因此是不可数的.

**证明** 设 $v\in J(f)$, $U$ 是 $v$ 的邻域. 必须说明 $U$ 包含 $J(f)$ 的其他点. 分别考虑下列三种情形.

(i) $v$ 不是 $f$ 的不动点或周期点. 则推论 14.8(b) 和命题 14.3 保证, 存在某个 $k\geqslant 1$ 使 $U$ 包含 $f^{-k}(v)$ 中的点, 且 $f^{-k}(v)\subset J(f)$, 此点一定与 $v$ 不同.

(ii) $f(v)=v$. 如果 $f(z)=v$ 没有异于 $v$ 的解, 与引理 14.7 的证明类似, $v\notin J(f)$.

于是存在 $w \neq v$ 使 $f(w) = v$, 由推论 14.8(b) 知, 存在某个 $k \geqslant 1$ 使 $U$ 包含使 $f^{-k}(w) = f^{-k-1}(v)$ 中的点 $u$. 因为 $f^k(v) = v \neq w = f^k(u)$, 由逆不变性, 任何这样的点 $u$ 在 $J(f)$ 中且与 $v$ 不同.

(iii) 对于某个 $p > 1$, $f^p(v) = v$. 由命题 14.4, $J(f) = J(f^p)$, 所以应用 (ii) 于 $f^p$, 即可见 $U$ 包含异于 $v$ 的 $J(f) = J(f^p)$ 中的点.

于是 $J(f)$ 没有孤立点, 因为它是闭的, 因此也是完备的. 最后, 每个完备集都是不可数的 (见练习 14.1).

现在可以来证明本节的主要结论, 即 $\{f^k\}$ 的非正规点集 $J(f)$ 与 $f$ 的斥性周期点集的闭包是一致的.

**定理 14.10** *若 $f$ 是多项式, 则 $J(f)$ 就是 $f$ 的斥性周期点集的闭包.*

**证明** 设 $w$ 为 $f$ 的周期为 $p$ 的斥性周期点, 所以 $w$ 是 $g = f^p$ 的斥性不动点. 假如 $\{g^k\}$ 在 $w$ 是正规的, 则 $w$ 有一开邻域 $V$, 使得子序列 $\{g^{k_i}\}$ 在 $V$ 上收敛于有限解析函数 $g_0$ (它不能收敛于 $\infty$, 因为对所有 $k, g^k(w) = w$). 由复分析的一般结论, 如果 $z \in V$, 导数也收敛, 即 $(g^{k_i})'(z) \to g_0'(z)$. 然而, 由于 $w$ 是斥性不动点, 且 $|g'(w)| > 1$, 由导数的链条法则, $|(g^{k_i})'(w)| = |g'(w)^{k_i}| \to \infty$. 这与 $g_0'(w)$ 的有限性矛盾, 因此 $\{g^k\}$ 在 $w$ 不能是正规的, 于是由命题 14.4, $w \in J(g) = J(f^p) = J(f)$. 因为 $J(f)$ 是闭的, 即得 $f$ 的斥性周期点集的闭包在 $J(f)$ 内.

设 $E = \{w \in J(f)$: 存在 $v \neq w$, 使 $f(v) = w$, 且 $f'(v) \neq 0\}$, 设 $w \in E$, 则存在 $w$ 的开邻域 $V$, 在其上能找到一局部解析逆函数 $f^{-1} : V \to \mathbf{C}\backslash V$, 使得 $f^{-1}(w) = v \neq w$(用连续的方法选择 $f^{-1}(z)$ 的值). 在 $V$ 上按下式定义解析函数族 $\{h_k\}$:

$$h_k(z) = \frac{(f^k(z) - z)}{(f^{-1}(z) - z)}.$$

设 $U$ 为 $w$ 的任何满足 $U \subset V$ 的开邻域, 由 $w \in J(f)$ 及 $h_k$ 的定义, 知 $\{f^k\}$ 和 $\{h_k\}$ 在 $U$ 上都是非正规的. 再由 Montel 定理 14.5, 存在 $k$ 及 $z \in U$, 使得 $h_k(z)$ 只取 0 或 1. 在第一种情形, 存在 $z \in U$, 使 $f^k(z) = z$; 而第二种情形 $f^k(z) = f^{-1}(z)$, 因此对某个 $z \in U$, $f^{k+1}(z) = z$. 于是 $U$ 包含 $f$ 的周期点, 所以, 所有 $E$ 中的点 $w$ 都在斥性周期点集的闭包内.

既然 $f$ 是多项式, 则除去有限个点外, $E$ 包含所有 $J(f)$ 的点. 由命题 14.9 知 $J(f)$ 不包含孤立点, 所以 $J(f) \subset \overline{E}$ 是斥性周期点集闭包的一个子集. 由此即得所要证的. □

如果 $w$ 是 $f$ 的吸引不动点, 用

$$A(w) = \left\{z \in \mathbf{C} : f^k(z) \to w, (k \to \infty)\right\} \tag{14.2}$$

表示 $w$ 的吸引域 (basin of attraction), 类似地, 可以定义无穷点的吸引域 $A(\infty)$. 因

$w$ 是吸引的, 所以在 $A(w)$ 内存在包含 $w$ 的开集 $V$(若 $w=\infty$, 取 $r$ 充分大时的集 $\{z:|z|>r\}$). 因为如果对某个 $k$, $f^k(z)\in V$, 则 $z$ 属于也是开集的 $f^{-1}(V)$, 因此推出 $A(w)$ 也是开的. $J$ 作为任何吸引域的边界, 它的下面这个特征在确定 Julia 集中非常有用. 回忆一下, 记号 $\partial A$ 表示 $A$ 的边界.

**引理 14.11**　设 $w$ 是 $f$ 的吸引不动点, 则 $\partial A(w)=J(f)$, 若 $w=\infty$, 结论同样正确.

**证明**　若 $z\in J(f)$, 则对所有的 $k$, $f^k(z)\in J(f)$, 所以它不能收敛于吸引不动点, 故 $z\notin A(w)$. 然而, 如果 $U$ 为 $z$ 的任意邻域, 由引理 14.7, 存在某个 $k$, 使得集 $f^k(U)$ 包含 $A(w)$ 中的点, 因此, 存在任意接近 $z$ 的点迭代趋于 $w$. 于是 $z\in\overline{A(w)}$, 所以 $z\in\partial A(w)$.

假设 $z\in\partial A(w)$, 但 $z\notin J(f)$, 则 $z$ 有连通开邻域 $V$, 在其上 $\{f^k\}$ 有子序列收敛到解析函数或收敛到 $\infty$. 这个子序列在非空开集 $V\bigcap A(w)$ 上收敛于 $w$, 因为如果解析函数在任一开子集上为常数, 则它在一连通集上也为常数, 所以这个子序列在 $V$ 上也收敛于 $w$. 通过 $f$ 的迭代, $V$ 的所有点都映射到 $A(w)$ 内, 所以 $V\subset A(w)$, 这与 $z\in\partial A(w)$ 矛盾. □

作为这个引理的例子, 回顾 $f(z)=z^2$ 的情形: 它的 Julia 集是单位圆, 也即 $A(0)$ 和 $A(\infty)$ 的边界.

下面将本节的主要结论集中在一起.

**摘要 14.12**　多项式 $f$ 的 Julia 集 $J(f)$ 是使 $f^k(z)\to\infty$ 的点 $z\in\mathbf{C}$ 组成的集合的边界, 它是一个不包含孤立点的不可数的非空紧集, 同时它在 $f$ 与 $f^{-1}$ 下都是不变的, 并且对任意正整数 $p$, $J(f)=J(f^p)$. 如果 $z\in J(f)$, 则 $J(f)$ 是 $\bigcup_{k=1}^{\infty}f^{-k}(z)$ 的闭包. Julia 集是 $f$ 的包括无穷远点在内的每一吸引不动点的吸引域的边界, 而且是 $f$ 的斥性周期点集的闭包.

**证明**　只要将本节的证明汇聚在一起即得. □

在 Julia 集上可以发现 $f$ 的许多动力学性质, 能够证明 "$f$ 在 $J$ 上是混沌的"(见第 13 章). 由定义, $f$ 的周期点在 $J$ 内稠, 另一方面, $J$ 包含的点 $z$ 及其相应的迭代 $f^k(z)$ 在 $J$ 内稠. 更进一步, $f$ 在 $J$ 上对 "初始条件有敏感的依赖关系", 因此, 无论同时属于 $J$ 的 $z$, $w$ 如何接近, 对于某个 $k$, $\left|f^k(z)-f^k(w)\right|$ 将很大, 这使得迭代的精确计算成为不可能.

## 14.2　二次函数 ——Mandelbrot 集

现在只考虑 $\mathbf{C}$ 上二次函数的情形, 研究具有形式

$$f_c(z)=z^2+c \tag{14.3}$$

的多项式的 Julia 集. 这里没有它第一次出现时的限制, 因为如果 $h(z) = \alpha z + \beta (\alpha \neq 0)$, 则

$$h^{-1}(f_c(h(z))) = \left(\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta\right)/\alpha.$$

通过适当地选取 $\alpha, \beta, c$ 的值, 可以使表达式变成所期望的任意二次函数 $f$. 于是 $h^{-1} \circ f_c \circ h = f$, 所以对任意 $k, h^{-1} \circ f_c^k \circ h = f^k$, 这意味着在 $f$ 下, 点 $z$ 的迭代序列 $\{f^k(z)\}$ 是在 $f_c$ 下, 点 $h(z)$ 的迭代序列 $\{f_c^k(h(z))\}$ 在 $h^{-1}$ 下的像. 映射 $h$ 将 $f$ 的动态图变换为 $f_c$ 的动态图. 特别, $f^k(z) \to \infty$ 当且仅当 $f_c^k(z) \to \infty$; 所以, $f$ 的 Julia 集是 $f_c$ 的 Julia 集在 $h^{-1}$ 下的像.

变换 $h$ 称为 $f$ 与 $f_c$ 之间的**共轭**(conjugacy), 每个二次函数与一个带有某个 $c$ 的 $f_c$ 共轭, 所以通过研究 $c \in \mathbf{C}$ 的 $f_c$ 的 Julia 集, 能很有效地研究所有二次多项式的 Julia 集. 因为 $h$ 为相似变换, 所以任何二次多项式的 Julia 集几何相似于带有某个 $c \in \mathbf{C}$ 的 $f_c$ 的 Julia 集.

在本节中要牢记, 除了 $z = c$ 时 $f_c^{-1}(z)$ 取两个不同值 $\pm(z-c)^{1/2}$, 称它们为 $f_c^{-1}(z)$ 的两个**分枝**(branch). 所以如果 $U$ 是使 $c \notin U$ 的小开集, 则逆像 $f_c^{-1}(U)$ 有两部分, 它们都是由 $f_c$ 一一光滑地映射到 $U$ 上的.

定义**Mandelbrot 集** (Mandelbrot set)$M$ 为使 $f_c$ 的 Julia 集是连通的参数 $c$ 组成的集:

$$M = \left\{c \in \mathbf{C} : J(f_c) \text{ 是连通的}\right\}. \tag{14.4}$$

首先, $M$ 看起来与 $J(f_c)$ 的一个相当特殊的性质有关, 事实上, 如在下面即将看到的, $M$ 包含了关于 Julia 集构造的大量信息.

定义式 (14.4) 不适合计算的目的, 可以导出一个等价定义, 它在确定参数 $c$ 是否在 $M$ 中, 以及在研究 $M$ 的非常复杂的结构中十分有用 (见图 14.2). 下面将证明 $c \in M$ 当且仅当 $f_c^k(0) \not\to \infty$.

为此, 首先需要了解一些变换 $f_c$ 在光滑曲线上的作用. 为简单起见, 称复平面中的一条光滑的 (即可微的)、闭合的、简单 (即不自交) 的曲线为一个**回路**(loop); 分别称平面 $\mathbf{C}$ 上位于这曲线之内和之外的部分为回路的**内部**(interior) 和**外部**(exterior); 8 字形是自交于一个单点的光滑闭合曲线.

**引理 14.13** *设 $C$ 为复平面上的回路.*

(a) *如果 $c$ 位于 $C$ 内, 则 $f_c^{-1}(C)$ 是以 $C$ 的内部的逆像为它的内部的回路.*

(b) *若 $c$ 在 $C$ 上, 则 $f_c^{-1}(C)$ 为一 8 字形图, 使得 $C$ 内部的逆像为两个回路的内部.*

(c) *若 $c$ 在 $C$ 外, 则 $f_c^{-1}(C)$ 有两个不交的回路, 使得 $C$ 内部的逆像为两个回路的内部.*

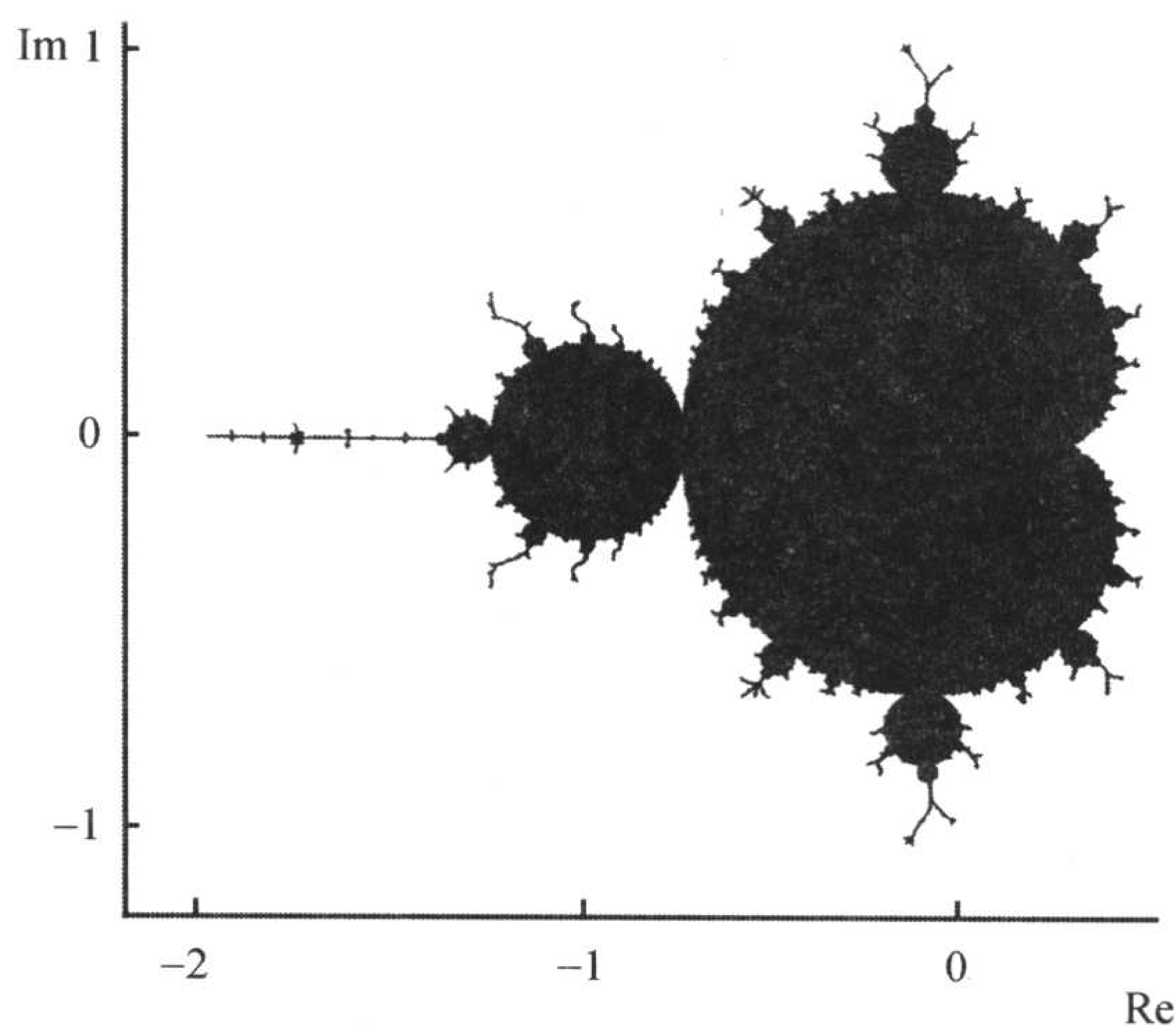



图 14.2　复平面上的 Mandelbrot 集 $M$

**证明**　注意到 $f_c^{-1}(z) = \pm(z-c)^{1/2}$, 且 $\left(f_c^{-1}\right)'(z) = \pm\frac{1}{2}(z-c)^{-1/2}$, 若 $z \neq c, \left(f_c^{-1}\right)'(z)$ 是非零的有限数. 所以如果选择 $f_c^{-1}$ 的两个分枝之一, 当 $c \notin C$, 则集 $f_c^{-1}(C)$ 为局部光滑曲线.

(a) 假设 $c$ 位于 $C$ 内, 在 $C$ 上选一初始点 $w$, 选择 $f_c^{-1}(w)$ 的两个值之一. 随着 $z$ 环绕 $C$ 移动时, $f_c^{-1}(z)$ 连续变化, 使得点 $f_c^{-1}(z)$ 划出一条光滑曲线. 然而, 当 $z$ 返回 $w$ 时, $f_c^{-1}(w)$ 取它的第二个值; 当 $z$ 再次绕过 $C$, $f_c^{-1}(z)$ 继续划出一条光滑路径, 且当 $z$ 第二次返回 $w$ 时, 光滑曲线就闭合了. 因为 $c \notin C$, 所以就有 $0 \notin f_c^{-1}(C)$, 因此在 $f_c^{-1}(C)$ 上 $f_c'(z) \neq 0$. 于是 $f_c$ 是在 $f_c^{-1}(C)$ 上点的邻域内的局部光滑的一一变换. 特别地, $z \in f_c^{-1}(z)$ 不能是 $f_c^{-1}(C)$ 的自交点, 否则 $f_c(z)$ 就是 $C$ 的自交点, 因此 $f^{-1}(C)$ 是一个回路.

因为 $f_c$ 是连续函数, 它只将回路 $f_c^{-1}(C)$ 映射到回路 $C$ 上, 而不会将其他点映射到回路 $C$ 上, 所以多项式 $f_c$ 一定将 $f_c^{-1}(C)$ 的内部与外部分别映射到 $C$ 的内部与外部, 因此 $f_c^{-1}$ 把 $C$ 的内部映射到 $f_c^{-1}(C)$ 的内部.

(b) 可以类似于 (a) 进行证明, 注意到如果 $C_0$ 是通过 $c$ 的曲线的某个光滑段, 则 $f_c^{-1}(C_0)$ 包含通过 0 且相互垂直的两个光滑曲线段, 即如 8 字形图那样自交.

(c) 类似于 (a) 的证明, 这时, 当 $z$ 环绕 $C$ 移动时, $f_c^{-1}(z)$ 只能选取两个值中的一个, 所以得到两个回路. □

现在可以证明 "Mandelbort 集的基本定理", 这是通过 $f_c$ 的迭代形式给出的 Mandelbort 集的另一特征.

**定理 14.14**　$M = \left\{c \in \mathbf{C} : \left\{f_c^k(0)\right\}_{k \geqslant 1} \text{是有界的}\right\}$　(14.5)

$$= \{c \in \mathbf{C} : f_c^k(0) \not\to \infty (k \to \infty)\} \tag{14.6}$$

**证明** 由引理 14.1, 显然 $f_c^k(0) \not\to \infty$ 当且仅当 $\{f_c^k(0)\}$ 有界, 所以式 (14.5) 与式 (14.6) 等价.

(a) 首先证明, 如果 $\{f_c^k(0)\}$ 有界, 则 $J(f_c)$ 是连通的: 设 $C$ 是 $\mathbf{C}$ 中充分大的圆, 使得所有 $\{f_c^k(0)\}$ 的点都位于 $C$ 内, 而使 $f_c^{-1}(C)$ 在 $C$ 的内部, 并使 $C$ 外部的点在 $f_c^k$ 的迭代下趋于 $\infty$. 因为 $c = f_c(0)$ 是在 $C$ 的内部, 由引理 14.13(a) 知 $f_c^{-1}(C)$ 是包含于 $C$ 内部的一个回路; 同时 $f_c(c) = f_c^2(0)$ 也在 $C$ 内, 且 $f_c^{-1}$ 将 $C$ 的外部映射到 $f_c^{-1}(C)$ 的外部, 所以 $c$ 在 $f_c^{-1}(C)$ 内. 再一次应用引理 14.13(a), 也知 $f_c^{-2}(C)$ 是包含于 $f_c^{-1}(C)$ 内部的一条回路. 如此继续进行下去, 可见 $\{f_c^{-k}(C)\}$ 是一序列回路, 每一回路的内部都包含下一个回路 (见图 14.3(a)). 设 $K$ 表示对所有 $k$, 在回路 $f_c^{-k}(C)$ 上或内部的点的闭集, 如果 $z \in \mathbf{C}\backslash K$, 则有某个迭代 $f_c^k(z)$ 落在 $C$ 外, 因此 $f_c^k(z) \to \infty$. 所以

$$A(\infty) = \left\{z : f_c^k(z) \to \infty \text{当 } k \to \infty\right\} = \mathbf{C}\backslash K$$

即集 $K$ 是 $f_c$ 的充满的 Julia 集. 由引理 14.11, $J(f_c)$ 为的 $\mathbf{C}\backslash K$ 边界, 当然, 也是 $K$ 的边界. 但 $K$ 为一递减的闭的简单连通集 (即连通的且有连通余集的集) 序列的交, 所以由基本的拓扑结论, $K$ 为简单的连通集, 因此有连通边界, 即 $J(f_c)$ 是连通的.

(b) 当 $\{f_c^k(0)\}$ 无界, 可以完全类似地证明 $J(f_c)$ 是非连通的. 设 $C$ 为充分大的圆, 使得 $f_c^{-1}(C)$ 在 $C$ 内部, 并且将 $C$ 外部的任意点都迭代趋于 $\infty$, 同时还存在满足 $f_c^{p-1}(c) = f_c^p(0) \in C$ 的正整数 $p$, 并且还可以根据 $k$ 值是小于或大于 $p$, 来决定 $f_c^k(0)$ 是在 $C$ 内或者在 $C$ 外. 像在证明前面的第一部分一样, 可以构造一系列回路 $\{f_c^{-k}(C)\}$, 每一个回路的内部包含下一个回路 (见图 14.3(b)), 然而, 当得到 $f_c^{1-p}(C)$ 时, 类似第一部分的论证必须停止, 因为此时 $c \in f_c^{1-p}(C)$, 引理 14.13(a) 已不能用了. 但由引理 14.13(b), 得到 $E \equiv f^{-p}(C)$ 是回路 $f_c^{1-p}(C)$ 内部的 8 字形图, $f_c$ 把 $E$ 的每半部的内部映射到 $f_c^{1-p}(C)$ 的内部. 由于其他点迭代趋于无穷, Julia 集 $J(f_c)$ 一定在 $E$ 的回路的内部; 又由于 $J(f_c)$ 在 $f_c^{-1}$ 下是不变的, 所以它的每一部分必包含于 $E$ 的每一回路内, 于是, 这个 8 字形图 $E$ 断开了 $J(f_c)$. 事实上, 如果此时同样应用引理 14.13(c), 很容易发现 $J(f_c)$ 是全不连通的. □

在式 (14.5) 与式 (14.6) 中, 考虑原点迭代的理由是对每个 $c$, 原点是 $f_c$ 的临界点(critical point), 即满足 $f_c'(z) = 0$ 的点. 临界点是使 $f_c$ 不成为局部一一映射的点 —— 这是定理 14.14 证明中区分两种不同情形的关键性质, 也是分析任意多项式函数或亚纯函数的动力学性状的关键所在.

由式 (14.5) 提供的集合 $M$ 的等价定义是 Mandelbrot 集的计算机绘图的基础. 选取数 $r > 2$ 和 $k_0$, 比如都取 100 以上. 对每一个 $c$, 连续计算 $\{f_c^k(0)\}$ 序列的各项,

如果在 $k = k_0$ 之前 $\left|f_c^k(0)\right| \geqslant r$, 此时, 就认为 $c$ 在 $M$ 外, 否则就取 $c \in M$; 对一个区域的每个 $c$ 值都重复这个过程, 以保证 M 的图像能被画出. 根据使 $\left|f_c^k(0)\right| \geqslant r$ 的第一个整数 $k$ 的不同值, 区分出 $M$ 的余集的不同区域, 而设计并涂上不同的颜色.

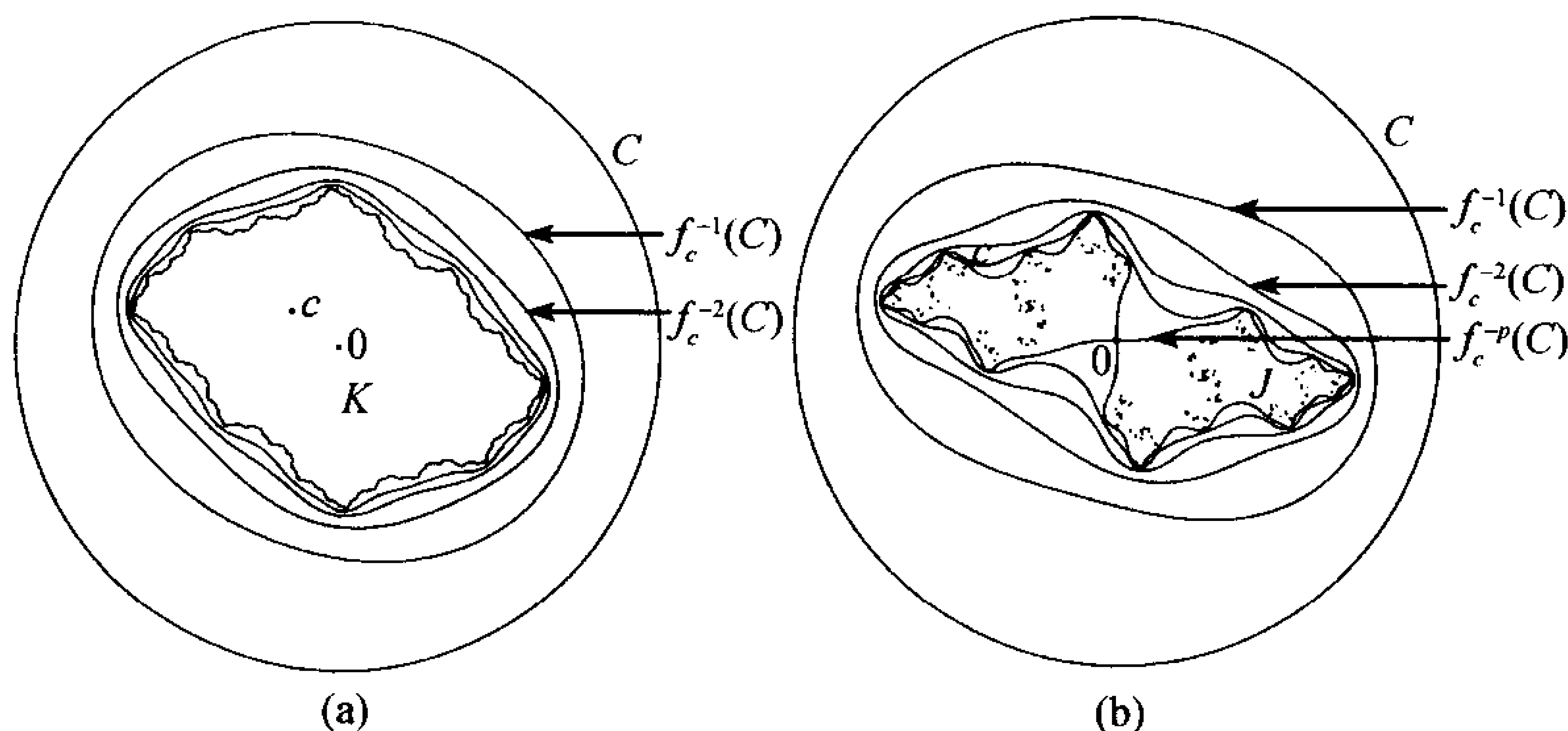



图 14.3　在 $f_c$ 下圆 $C$ 的迭代说明了定理 14.14 证明的两个部分：(a) $c = -0.3 + 0.3\mathrm{i}$; (b) $c = -0.9 + 0.5\mathrm{i}$

Mandelbrot 集的图 (见图 14.2) 表明它有非常复杂的结构. 它有某些明显的特征：一个主要的心形图与一系列圆盘形的 “芽苞” 突起连结在一起. 每个芽苞又被更小的芽苞所环绕, 小芽苞又有更小的芽苞 $\cdots\cdots$. 然而, 这并不是全部, 还有精细的 “发状” 分枝从芽苞向外长出, 这些细发在每一段上都带有与整个 Mandelbrot 集相似的微型样本. 然而精确的图形说明 $M$ 是一个连通集, 它的边界的豪斯多夫维数等于 2.

## 14.3　二次函数的 Julia 集

在本节中, 我们将看到随着参数 $c$ 在复平面上变化, Julia 集 $J(f_c)$ 的构造发生了一些什么变化. 特别地, Mandelbrot 集的各个不同部分的意义也将变得更明显.

$f_c$ 的吸引周期点是 $J(f_c)$ 结构的关键, 可以证明 (见练习 14.17), 如果 $w \neq \infty$ 是多项式 $f$ 的吸引周期点, 则存在临界点 (满足 $f'(z) = 0$ 的点)$z$, 使得 $f^k(z)$ 被吸引到包含 $w$ 的周期轨道上. 因为 $f_c$ 的唯一临界点为 0, 所以 $f_c$ 至多有一个吸引周期轨道. 而且如果 $c \notin M$, 则由定理 14.14, $f_c^k(0) \to \infty$, 所以 $f_c$ 不能有吸引周期轨道. 可以猜想使得 $f_c$ 有吸引周期轨道的 $c$ 的集充满 $M$ 的内部, 但这还没有被证明.

自然地可以根据 (有限) 吸引轨道的周期 $p$ 对 $f_c$ 进行分类, 如果这种轨道存在的话, 相应于不同 $p$ 的 $c$ 值应当对应于 Mandelbrot 集 $M$ 的不同区域.

首先假设 $c$ 在 $M$ 外，所以 $f_c$ 没有吸引周期点. 由定义，$J(f_c)$ 是不连通的. 事实上，$J(f_c)$ 一定是全不连通的，而且可以表示为不交并 $J = S_1(J)\bigcup S_2(J)$，这里 $S_1$ 和 $S_2$ 是 $f_c^{-1}$ 在 $J$ 上的两个分枝. 这意味着 $J$ 是 IFS$\{S_1, S_2\}$ 的吸引子，见式 (9.2). 基本上，这可以从定理 14.14 证明的第二部分推出，已得到 $f_c$ 将 8 字图形 E 的每个回路的内部映射到包含 $E$ 的区域 $D$ 上. 映射 $S_1$ 及 $S_2$ 可以取成是 $f_c^{-1}$ 在每一回路内部上的限制. 因为 $S_1(J)$ 及 $S_2(J)$ 为 $E$ 的两部分的内部，且互不相交，所以 $J$ 一定是全不连通的，见式 (9.7) 后的注记.

当 $c$ 充分大时，可以对此情形做更详细的研究，以便能进一步做一些简化.

**定理 14.15** 设 $|c| > \frac{1}{4}(5+2\sqrt{6}) = 2.475\cdots$，则 $J(f_c)$ 是全不连通的，而且对 $J$ 附近的 $z$，$J(f_c)$ 是由 $f_c^{-1}(z) = \pm(z-c)^{1/2}$ 的两个分枝定义的两个压缩变换的吸引子 (在式 (9.2) 的意义下). 当 $|c|$ 充分大时，有

$$\dim_{\mathrm{B}} J(f_c) = \dim_{\mathrm{H}} J(f_c) \simeq 2\ln 2/\ln 4|c|.$$

**证明** 设 $C$ 为圆 $|z| = |c|$，而 $D$ 是圆的内部 $|z| < |c|$，则

$$f_c^{-1}(C) = \left\{(c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - c)^{1/2} : 0 \leqslant \theta \leqslant 4\pi\right\},$$

这是自交点在 0 点的 8 字形图，两个回路各在通过原点的直线的两边 (参见引理 14.13 和图 14.4). 因为 $|c| > 2$，所以有 $f_c^{-1}(C) \subset D$；如果 $|z| > |c|$，那么 $|f_c(z)| \geqslant |z^2| - |c| \geqslant |c|^2 - |c| > |c|$. $f_c^{-1}(C)$ 的每个回路的内部由 $f_c$ 以双射的方式映射到 $D$ 上，如果定义 $S_1$，$S_2$：$D \to D$ 为 $f_c^{-1}(z)$ 在每一回路内的分枝，则 $S_1(D)$ 和 $S_2(D)$ 是两个回路的内部.

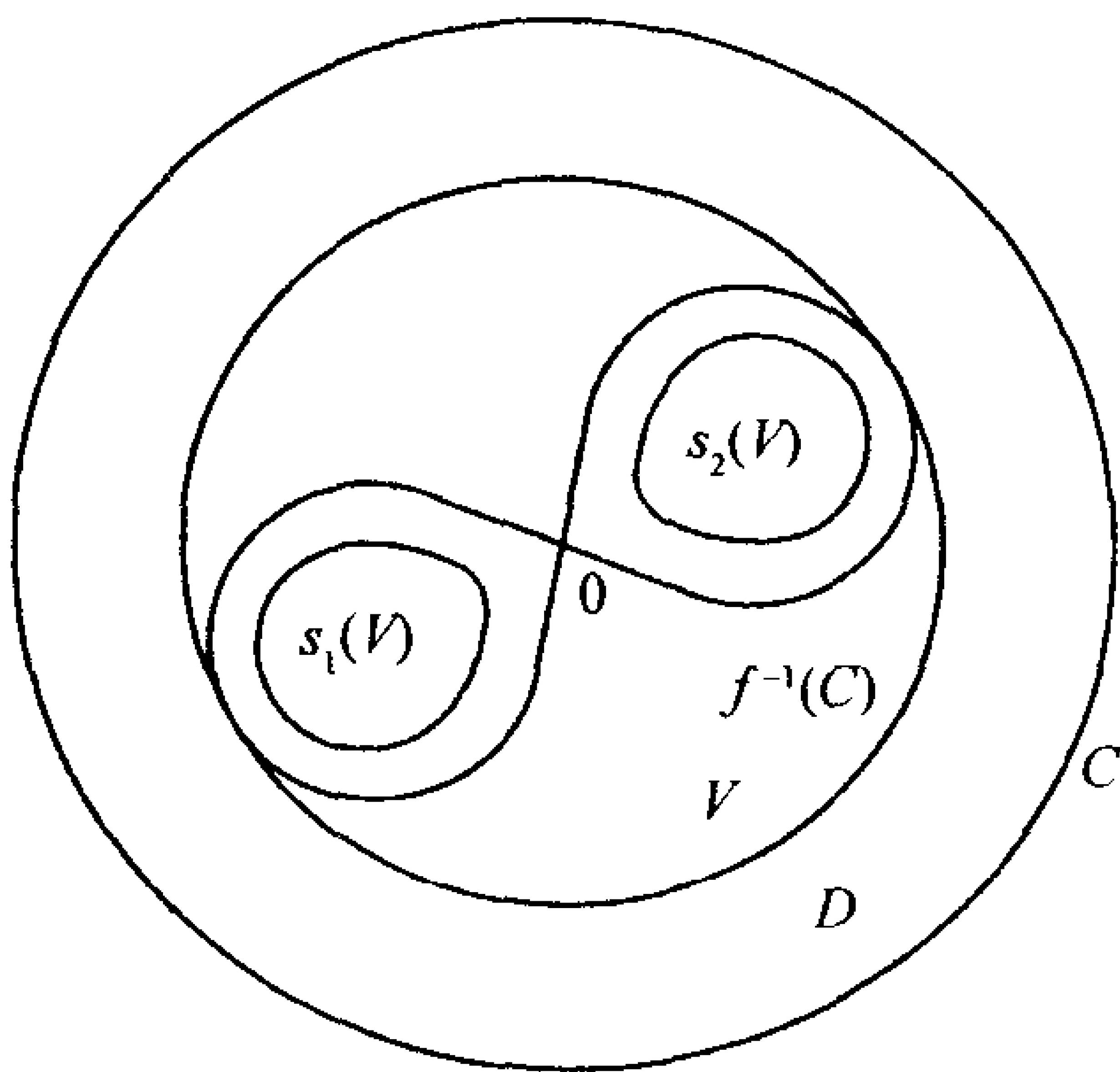



图 14.4 定理 14.15 的证明

设 $V$ 是圆盘 $\left\{z:|Z|<|2c|^{1/2}\right\}$, 选择 $V$ 的半径使得 $V$ 正好包含 $f_c^{-1}(C)$, 所以 $S_1(D)$, $S_2(D)\subset V\subset D$. 因此 $S_1(V)$, $S_2(V)\subset V$ 且 $S_1(\overline{V})$ 与 $S_2(\overline{V})$ 不交; 则对 $i=1,2$ 有

$$|S_i(z_1)-S_i(z_2)|=|(z_1-c)^{1/2}-(z_2-c)^{1/2}|=\frac{|z_1-z_2|}{|(z_1-c)^{1/2}+(z_2-c)^{1/2}|}.$$

因此, 如果 $z_1,z_2\in\overline{V}$, 取最大和最小值, 则有

$$\frac{1}{2}\left(|c|+|2c|^{1/2}\right)^{-1/2}\leqslant\frac{|S_i(z_1)-S_i(z_2)|}{|z_1-z_2|}\leqslant\frac{1}{2}\left(|c|-|2c|^{1/2}\right)^{-1/2}. \tag{14.7}$$

如果 $|c|>\frac{1}{4}(5+2\sqrt{6})$, 则上界小于 1; 此时 $S_1$ 及 $S_2$ 在圆盘 $\overline{V}$ 上是压缩的. 由定理 9.1, 存在唯一非空紧的吸引子 $F\subset\overline{V}$, 满足

$$S_1(F)\bigcup S_2(F)=F. \tag{14.8}$$

因 $S_1(\overline{V})$ 与 $S_2(\overline{V})$ 不交, 所以 $S_1(F)$ 与 $S_2(F)$ 也不交, 即知 $F$ 是全不连通的.

当然, $F$ 即为 Julia 集 $J=J(f_c)$. 说明这点的方法之一就是, 因为 $\overline{V}$ 至少包含 $J$ 的一个点 $z$(例如, $f_c$ 的斥性不动点), 因为 $f_c^{-k}(\overline{V})\subset\overline{V}$, 所以有 $J=(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}f_c^{-k}(z))$ 的闭包 $\subset\overline{V}$. 应用摘要 14.12 的进一步结果, 知 $J$ 为 $\overline{V}$ 的满足 $J{=}f_c^{-1}(J)$ 的非空紧子集, 或者等价地, $J{=}S_1(J)\bigcup S_2(J)$. 于是 $J=F$ 是满足式 (14.8) 的唯一非空紧集.

最后, 估计 $J(f_c)=F$ 的维数, 应用命题 9.6 和命题 9.7 以及式 (14.7), $\dim_{\mathrm{H}}J(f_c)$ 的下界及上界分别可由方程 $2\left(\frac{1}{2}(|c|\pm|2c|^{1/2})^{-1/2}\right)^s=1$ 的解给出, 即由 $s=2\ln 2/\ln 4(|c|\pm|2c|^{1/2})$ 给出了所指出的渐进估计. □

下面转而研究 $c$ 较小的情形. 我们知道如果 $c{=}0$, 则 $J(f_c)$ 为单位圆; 如果 $c$ 较小, $z$ 也充分小, 则当 $k\to\infty$, $f_c^k(z)\to w$, 这里 $w$ 是接近于 0 的吸引不动点 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4c})$. 另一方面, 若 $z$ 较大, 则 $f_c^k(z)\to\infty$. 有理由希望当 $c$ 移动离开 0 时圆 "变形" 为简单闭曲线 (即没有自交点), 这个闭曲线把这两种类型的点分离开了.

事实上, 这就是 $f_c$ 保持有一个吸引不动点的情形, 即在方程 $f_c(z)=z$ 的一个根上满足 $|f_c'(z)|<1$ 的情形. 简单的代数方法可以证明：如果 $c$ 落在心形线 $z=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 内, 就有这种情形发生; 而这个心形线正是 Mandelbrot 集的主心形线 (参见练习 14.15).

为了方便, 这里处理 $|c|<\frac{1}{4}$ 的情形, 但是如果 $f_c$ 有任何吸引不动点, 证明也是容易修改的.

**定理 14.16**　若 $|c|<1/4$, 则 $J(f_c)$ 为简单闭曲线.

**证明** 设 $C_0$ 为曲线 $|z|=1/2$, 它同时包围了 $c$ 和 $f_c$ 的吸引不动点 $w$. 由直接计算知逆映像 $f_c^{-1}(C_0)$ 为环绕 $C_0$ 的回路 $C_1$, 把从 $C_0$ 出发并垂直到达 $C_1$ 的曲线称为 "轨线"(trajectory), 可以用该曲线构成的连续体将 $C_0$ 与 $C_1$ 之间的环绕区域 $A_1$ 充满 (见图 14.5(a)). 对每个 $\theta$, 设 $\psi_1(\theta)$ 是从 $C_0$ 上的点 $\psi_0(\theta)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 出发的轨线在 $C_1$ 上的端点. 逆像 $f_c^{-1}(A_1)$ 为具有外边界回路 $C_2=f_c^{-1}(C_1)$ 和内边界 $C_1$ 的环形区域 $A_2$, $f_c$ 以二对一的方式将 $A_2$ 映射到 $A_1$ 上. 连接 $C_0$ 与 $C_1$ 的轨线的逆映像给出了一族连接 $C_1$ 与 $C_2$ 的轨线, 设 $\psi_2(\theta)$ 是从 $C_1$ 上的 $\psi_1(\theta)$ 出发的轨线在 $C_2$ 上的端点, 用同样的方式继续下去, 可以得到一个回路序列 $C_k$, 这个序列的后一个回路环绕前一个回路; 同时也得到一个轨线族, 对每个 $k$, 这些轨线把 $C_k$ 上点 $\psi_k(\theta)$ 与 $C_{k+1}$ 上点 $\psi_{k+1}(\theta)$ 连接起来.

当 $k\to\infty$, 曲线 $C_k$ 逼近 $w$ 的吸引域的边界; 由引理 14.11, 这个边界正是 Julia 集 $J(f_c)$. 因为存在 $\gamma>1$, 使在 $C_1$ 外有 $|f_c'(z)|>\gamma$, 因此 $f_c^{-1}$ 在 $J$ 附近是压缩映射. 所以连接 $\psi_k(\theta)$ 与 $\psi_{k+1}(\theta)$ 的轨线的长度当 $k\to\infty$ 时, 以几何速度收敛于 0. 因此当 $k\to\infty$ 时, $\psi_k(\theta)$ 一致收敛到连续函数 $\psi(\theta)$, 而 $J$ 就是由 $\psi(\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 给出的闭曲线.

剩下的是要证明 $\psi$ 描述的是简单曲线, 假如 $\psi(\theta_1)=\psi(\theta_2)$, 则记由这一点分别连接 $\psi_0(\theta_1)$ 与 $\psi_0(\theta_2)$ 的两条轨线和 $C_0$ 围成的区域为 $D, D$ 的边界在 $f_c$ 的迭代下仍然是有界的, 所以由最大模定理 (一个解析函数的模在一个区域的边界点上取得最大值), $D$ 在 $f$ 的迭代下仍然有界. 因此 $D$ 是充满的 Julia 集的一个子集, 且 $D$ 的内部不能包含 $J$ 的任何点. 于是图 14.5(b) 的情形不可能发生, 所以对在 $\theta_1$ 与 $\theta_2$ 之间的所有 $\theta$ 有 $\psi(\theta)=\psi(\theta_1)=\psi(\theta_2)$, 由此推出 $\psi(\theta)$ 没有自交点. □

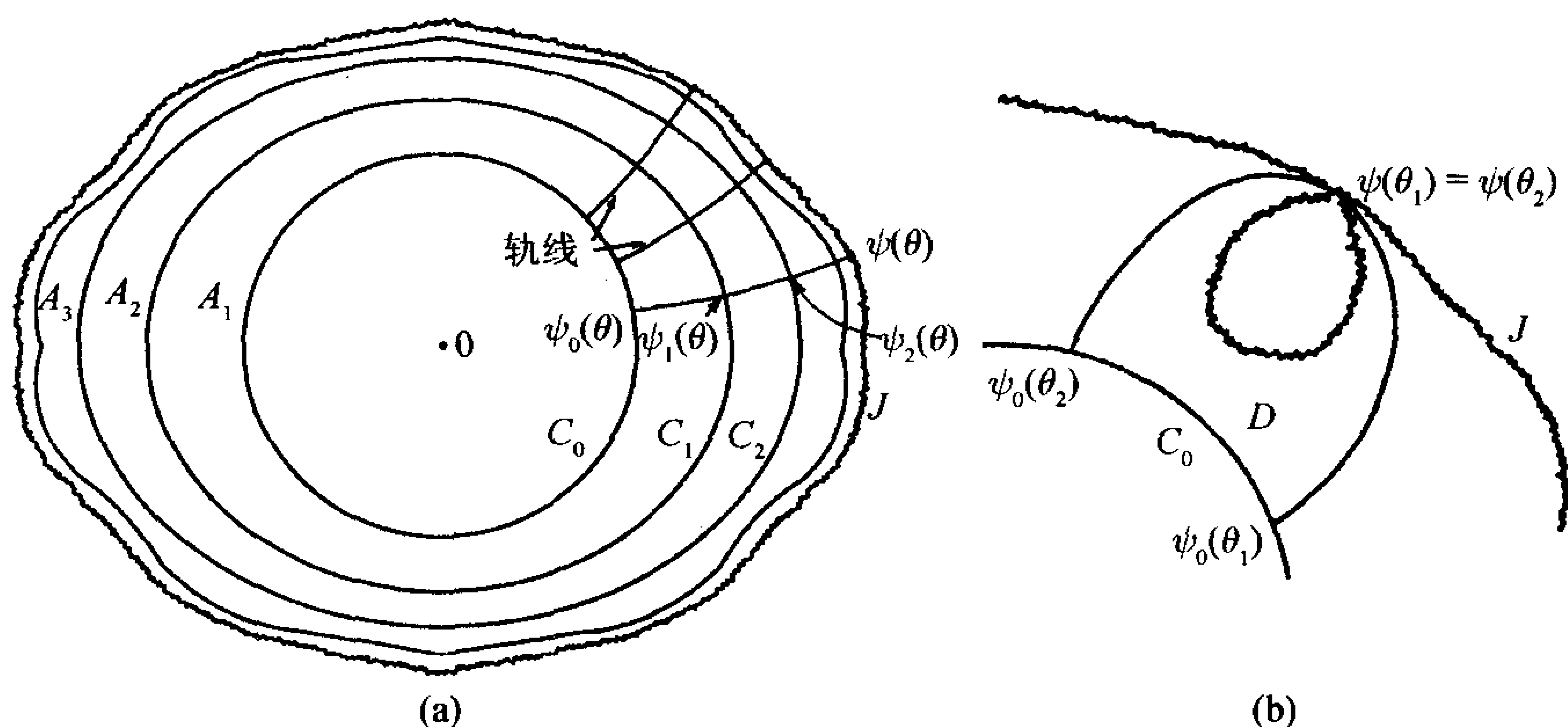



图 14.5 定理 14.16 的证明

通过推广这个论证可知：如果 $c$ 是在 $M$ 的主心形线上, 则 $J(f_c)$ 是简单闭曲

线; 这样的曲线有时被称为是拟圆周. 当然, 若 $c > 0$, 则 $J(f_c)$ 是分形曲线. 也可以证明, 对较小的 $c$, 它的维数由下式给出,

$$s = \dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c) = 1 + \frac{|c|^2}{4\ln 2} + |c|^3\text{及更高阶的项}. \tag{14.9}$$

同时, 对实际给定的 $c$ 的实解析函数, 也有 $\dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c)$, 且 $0 < \mathcal{H}^s(J) < \infty$.

下一个情形是考虑 $f_c$ 有周期为 2 的吸引周期轨道. 通过直接计算, 可知只要 $|c+1| < 1/4$, 就会发生这种情形, 这也就是 $z$ 位于毗连 $M$ 的主心形的突出圆盘上的情形 (见练习 14.16).

因为 $f_c^2$ 是 4 次多项式, $f_c$ 有两个不动点及两个周期为 2 的周期点. 设 $w_1$ 和 $w_2$ 是周期为 2 的吸引轨道的点, 用与定理 14.16 相同的证明方法, 可以得到 $w_i$ 的吸引域 (即 $\{z : f_c^{2k}(z) \to w_i, k \to \infty\}$) 为环绕 $w_i$ 的简单闭曲线 $C_i$ 所围的区域, $i$=1, 2. 由引理 14.11 及命题 14.4, 有 $C_i \subset J(f_c^2) = J(f_c)$. 曲线 $C_i$ 由 $f_c^2$ 以二对一的方式映射到自身, 由此推出在每个 $C_i$ 上存在 $f_c^2$ 的一个不动点. 周期为 2 的点严格地在 $C_i$ 内, 所以在每个 $C_i$ 上存在 $f_c$ 的一个不动点. 因为 $C_i$ 由 $f_c$ 相互映射到对方, 唯一的可能是 $C_1$ 与 $C_2$ 交于 $f_c$ 的不动点中的一个. 逆函数 $f_c^{-1}$ 在 $C_1$ 上是双值的, 逆映像之一是 $C_2$(环绕 $w_2$), 然而, $f_c^{-1}(C_1)$ 的另一个分支是环绕 $f_c^{-1}(w_1)$ 的第二个值的更简单的闭曲线. 用这种方式继续取逆像发现, $J(f_c)$ 由无穷多条简单闭曲线组成, 它环绕所有阶的 $w_1$ 与 $w_2$ 的原像, 相互交于一对 "扭点"(见图 14.7(c)). 于是这里就得到分形的 Julia 集, 它比前面一种情形有更加复杂的拓扑结构.

可以用类似的想法去分析当 $f_c$ 有周期 $p > 2$ 的吸引周期轨道的情形. 坐落在吸引轨道上的周期为 $p$ 的点的最近邻域由相交于一个共同点的一些简单闭曲线所围绕. Julia 集是由这些分形曲线与 $f^k$ 之下的原像所组成.

各种不同的例子显示在图 14.6 和图 14.7 中; 相应于周期为 $p$ 的吸引轨道的 Mandelbrot 集上的 "芽苞" 则由图 14.8 给出.

当 $c$ 是 $M$ 边界上的 "例外" 值, 它所对应的 Julia 集 $J(f_c)$ 在数学上是很难分析处理的. 若 $c$ 在心形图的边界或 $M$ 的芽苞上, 则 $f_c$ 有一个不重要的周期点 ($|(f^p)'(w)| = 1$). 若 $c$ 在芽苞与母体接触的 "颈部", 则 $J(f_c)$ 包含一系列把它的边界与不同的周期点连接起来的 "卷须". 位于心形图边界的另外的点上 $c$, Julia 集 $J(f_c)$ 由无穷多个包围着开区域的曲线组成, 且 $f_c$ 将每个这样的区域映射到 "更大" 的一个, 直到得到包含不动点的区域为止. 在这个Siegel 盘(siegel disc) 内, $f_c$ 使得环绕不动点的不变回路上的点在圆上转动.

还有很多可能性, 如果 $c$ 在 $M$ 的一个 "发状" 分枝上, 则 $J(f_c)$ 可能是无圈曲线(dendrite), 即具有树状形式; 如果在临界点 0 的迭代是周期的, 也即对整数 $k$ 和 $q$, $f_c^k(0) = f_c^{k+q}(0)$ 时, 就会发生这种情形.

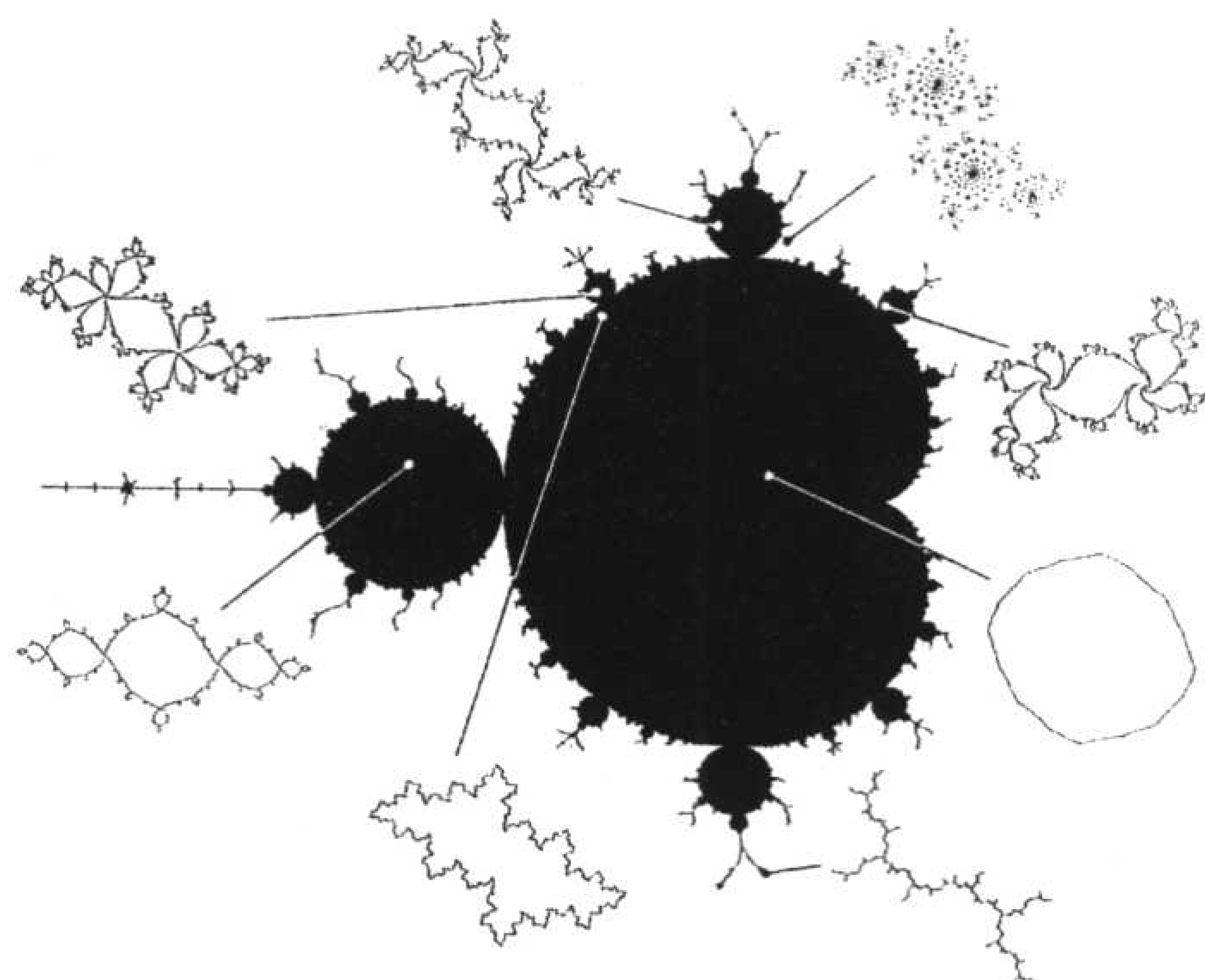


图 14.6 对应于 Mandelbrot 集中各种点 $c$ 的 Julia 集 $J(f_c)$.
更精细的 Julia 集由图 14.7 给出

前面已经指出了在 $M$ 的发状分枝中有 $M$ 的微型缩影, 如果 $c$ 属于它们中的一个, 那么 $J(f_c)$ 可能是无圈曲线, 且看起来像是在 $M$ 的主要部分的 $c$ 值所对应的 Julia 集的微型缩影, 这些缩影镶嵌在这分枝的 "末梢".

确实, 为探索 Julia 集的结构和其他函数的 Julia 集, 使用计算机是一个好办法. 在前面已经讨论过的性质的基础上, 通常有两种方法可以用来绘制 Julia 集.

在第一种方法中, 选择斥性周期点 $z$, 对适当的 $k$, 可以计算逆像 $J_k=f^{-k}(z)$ 所对应的集; 由推论 14.8(b), 这 $2^k$ 个点都在 $J$ 中, 而且随着 $k$ 的变大将充满 $J$. 用这种方式绘制 $J$ 的困难是 $J_k$ 的点不一定均匀分布在 $J$ 上, 它们可能有聚集在 $J$ 的某部分的倾向, 而在其他 $J$ 的部分可能是很稀疏的. 经常甚至 $k$ 很大时, $J$ 的有些部分可能完全被遗漏 (对接近 $M$ 的边界的 $c$ 相应的 $f_c$, 这种情形可能发生). 有多种方法可以克服这种困难. 例如, 设 $J_0=\{z\}$, 对每一 $k$, 我们不取 $J_k=f^{-1}(J_{k-1})$, 而是在每一 "小" 丛聚集点中只选出一点而舍去其他的点, 这些选出的点组成 $f^{-1}(J_{k-1})$ 的子集 $J_k$. 这就能保证了在迭代的每一步, 处理的都是一个分布相当合理的 $J$ 的点集, 同时也简化了复杂的计算.

第二种方法是检验单个点, 看它们是否接近 Julia 集; 例如, 假设 $f$ 有两个或更多个吸引不动点 (如果 $f$ 是多项式, 则包括 $\infty$), 假如 $z$ 是 $J(f)$ 中的任一点, 则由引理 14.11, 在每个吸引点的吸引域中都存在任意接近 $z$ 的点. 为了确定 $J$, 将 $\mathbf{C}$ 的区域分成更细的网格, 检验每一网格正方形的四个顶点在 $f$ 的迭代下的最终结果. 若有两个顶点被吸引到不同点, 则认为这个网格正方形包含 $J$ 的点. 通常, 对其他的正方形, 即所谓的 "Fatou 集", 都根据正方形的顶点被吸引到不同的点而把它们涂上不同的颜色, 可能还对某个固定的 $k$, 根据第 $k$ 次迭代时与吸引点的接近程度, 使涂上的颜色有一定的深浅差别.

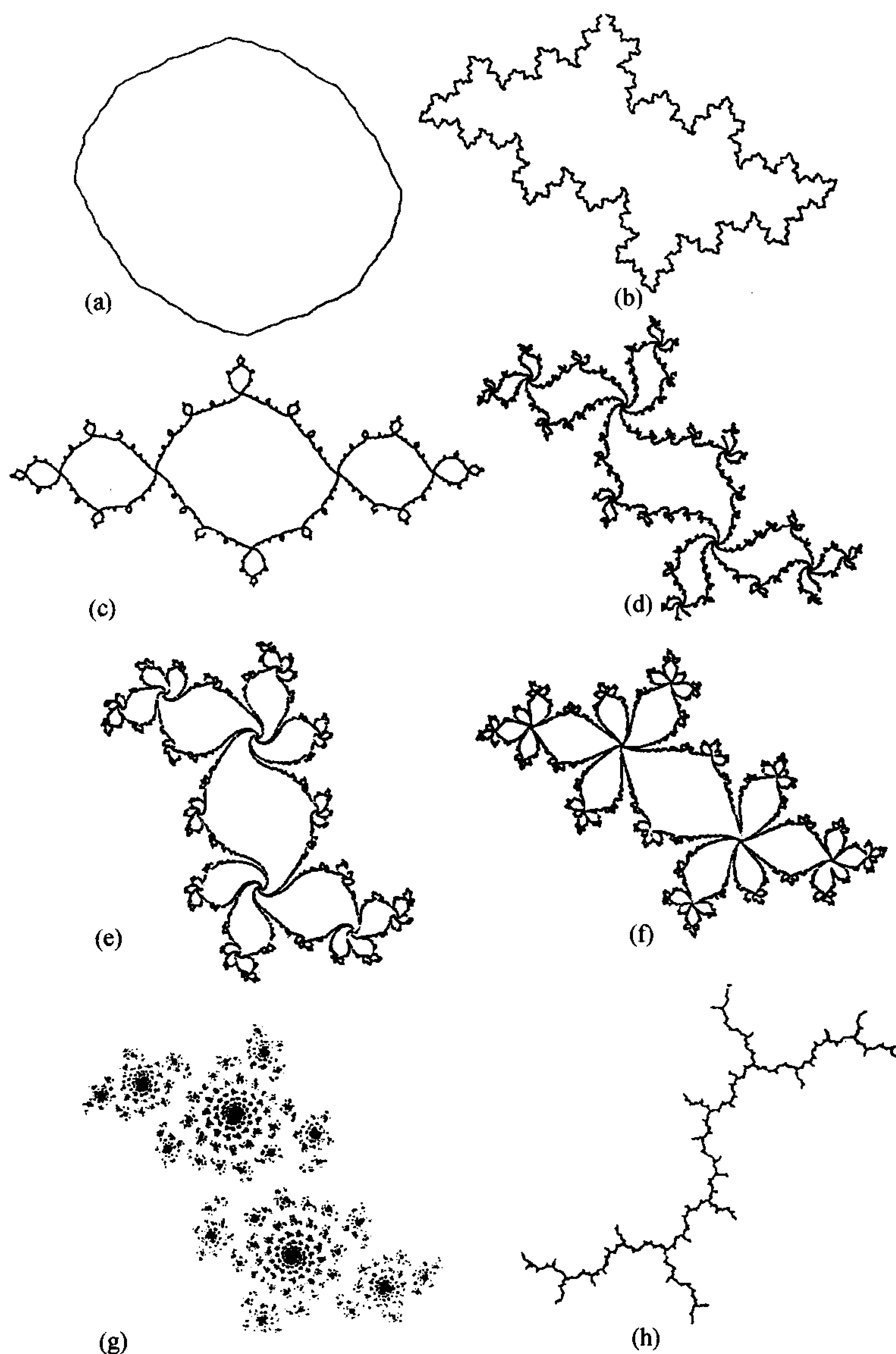



图 14.7 二次函数 $f_c(z) = z^2 + c$ 的一组 Julia 集. (a) $c = -0.1 + 0.1\text{i}$, $f_c$ 有吸引不动点, $J$ 为拟圆周; (b) $c = -0.5 + 0.5\text{i}$, $f_c$ 有吸引不动点, $J$ 为拟圆周; (c) $c = -1 + 0.05\text{i}$, $f_c$ 有周期为 2 的吸引轨道; (d) $c = -0.2 + 0.75\text{i}$, $f_c$ 有周期为 3 的吸引轨道; (e) $c = 0.25 + 0.52\text{i}$, $f_c$ 有周期为 4 的吸引轨道; (f) $c = -0.5 + 0.55\text{i}$, $f_c$ 有周期为 5 的吸引轨道; (g) $c = 0.66\text{i}$, $f_c$ 没有吸引轨道且 $J$ 为不全连通; (h)$c = -\text{i}$, $f_c^2(0)$ 是周期的且 $J$ 为无圈曲线

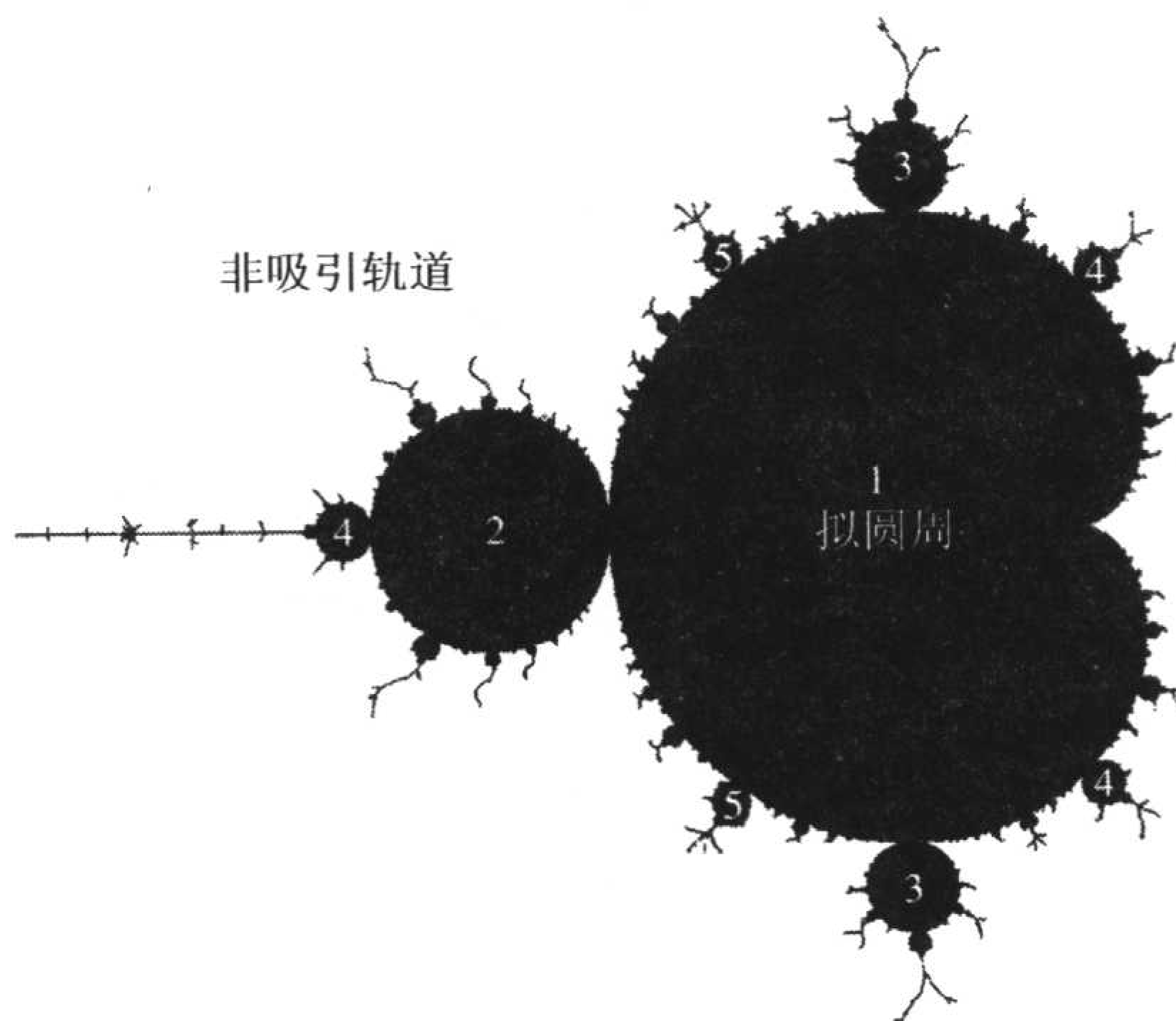



图 14.8 对应于 Mandelbrot 集 $M$ 内各部分 $c$ 的 $f_c$ 的吸引轨道的周期. 若 $c$ 在主心形图中, $f_c$ 有吸引不动点且 Julia 集 $J(f_c)$ 为拟圆周. 对于 $c$ 在 $M$ 的芽苞中, $f_c$ 有显示周期为 $p$ 的吸引轨道, 与 Julia 集 $J(f_c)$ 内的 $p$ 区域交于每一扭点上. 在 $M$ 外, 函数 $f_c$ 没有吸引轨道且 $J(f_c)$ 为全连通的

这两种方法在一些情形中不易应用, 数学的理论知识也许有助于克服可能发生的困难.

## 14.4 拟圆周的维数特征

在上一节中我们已经看到, 如果 $c$ 在 Mandelbrot 集的主心形图内, 则 $f_c(z) = z^2 + c$ 的 Julia 集为简单闭曲线. 用类似的论证, 当 $c$ 充分小时, 对任何整数 $n \geqslant 2$, $f(z) = z^n + c$ 的 Julia 集也是简单的闭曲线; 实际上, 对 $f(z) = z^2 + g(z)$ 也同样是如此, 其中 $g$ 为在原点附近 "充分小" 的各种不同的解析函数. 于是所有这些函数的 Julia 集在拓扑意义上是一致的, 它们都与圆同胚, 令人惊奇的是作为分形, 它们本质上也是相同的. 换言之, 它们是利普希茨等价的, 当且仅当它们有相同的豪斯多夫维数. 当然, 如果两个集有不同的维数, 则它们不可能是利普希茨等价的 (推论 2.4). 但是, 在这个特殊情形中, 上述结论的逆命题也是正确的.

称集 $F$ 为**拟自相似圆周**(quasi-self-similar circle) 或者是**拟圆周**, 假如它满足下面的条件:

(i) $F$ 同胚于一个圆 (即 $F$ 为简单闭曲线)

(ii) $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, 这里 $s=\dim_{\mathrm{H}} F$

(iii) 存在常数 $a, b, r > 0$, 使得对 $F$ 的任意子集 $U$ 有 $|U| \leqslant r$, 存在映射 $\varphi: U \to$

$F$, 使得

$$a|x-y| \leqslant |U|\,|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant b|x-y| \quad (x,y \in F). \tag{14.10}$$

"拟自相似" 条件 (iii) 说明了 $F$ 的任意小的部分 "粗略相似" 于 $F$ 的大的部分.

下面的定理取决于利用 $s$ 维豪斯多夫测度去度量拟圆周的环形 "距离".

**定理 14.17** 拟圆周 $E$ 和 $F$ 为双利普希茨等价的, 当且仅当 $\dim_{\mathrm{H}} E = \dim_{\mathrm{H}} F$.

**证明梗概** 如果在 $E$ 和 $F$ 之间存在一个双利普希茨映射, 则由推论 2.4(b), $\dim_{\mathrm{H}} E = \dim_{\mathrm{H}} F$.

假定 $\dim_{\mathrm{H}} E = \dim_{\mathrm{H}} F$, 设 $E(x,y)$ 为在点 $x,y \in E$ 之间按顺时针方向取的 $E$ 上的 "弧", 对 $F$ 的弧也类似地表示. 由条件 (ii) 及 (iii) 得出 $\mathcal{H}^s(E(x,y))$ 在 $x,y \in E$ 上连续, 而且若 $x \neq y$, 它是正的. 说明存在常数 $c_1, c_2 > 0$, 使得

$$c_1 \leqslant \frac{\mathcal{H}^s(E(x,y))}{|x-y|^s} \leqslant c_2 \tag{14.11}$$

当 $E(x,y)$ 是 "较短" 的弧, 即 $\mathcal{H}^s(E(x,y)) \leqslant \mathcal{H}^s(E(y,x))$. 设 $\varepsilon$ 为充分小的正数, 若 $|x-y| \geqslant \varepsilon$, 则由连续性的结论, 对适当的常数, 式 (14.11) 是成立的. 如果 $|x-y| < \varepsilon$, 则存在映射 $\varphi: E(x,y) \to E$, 满足式 (14.10), 使得 $|\varphi(x)-\varphi(y)| \geqslant \varepsilon$. 由不等式 (14.10) 与及式 (2.8) 和式 (2.9) 得出, 如果用 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(y)$ 代替式 (14.11) 中的 $x,y$, 则式中的比值, 只在一个有界的范围内变化. 所以对任意的 $x,y \in E$, 式 (14.11) 对适当的 $c_1$ 及 $c_2$ 成立.

现在选择基本点 $p \in E$, $q \in F$. 设 $\gamma = \mathcal{H}^s(E)/\mathcal{H}^s(F)$, 定义 $\psi: E \to F$, 取 $\psi(x)$ 为 $F$ 中的点, 使得

$$\mathcal{H}^s(E(p,x)) = \gamma \mathcal{H}^s(F(q,\psi(x)))$$

(见图 14.9). 则 $\psi$ 为连续双射, 而且也有

$$\mathcal{H}^s(E(x,y)) = \gamma \mathcal{H}^s(F(\psi(x),\psi(y))) \quad (x,y \in E).$$

应用式 (14.11) 和相对 $F$ 的弧类似不等式, 就得出当 $x \neq y$ 时,

$$c_3 \leqslant \frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|} \leqslant c_4$$

所以 $\psi$ 是双利普希茨映射, 即为所要求的. □

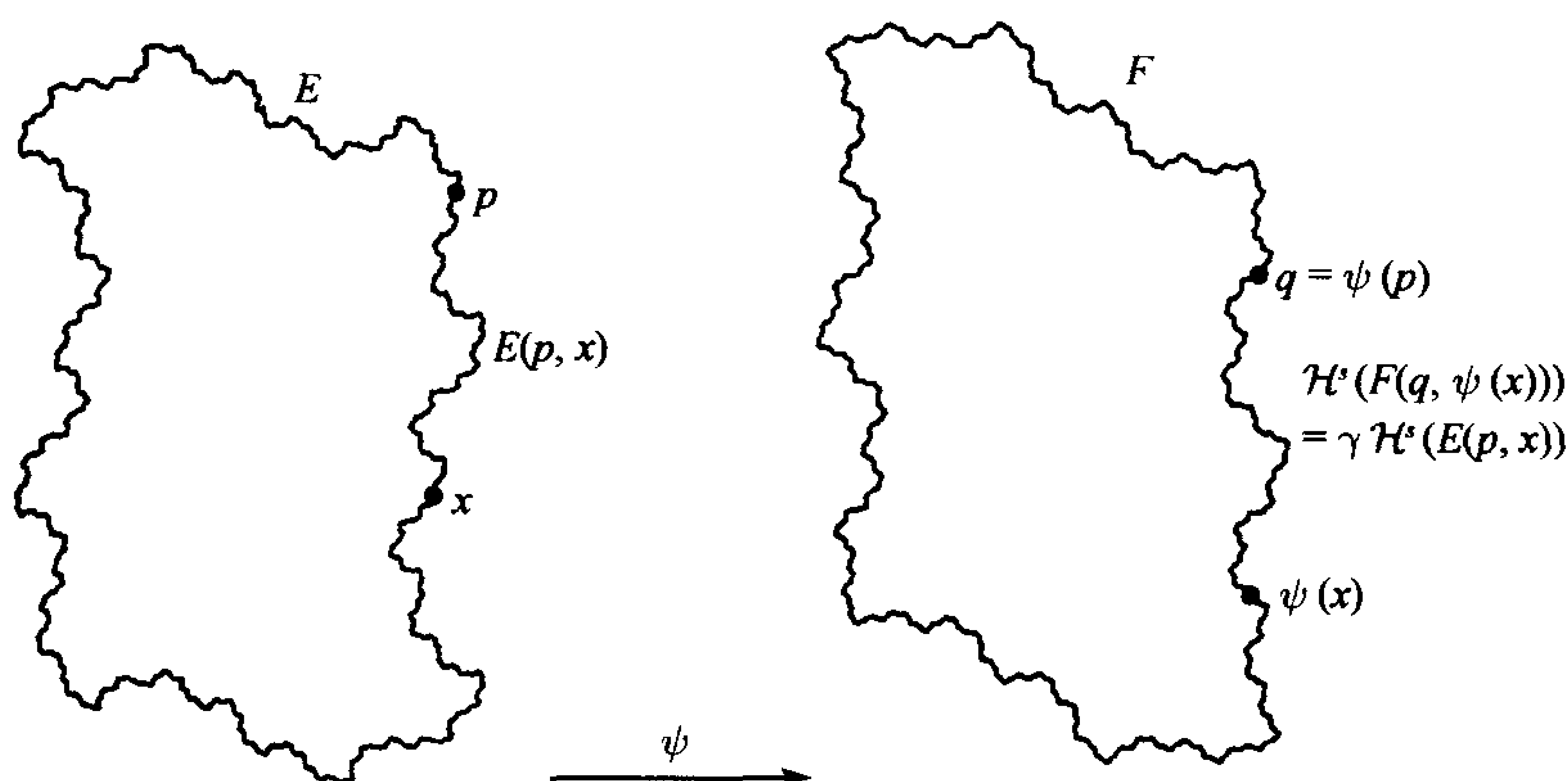



图 14.9 在豪斯多夫维数为 $s$ 的两个拟圆周之间建立双利普希茨映射 $\psi$

**推论 14.18** 设多项式 $f_1$ 和 $f_2$ 的 Julia 集 $J_1$ 和 $J_2$ 为简单闭曲线, 并设 $f_i$ 在 $J_i$ 上是严格斥性的 (即 $|f_i'(z)| > 1, i = 1, 2$). 则 $J_1$ 和 $J_2$ 是双利普希茨等价的, 当且仅当 $\dim_H J_1 = \dim_H J_2$.

**证明** 可以证明如果多项式 $f$ 在它的 Julia 集上是严格斥性的, 则 $0 < \mathcal{H}^s(J) < \infty$, 其中 $s = \dim_H J$. 进一步, 如果给定 $J$ 的子集 $U$, 可以选择 $k$ 使得 $f^k(U)$ 具有与 $J$ 自身的直径可比的直径, 并且, 如果取 $\varphi = f^k$, 则式 (14.10) 成立 (这反应了 $J$ 的拟自相似性). 所以 $J_1$ 和 $J_2$ 是可以应用定理 14.17 的拟圆周. □

## 14.5 解多项式方程的牛顿法

任何做过数值分析的人都能用牛顿法求解方程的根. 设 $p(x)$ 为具有连续导数的函数, 如果令 $f(x) = x - p(x)/p'(x)$, 只要适当地选择 $x$ 的初值, 则迭代 $f^k(x)$ 收敛于方程 $p(x)$=0 的解; 并且在这个解上, $p'(x) \neq 0$. Cayley 提出了在复平面上的研究方法, 特别地, $\mathbf{C}$ 上的初始点迭代收敛到 $p$ 的零点.

设 $p$: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ 为复系数的多项式, 定义有理函数 $f : \mathbf{C} \bigcup \{\infty\} \to \mathbf{C} \bigcup \{\infty\}$

$$f(z) = z - p(z)/p'(z). \tag{14.12}$$

则 $f$ 的不动点由 $p(z)/p'(z) = 0$ 确定, 即 $p$ 的包含 $\infty$ 在内的零点. 对上式求导, 可以得到

$$f'(z) = p(z)p''(z)/p'(z)^2 \tag{14.13}$$

所以, 如果 $p'(z) \neq 0$, 则 $p$ 的零点 $z$ 是 $f$ 的超吸引不动点. 当 $|z|$ 较大时, $f(z) \sim z(1 - 1/n)$, 这里 $n$ 是 $p$ 的阶, 所以 $\infty$ 是 $f$ 的斥性点. 通常记

$$A(w) = \{z : f^k(z) \to w\} \tag{14.14}$$

表示零点 $w$ 的吸引域, 即在牛顿迭代下收敛于 $w$ 的初始点集. 因为零点是吸引的, 域 $A(w)$ 为包含 $w$ 的开区域. 然而, 下面将会看到, 在远离 $w$ 的地方 $A(w)$ 可以是非常复杂的.

在 14.1 节中叙述的对多项式适用的 Julia 集理论, 对有理函数也几乎同样适用, 只要点 $\infty$ 以自然的方式包括在内. 主要不同的是, 若 $f$ 是有理函数, $J(f)$ 不一定有界 (尽管它必定是闭的), 而且在 $J(f) = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ 情形, $J(f)$ 也可能有内部点. 然而, 引理 14.11 仍然正确, 所以对每一吸引不动点 $w$, $J(f)$ 都是 $A(w)$ 的边界. 于是在用牛顿法分析根的吸引域的过程中, $J(f)$ 可能是很重要的.

最简单明了的情形是二次多项式:

$$p(z) = z^2 - c(c \neq 0)$$

它的零点是 $\pm\sqrt{c}$(与前面提到的一样, 通过共轭变换, 更一般的二次多项式可以简化为这种形式). 牛顿公式 (14.12) 变为

$$f(z) = (z^2 + c)/2z.$$

于是

$$f(z) \pm \sqrt{c} = (z \pm \sqrt{c})^2/2z,$$

所以

$$\frac{f(z)+\sqrt{c}}{f(z)-\sqrt{c}} = \left(\frac{z+\sqrt{c}}{z-\sqrt{c}}\right)^2. \tag{14.15}$$

立即得出, 如果 $|z+\sqrt{c}|/|z-\sqrt{c}| < 1$, 则 $|f^k(z)+\sqrt{c}|/|f^k(z)-\sqrt{c}| \to 0$, 且当 $k \to \infty$ 时, $f^k(z) \to -\sqrt{c}$; 类似地, 如果 $|z+\sqrt{c}|/|z-\sqrt{c}| > 1$, 则 $f^k(z) \to \sqrt{c}$. Julia 集 $J(f)$ 是直线 $|z+\sqrt{c}| = |z-\sqrt{c}|$($-\sqrt{c}$ 和 $\sqrt{c}$ 连线的垂直平分线), 而且 $A(-\sqrt{c})$ 及 $A(\sqrt{c})$ 分别是 $J(f)$ 两边的半平面. (在式 (14.15) 中, 令 $h(z) = (z+\sqrt{c})/(z-\sqrt{c})$, 则有 $f(z) = h^{-1}(h(z))^2$, 所以 $f$ 与映射 $g(z) = z^2$ 共轭且有相似的动力结构.) 这种情况是很规则的, 任何初始点可在 $f$ 的迭代下趋于 $p$ 的最近零点.

上面的二次函数的例子可能会使人们有这样的期望: 任何多项式的零点在牛顿迭代下的吸引区域都是相当规则的; 然而, 对于较高阶的多项式, 情况却根本不同的. 引理 14.11(对有理函数, 包括对多项式的牛顿函数, 情况也成立) 预示了后面会有很奇怪的事情发生: 如果 $p$ 有零点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$, 且 $p'(z_i) \neq 0$, 引理 14.11 告诉我们, $f$ 的 Julia 集是每一零点的吸引域的边界, 即

$$J(f) = \partial A(z_1) = \cdots = \partial A(z_n).$$

一个在任何吸引区域的边界上的点也一定在所有吸引区域的边界上; 因为 $J(f)$ 是不可数的, 所以有很多这样的多重边界点. 下面试图找到三个或更多个具有这种性质的不交集, 这将使读者相信它们确实是非常复杂的.

让我们来看一个特殊的例子. 三次多项式

$$p(z) = z^3 - 1$$

有三个零点 1, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}$, 相应的牛顿函数是

$$f(z) = \frac{2z^3+1}{3z^2}.$$

变换 $\rho(z) = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$ 是绕原点转动 120° 的一个旋转. 容易验证 $f(\rho(z)) = \rho(f(z))$, 换言之, $\rho$ 是 $f$ 到自身的共轭变换. 可见对这三个零点, 绕原点 120° 的旋转都把任意 $w$ 的相应的 $A(w)$ 映射到 $A(w\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3})$ 上, 所以 Julia 集包含关于原点对称的三部分.(当然, 这些对称可以指望从 $p$ 的三个零点的对称位置得到.) 若 $z$ 是实的, 则对所有 $k$, $f^k(z)$ 仍然是实的, 而由简单的论证可知除去可数个实数 $z$ 外, $f^k(z)$ 收敛于 1. 所以 $A(1)$ 包含除去可数个点的实轴, 由对称性, $A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3})$ 和 $A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3})$ 分别包含除去可数个点以外的通过原点且与实轴成各 120° 和 240° 的直线. 已经知道每个 $A(w)$ 包含一个环绕 $w$ 的开区域, 在任一个 $A(w)$ 边界上的任何点都在所有三个边界上, 而且有不可数个这样的 “三重点”. 很多人都想要亲眼目睹一下由计算机制图来解决的这似乎是矛盾的情形 (见图 14.10).

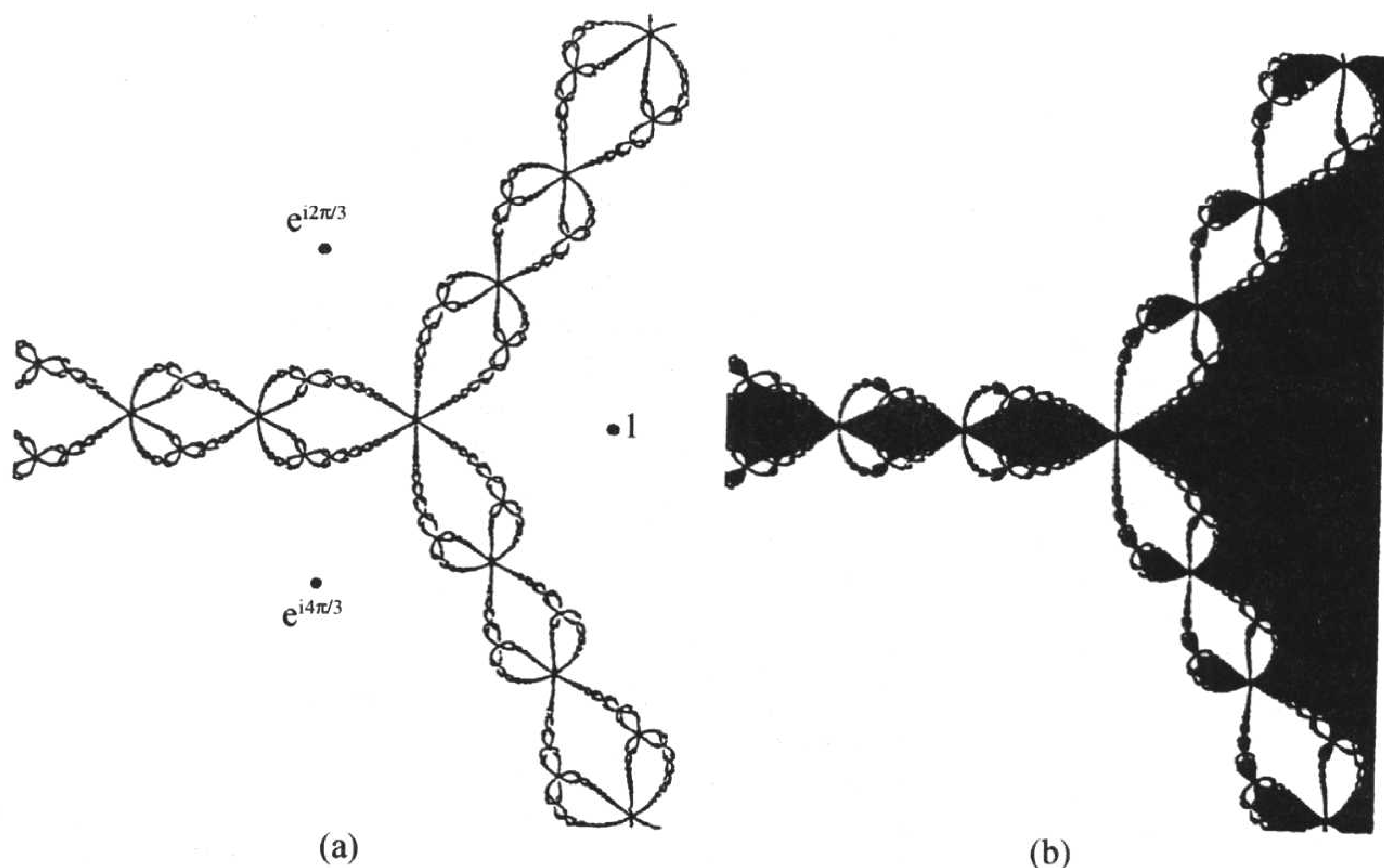



图 14.10 对 $p(z) = z^3 - 1$ 的牛顿法.(a) 中给出了牛顿函数 $f(z) = (2z^3+1)/3z^2$ 的 Julia 集, (b) 中的黑影部分表示零点 $z = 1$ 的吸引域

图 14.10(b) 的黑影部分是区域 $A(1)$, 注意到其他两个零点的吸引域分别由 $A(1)$ 旋转 120° 和 240° 得到, 并以自然的方式构成镶嵌的图片. 图 14.10(a) 表示的是 Julia 集的三个吸引区域的边界, 它由从原点出发的三个 "链" 组成; 这些分形链有精细结构: 任意接近 $J(f)$ 的每一点的结构, 都是 $A(w)$ 的六个分支相交于一点在原点处的图形 "轻微变形" 的拷贝. 这证实了推论 14.8(b)(对有理函数也成立): $J(f)$ 是 $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(0)$ 的闭包, 且如果 $z$ 在 $J(f)$ 中, 则存在任意接近 $z$ 的一点 $w$ 及一个整数 $k$, 使 $f^k(w)=0$. 但 $f^k$ 是局部保形映射, 所以局部逆 $(f^k)^{-1}$ 将 0 的邻域映射到 $w$ 的 "几乎相似" 的邻域, Julia 集 $J(f)$ 表现出了拟自相似性.

当然这只是个初步. 对 3 阶或更高阶的其他多项式, 以及其他解析函数, 它们的零点的吸引域可以用理论和计算机制图结合的方法来进行研究, 这就产生了大量具有非常复杂结构, 这些结构可能引出令人好奇的数学问题.

在这一章里, 讨论了一个复杂而又诱人的数学领域, 在这其中分形是主要的研究对象; 在这个研究领域里, 计算机试验经常创造出一些适合数学理论发展的方法. 各种变化是无穷无尽的, 我们可以研究更高阶多项式和其他解析函数如 $\exp(z)$ 的 Julia 集以及平面上的非解析变换的不变集. 随着高质量的计算机图片的问世, 这些思想成为许多计算机艺术的基础; 简单形式的单值函数可以导致非常复杂但很规则的图形, 这些图形经常是很美的, 有的简直是不可思议的.

## 14.6　注记和参考文献

Julia(1918) 和 Fatou(1919) 发展了复变函数迭代的许多基础理论. 许多年来这门学科死寂一般, 直到计算机制图学的充分发展揭示了 Julia 集的复杂结构. 最近, 这门学科成为热门, 在计算机上绘制 Julia 集和 Mandelbrot 集几乎成了狂热, 可能因为它给设计程序的人以创造性的灵感, 同时这门学科的数学理论也取得了相当可观的进展.

基本的复变函数论介绍参见 Ahlofrs(1979). Peitgen and Richter(1986), Becker and Dörfler(1989), Peitgen, Jürgens and Saupe(1992) 提供了关于复迭代的详细论述. 其他关于复动力学的论述包括 Blanchard(1984), Saupe(1987), Devaney(1989), Beardon(1991), Carleson and Gamelin(1993), McMullen(1994), 以及 Milnor(1999). Mandelbrot(1980) 引入了以其名字命名的集, 基本定理 14.14 由 Brolin(1965) 给出. Tan(2000) 收集和整理了关于 Mandelbrot 集的有关文献.

$J(f_c)$ 的维数公式 (14.9) 归于 Ruelle(1982). Collet, Dobbertin and Moussa(1992), 以及 Abenda, Moussa and Osbaldestin(1999) 对此进行了推广. 拟圆周维数的详细特征参见 Falconer and Marsh(1989). Peitgen and Richter(1986), Peitgen, Saupe and

Von Haeseler(1984), 以及 Curry, Garnett and Sullivan(1983) 讨论了与牛顿法有关的分形.

## 练　习

以下练习中, 令 $f_c(z) = z^2 + c$.

**14.1** 证明: 每个完备集 $E$(即闭的、没有孤立点的集) 是不可数的.(提示: 构造 $E$ 内部的一个 “类康托尔” 集). 推出对所有的 $c$, $J(f_c)$ 是不可数的.

**14.2** 描绘 $f(z) = z^2 + 4z + 2$ 的 Julia 集.(提示: 令 $z_1 = z + 2$)

**14.3** 令 $f(z) = z^2 + 2\mathrm{i}z + b$, 通过考虑映射 $h(z) = z + \mathrm{i}$, 证明: $f$ 的 Julia 集是连通的当且仅当 $b + 1 + \mathrm{i} \in M$.

**14.4** 令 $|c| \leqslant 1/4$. 证明: 如果 $|z| \leqslant 1/2$, 则 $|f_c(z)| \leqslant 1/2$; 推出 $B(0, 1/4) \subset K(f_c)$. 并进一步证明: 如果 $|z| \geqslant 2$, 则 $|f_c(z)| \geqslant 3|z|/2$; 再推出 $K(f_c) \subset B(0, 2)$. 关于 $J(f_c)$ 的位置我们可以看出什么?

**14.5** 令 $f(z) = z^2 - 2$, 找出 $f$ 的一个排斥不动点. 应用推论 14.8 推证出 $J(f)$ 是实区间 $[-2, 2]$ 的一个子集; 应用定理 14.14 证明这个 $J(f)$ 是连通的, 并且它就是区间 $[-2, 2]$.

**14.6** 证明: Julia 集 $J(f_c)$ 关于原点对称 (即 $z \in J(f_c)$, 当且仅当 $-z \in J(f_c)$).

**14.7** 证明: 如果 $c$ 是实数且 $c > 1/4$, 则对所有的实数 $z$, $z \notin J(f_c)$; 利用练习 14.6 的结果推证出, 如果 $c > 1/4$, 则 $J(f_c)$ 不连通, 因此 $c \notin M$.

**14.8** 证明: 如果 $c$ 为非实数, $|c| < 1/4$, 且 $w = (1 + (1 - 4c)^{-1/2})/2$ 是 $f_c(z) = z^2 + c$ 的斥性不动点, 则 $f_c'(w)$ 不是实数. 由此证明出由 Julia 集 $J(f_c)$ 形成的简单闭曲线在 $w$ 点不能有切线, 因此曲线不包含可微的弧.

**14.9** 证明: 如果 $|c| \leqslant 1/4$, $|z| \leqslant 1/2$, 则 $|f_c(z)| \leqslant 1/2$; 并证明 $B(0, 1/4) \subset M$.

**14.10** 证明: 如果 $|c+1| \leqslant 1/20$, $|z| \leqslant 1/10$, 则 $|f_c(f_c(z))| \leqslant 1/10$; 并证明 $B(-1, 1/20) \subset M$.

**14.11** 证明: 如果 $\varepsilon > 0$, 且 $|z| \geqslant \max(2 + \varepsilon, |c|)$, 则 $|f_c(z)| \geqslant |z|(1 + \varepsilon)$. 并证明: 如果 $|c| > 2$, 则 $c \notin M$.

**14.12** 利用练习 14.11 证明: $M = \{c : \text{存在整数 } k, \text{使} |f_c^k(0)| > 2\}$.

**14.13** 证明若 $|c| < 1$, 则 $f(z) = z^3 + 3z$ 的 Julia 集为简单闭曲线.

**14.14** 当 $|c|$ 很大时, 估计 $f(z) = z^3 + c$ 的 Julia 集的豪斯多夫维数.

**14.15** 证明当 $c$ 落在由 $z = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 确定的 Mandelbrot 集的主心形图内时, $f_c$ 有吸引不动点.

**14.16** 证明: $f_c^2(z) - z = (z^2 - z + c)(z^2 + z + c + 1)$. 并证明: 只要 $|c + 1| < 1/4$($M$ 中大的圆盘), 则 $f$ 有周期为 2 的吸引点.

**14.17** 证明: 若 $w$ 为 $f_c$ 的吸引不动点, 则吸引域 $A(w)$ 一定包含点 $c$. (提示: 说明否则存在一个包含 $w$ 的开集, 在其上 $f$ 的逆迭代 $f^{-k}$ 能够唯一定义, 从而构成一正规族, 但这是不可能的, 因 $w$ 是 $f^{-1}$ 的斥性不动点.) 由此得出 $f_c$ 至多有一个吸引不动点. 推广上

述结论, 即证明: 若 $w$ 为任何多项式 $f$ 的吸引不动点, 则存在某个使 $f'(z)=0$ 的点 $z$, 使得 $A(w)$ 包含 $f(z)$.

**14.18**　设 $f$ 为二次多项式, 对正整数 $p$, 应用练习 14.17 的结论到 $f^p$ 上, 证明 $f$ 至多有一个吸引的周期轨道.

**14.19**　编写绘制函数的 Julia 集的计算机程序 (见 14.3 节末). 先对二次函数进行编写, 然后试验对其他的多项式和有理函数, 最后考虑如 exp(z) 等的其他函数.

**14.20**　应用计算机研究在牛顿法迭代下某些多项式零点的吸引域, 例如 $p(z) = z^4 - 1$ 或 $p(z) = z^3 - z$.

# 第 15 章　随 机 分 形

在本书中所见到的很多分形构造都是带有随机性的模拟的. 例如, 在 von Koch 曲线的构造过程中, 在迭代中每次是去掉区间中间的三分之一部分, 而用与去掉部分构成等边三角形的另外两条边来代替; 但如果改用掷硬币的方法来决定新的部分是位于被去掉部分的 "上边", 或者是 "下边", 经过若干步迭代之后, 可以得到一个看起来相当不规则的曲线, 但它依然保留了 von Koch 曲线的某些特征 (见图 15.1).

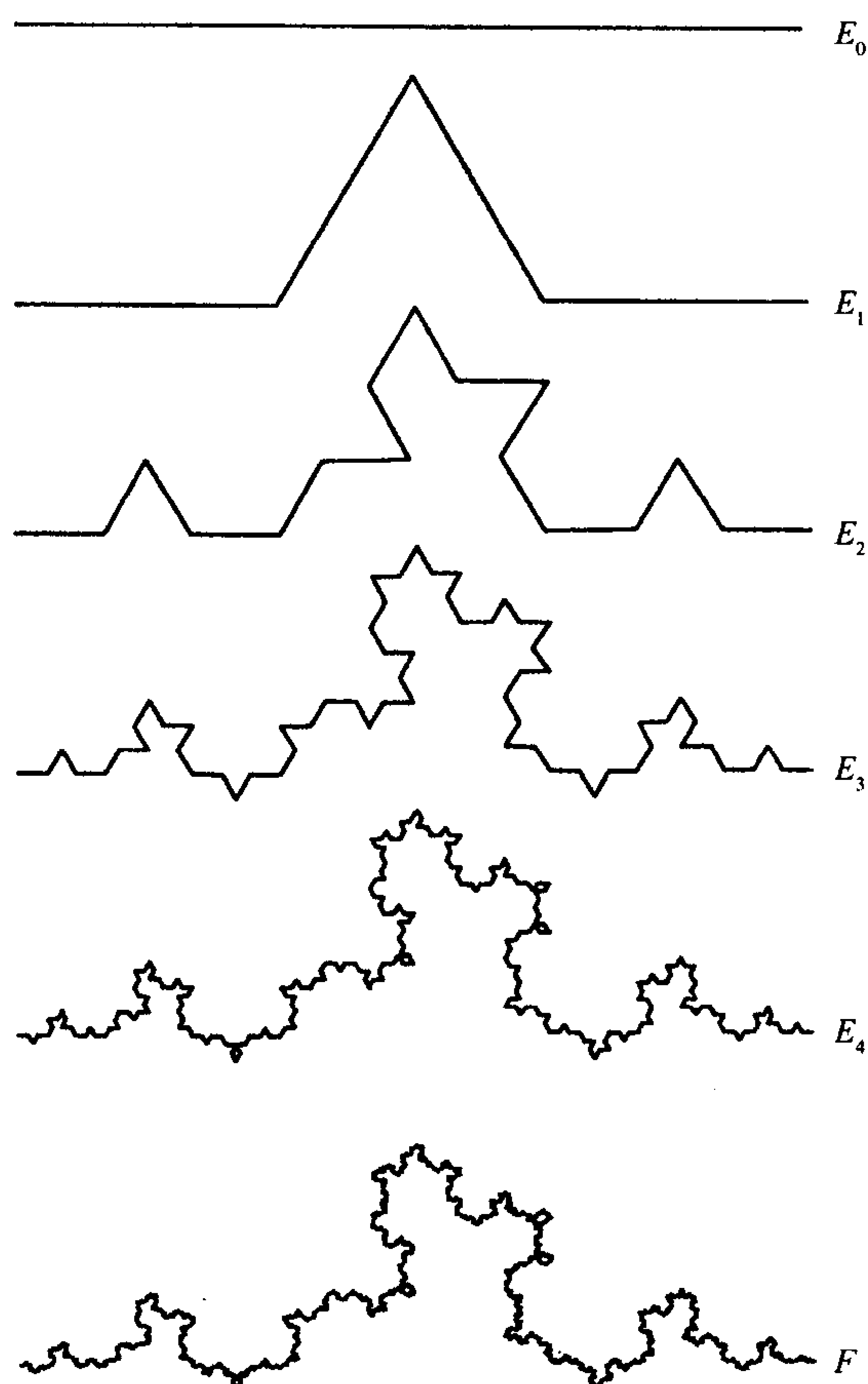



图 15.1　"随机 von Koch 曲线" 的构造. 每一步都由掷硬币来决定被去掉的线段的哪一边放置新的一对线段

三分康托尔集的构造也可以用几种不同的方法随机化, 如图 15.2 所示. 每次把线段分成三部分, 但不是总去掉中间的一段; 可以用掷骰子的方法来决定去掉哪一部分. 另外, 也可以在每步构造中随机地选择区间的长度, 所以在第 $k$ 步, 可得到 $2^k$ 个不同长度的区间, 最终得到一个看起来很不规则的分形.

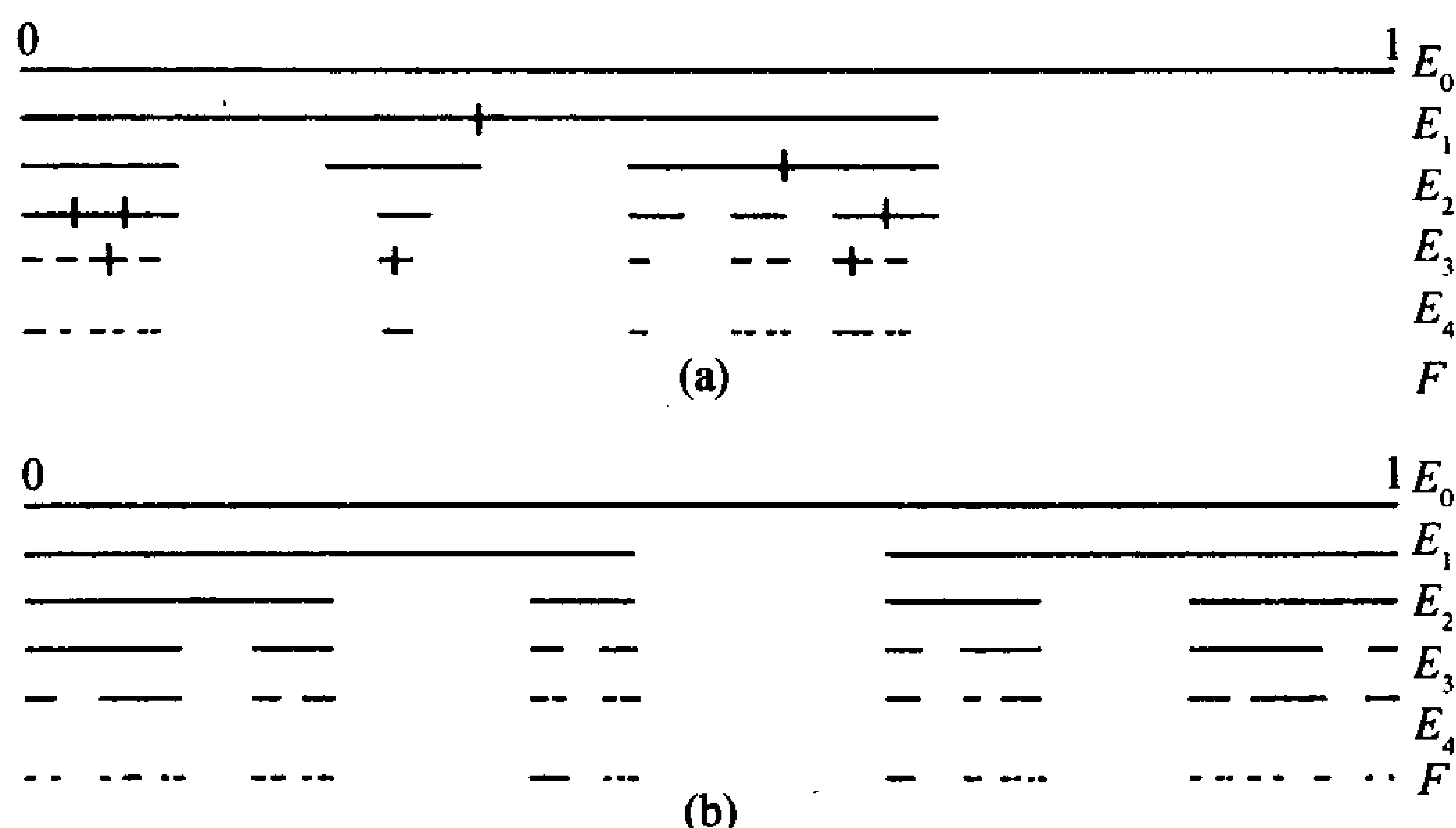



图 15.2 康托尔集的两种随机版本, 在 (a) 中, 每个区间分成相等的三部分, 随机地留下其中的某些部分. 在 (b) 中, 每个区间被具有随机长度的两个子区间来代替

然而, 这种 “随机分形” 就没有了与它们相对应的非随机分形的自相似性, 但它们不均匀的外表却通常与自然现象 (如海岸线、地形表面或云彩的边界) 相当接近. 的确, 随机分形的构造是很多给人以深刻印象的由计算机绘制的风景图的基础.

在本书中讨论的大多数分形都涉及一系列的渐近集 $E_k$, 每个 $E_k$ 都是通过对它前面的图形细化而得到的, 并以一个分形 $F$ 作为极限集. 一个随机分形, 既然叫这个名字, 应该在所有的尺度上都表现随机性, 所以应当在构造过程中的每一步都引进随机的成分. 通过把随机变化的大小与尺度联系起来, 可以使这种分形有下面意义下的**统计自相似性**(statistically self-similar): 即把它的某一小部分放大以后, 与原来的整体具有相同的统计分布. 这与 (非随机的) 自相似集是类似的 (见第 9 章), 在那里放大集合的一小部分, 可以得到与整体完全一样的集.

为了严格地描述涉及了无穷多次随机步骤的这类分形的构造, 必须使用概率论方面的语言, 关于概率论的一个简短的介绍已在 1.4 节给出.

## 15.1 随机康托尔集

下面详细分析一种特殊的具有统计自相似性的构造: 在迭代中, 除了每一步区间的长度是随机的外, 它类似于一般三分康托尔集的构造. 这种分析可推广到更一般的随机分形.

直观地, 考虑一个构造 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$, 这里 $[0,1]=E_0\supset E_1\supset\cdots$ 是递减的闭集序列, 同时 $E_k$ 是 $2^k$ 个相互不交的闭的 $k$ 水平基本区间的并. 假设每个 $k$ 水平基本区间 $I$ 包含两个 $(k+1)$ 水平区间 $I_L$ 和 $I_R$, 且 $I_L$ 和 $I_R$ 分别与 $I$ 有相同的左右端点; 每个区间的长度是随机的, 对这样构造的每个基本区间 $I$, 要求 $|I_L|/|I|$ 具有相互独立的相同的概率分布, 同时也对 $|I_R|/|I|$ 做同样的要求, 由此就加进了统计自相似性. 这个 "随机康托尔集" $F$ 就是统计自相似的, 这里对每个 $I$, 集 $F\bigcap I$ 的分布与 $F$ 相同, 但比例变化由因子 $|I|$ 决定.

用概率论的术语来描述这个随机构造. 设 $a,b$ 是常数, 且 $0<a\leqslant b<1/2$. 设 $\Omega$ 表示满足如下条件的所有的递减的集序列组成的集类 $[0,1]=E_0\supset E_1\supset E_2\supset\cdots$. 集 $E_k$ 由 $2^k$ 个不交的闭区间 $I_{i_1,\cdots,i_k}$ 构成, 这里 $i_j=1$ 或 $2(1\leqslant j\leqslant k)$(见图 15.3). $E_k$ 的区间 $I_{i_1,\cdots,i_k}$ 包含 $E_{k+1}$ 的两个区间 $I_{i_1,\cdots,i_k,1}$ 和 $I_{i_1,\cdots,i_k,2}$, 且 $I_{i_1,\cdots,i_k}$ 的左端点和 $I_{i_1,\cdots,i_k,1}$ 的左端点一致, $I_{i_1,\cdots,i_k}$ 的右端点和 $I_{i_1,\cdots,i_k,2}$, 的右端点一致. 记 $C_{i_1,\cdots,i_k}=|I_{i_1,\cdots,i_k}|/|I_{i_1,\cdots,i_{k-1}}|$, 并假设对所有的 $i_1,\cdots,i_k$, 有 $a\leqslant C_{i_1,\cdots,i_k}\leqslant b$, 于是, 定义随机康托尔集 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$.

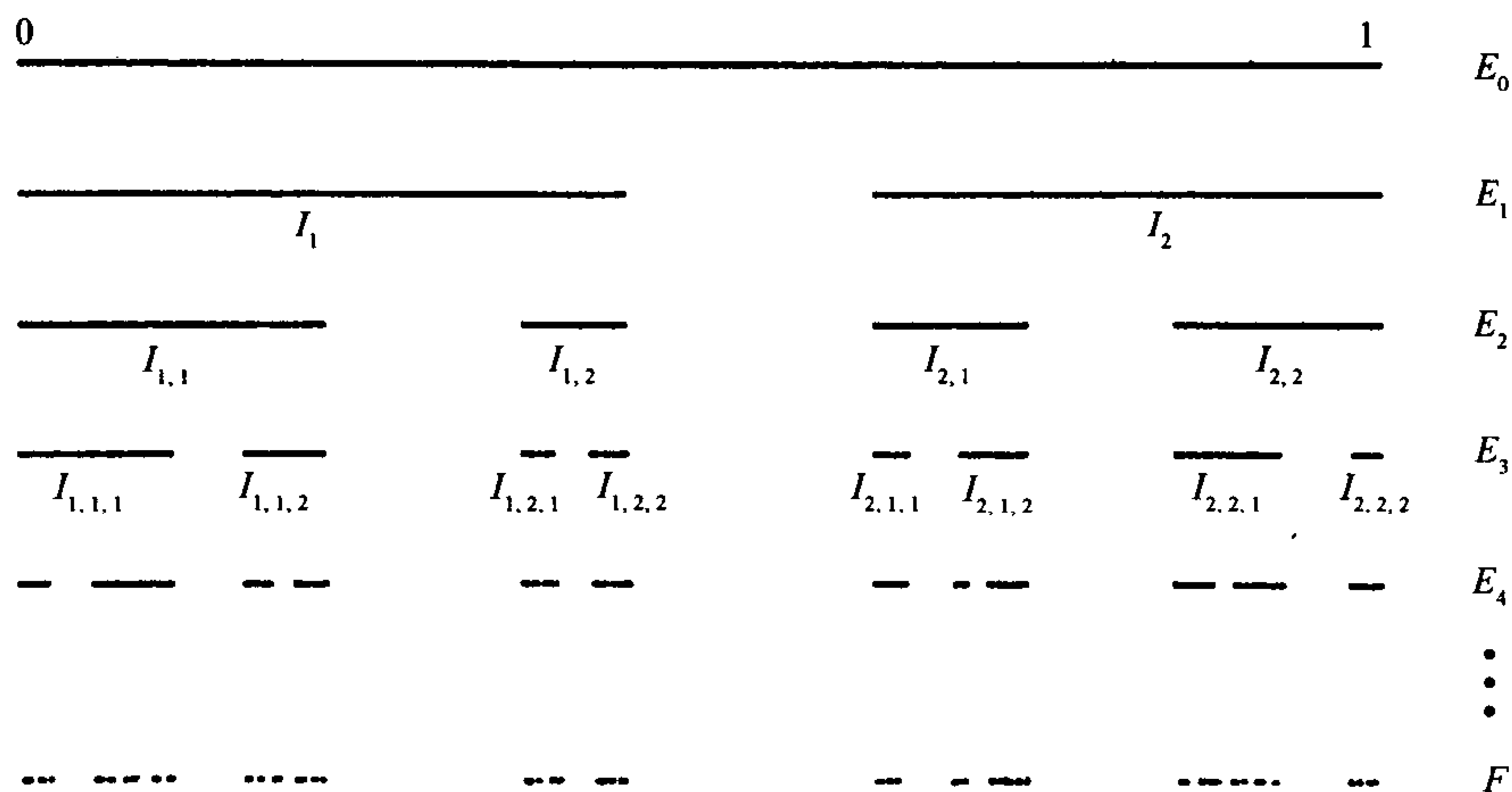



图 15.3 在定理 15.1 中分析的随机康托尔集的构造. 对每个 $i_1,\cdots,i_k$, 长度比 $|I_{i_1,\cdots,i_k,1}|/|I_{i_1,\cdots,i_k}|$ 具有相同的统计分布; 对 $|I_{i_1,\cdots,i_k,2}|/|I_{i_1,\cdots,i_k}|$ 是类似的

取 $\Omega$ 为概率样本空间, 并假设概率测度 $\mathrm{P}$ 是定义在 $\Omega$ 的子集类的一个适当大的集族 $\mathcal{F}$ 上的, 使得比值 $C_{i_1,\cdots,i_k}$ 是一个随机变量. 通过要求对每个序列 $i_1,\cdots,i_k$, $C_{i_1,\cdots,i_k,1}$ 与 $C_1=|I_1|$ 有相同的概率分布, 及 $C_{i_1,\cdots,i_k,2}$ 与 $C_2=|I_2|$ 有相同的概率分布, 就在这个构造上加进了需要的统计自相似性. 对每个序列 $i_1,\cdots,i_k$, 除了不要求 $C_{i_1,\cdots,i_k,1}$ 和 $C_{i_1,\cdots,i_k,2}$ 是独立的外, 要求 $C_{i_1,\cdots,i_k}$ 是独立随机变量. 在这些条件

下, 能够证明 $\dim_{\mathrm{H}} F$ 是可以用 $C_{i_1,\cdots,i_k}$ 表示的随机变量.

下面的结果是定理 9.3 的随机版本.

**定理 15.1** 以概率 1 对前面所描述的随机康托尔集 $F$, 有 $\dim_{\mathrm{H}} F = s$, 这里 $s$ 是下面期望方程的解

$$\mathrm{E}(C_1^s + C_2^s) = 1. \tag{15.1}$$

*** 证明** 容易看出 $E(C_1^s + C_2^s)$ 对 $s$ 是连续的, 并且是随 $s$ 严格递减的, 所以 (15.1) 有唯一解.

稍微混用一下记号, 记 $I \in E_k$ 是指区间 $I$ 是 $E_k$ 的一个 $k$- 水平区间 $I_{i_1,\cdots,i_k}$. 对这样的区间 $I$, 用 $I_L$ 和 $I_R$ 分别代表 $I_{i_1,\cdots,i_k,1}$ 和 $I_{i_1,\cdots,i_k,2}$; 对所有 $j \leqslant k$ 的序列 $i_1,\cdots,i_j$, $\mathrm{E}(X|\mathcal{F}_j)$ 表示随机变量 $X$ 在给定 $C_{i_1,\cdots,i_j}$ 的条件期望 (直观地, 设想 $E_0,\cdots,E_k$ 已经构造出来了, 正在分析以后将要发生的情况).

设 $I_{i_1},\cdots,_{i_k}$ 是 $E_k$ 的一个区间, 那么由于同分布的特点, 对 $s>0$ 有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left((|I_{i_1,\cdots,i_k,1}|^s + |I_{i_1,\cdots,i_k,2}|^s)\,|\mathcal{F}_k\right) &= \mathrm{E}(\mathrm{C}^s_{i_1,\cdots,i_k,1} + C^s_{i_1,\cdots,i_k,2})|I_{i_1,\cdots,i_k}|^s \\ &= \mathrm{E}(C_1^s + C_2^s)\,|I_{i_1,\cdots,i_k}|^s.\end{aligned}$$

对 $E_k$ 上的所有区间作和, 得

$$\mathrm{E}\left(\sum_{I\in E_{k+1}} |I|^s|\mathcal{F}_k\right) = \sum_{I\in E_k} |I|^s \mathrm{E}\left(C_1^s + C_2^s\right). \tag{15.2}$$

由此得到无条件的期望满足

$$\mathrm{E}\left(\sum_{I\in E_{k+1}} |I|^s\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{I\in E_k} |I|^s\right) \mathrm{E}(C_1^s + C_2^s). \tag{15.3}$$

如果 $s$ 是 (15.1) 的解, 方程 (15.2) 变成

$$\mathrm{E}\left(\sum_{I\in E_{k+1}} |I|^s|\mathcal{F}_k\right) = \sum_{I\in E_k} |I|^s. \tag{15.4}$$

熟悉概率论的读者将看出, 式 (15.4) 说明: 随机变量序列

$$X_k = \sum_{I\in E_k} |I|^s \tag{15.5}$$

是一个关于 $\mathcal{F}_k$ 的鞅. 而且, 通过一些常规的计算 (参见练习 15.7), 可以证明, $X_k$ 还是个均方有界 ($L^2-$ 有界) 鞅: 即对任意 $k$, 存在 $c>0$ 使得 $E(X_k^2) \leqslant c$. 为了达到证

明的目的, 要求不熟悉概率论的读者相信的关键事实是: 在这种情况下, 当 $k\to\infty$ 时, $X_k$ 以概率 1 收敛到满足下式的一个随机变量 $X$:

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(X_0)=\mathrm{E}(1^s)=1.$$

特别地, 以概率 1 有 $0\leqslant X<\infty$, 并且以概率 $q<1$ 使 $X=0$. 但是 $X=0$, 当且仅当随着 $k\to\infty$, $\sum_{I\in E_k\cap I_1}|I|^s$ 和 $\sum_{I\in E_k\cap I_2}|I|^s$ 都收敛到 0, 这里 $I_1$ 和 $I_2$ 是 $E_1$ 的区间, 由这个构造的自相似性的特点可知, 这种情况发生的概率是 $q^2$, 因此有 $q=q^2$, 所以 q=0 . 于是, 可以得到以概率 1 有 $0<X<\infty$ 的结; 特别地, 这意味着, 以概率 1, 存在 (随机) 数 $M_1$ 和 $M_2$ 使得对任意的 $k$ 有

$$0<M_1\leqslant X_k=\sum_{I\in E_k}|I|^s\leqslant M_2<\infty. \tag{15.6}$$

另外, 对任意的 $I\in E_k$, $|I|\leqslant 2^{-k}$ 成立, 所以如果 $k\geqslant -\ln\delta/\ln 2$, 则有 $\mathcal{H}_\delta^s(F)\leqslant\sum_{I\in E_k}|I|^s\leqslant M_2$, 即 $\mathcal{H}^s(F)\leqslant M_2$, 于是以概率 1 有 $\dim_{\mathrm{H}}F\leqslant s$.

下面应用 4.3 节的位势方法推导 $\dim_{\mathrm{H}}F$ 的几乎必然的下界, 为此, 引进随机集 $F$ 上的随机质量分布 $\mu$: 设 $s$ 满足式 (15.1), 对于 $I\in E_k$, 设 $\mu(I)$ 是随机变量:

$$\mu(I)=\lim_{j\to\infty}\left\{\sum|J|^s : J\in E_j \text{ 且 } J\subset I\right\}.$$

由式 (15.5) 知道这个极限是存在的, 且以概率 1 有 $0<\mu(I)<\infty$. 进一步, 如果 $I\in E_k$

$$\mathrm{E}\left(\mu\left(I\right)|\mathcal{F}_k\right)=|I|^s. \tag{15.7}$$

同时, 如果 $I\in E_k$, 也有 $\mu(I)=\mu(I_L)+\mu(I_R)$, 所以, 对任一 $k,\mu$ 在 $k$ 水平集上是可加的, 并且 $\mu$ 是支撑包含在 $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}E_k=F$ 中的质量分布 (见命题 1.7). (在此我们省略了与 $\mu$ 的定义有关的测度论的问题).

固定 $0<t<s$, 并估计 $\mu$ 的 $t$ 能的期望. 如果 $x,y\in F$, 有一个最大的整数 $k$ 使得 $x$ 和 $y$ 属于 $E_k$ 的同一个 $k$ 水平区间; 用 $x\wedge y$ 表示这个区间, 如果 $I$ 是 $k$ 水平区间, 它的 $(k+1)$ 水平的子区间 $I_L$ 和 $I_R$ 被长度至少为 $d|I|$ 的间隔所分开, 这里 $d=1-2b$. 于是

$$\begin{aligned}\iint_{x\wedge y=I}|x-y|^{-t}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)&=2\int_{x\in I_L}\int_{y\in I_R}|x-y|^{-t}\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\\&\leqslant 2d^{-t}\,|I|^{-t}\,\mu(I_L)\mu(I_R).\end{aligned}$$

如果 $I \in E_k$, 应用式 (15.7)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\iint_{x\wedge y=I}|x-y|^{-t}\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)\,|\mathcal{F}_{k+1}\right)\\
&\leqslant 2d^{-t}|I|^{-t}\,\mathrm{E}(\mu(I_L)\,|\mathcal{F}_{k+1})\,\mathrm{E}(\mu(I_R)\,|\mathcal{F}_{k+1})\\
&\leqslant 2d^{-t}|I|^{-t}|I_L|^s|I_R|^s\leqslant 2d^{-t}|I|^{2s-t}
\end{aligned}$$

应用式 (1.21) 的变化形式, 就得到了一个无条件期望的不等式:

$$\mathrm{E}\left(\iint_{x\wedge y=I}|x-y|^{-t}\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\right)\leqslant 2d^{-t}\mathrm{E}(|I|^{2s-t}).$$

对属于 $E_k$ 的全部区间 $I$ 做和, 并且反复应用式 (15.3) 可以得到:

$$\mathrm{E}\left(\sum_{I\in E_k}\iint_{x\wedge y=I}|x-y|^{-t}\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\right)\leqslant 2d^{-t}\mathrm{E}\left(\sum_{I\in E_k}|I|^{2s-t}\right)=2d^{-t}\lambda^k,$$

其中 $\lambda=\mathrm{E}\left(C_1^{2s-t}+C_2^{2s-t}\right)<1$. 则有

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\int_F\int_F|x-y|^{-t}\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\right)&=\mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{I\in E_k}\iint_{x\wedge y=I}|x-y|^{-t}\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\right)\\
&\leqslant 2d^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k<\infty,
\end{aligned}$$

所以 $\mu$ 的 $t$ 能以概率 1 是有限的, 正如已经注意到的, 以概率 1 有 $0<\mu(F)=\mu([0,1])<\infty$, 再由定理 4.13(a) 便知 $\dim_{\mathrm{H}}F\geqslant t$. □

注意到定理 15.1 的证明对很多随机模型是有典型意义的, 在证明中上下界估计的关键, 是对某些 $t$, 估计矩 $\mathrm{E}(\sum_{I\in E_k}|I|^t)$.

这个定理和证明可以在很多方向上推广, $E_k$ 的每个区间可以产生 $E_{k+1}$ 中的随机个具有随机长度的区间. 当然, 这个构造推广到 $\mathbf{R}^n$ 上时, 区间的不同子区间之间的间隔条件就应当放宽, 只要满足某种类型的 "开集条件" 就可以了 (见式 (9.11)). 下面例子的构造是 9.2 节讨论过的集的完全随机的模拟.

设 $V$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集, 它的闭包是 $\overline{V}$, 假设 $m\geqslant 2$ 是一个整数, 并令 $0<b<1$. 这里, 取 $\Omega$ 是满足条件 $\overline{V}=E_0\supset E_1\supset E_2\supset\cdots$ 的闭集的递减序列组成的集类: 集 $E_k$ 是 $m^k$ 个闭集 $\overline{V}_{i_1,\cdots,i_k}$ 的并集, 这里 $i_j=1,\cdots,m(1\leqslant j\leqslant k)$, 并且 $V_{i_1,\cdots,i_k}$ 或者与 $V$ 相似或者是空集.

假设对每个 $i_1,\cdots,i_k$, 集 $V_{i_1,\cdots,i_k}$ 包含 $V_{i_1,\cdots,i_k,i}(1\leqslant i\leqslant m)$ 并且这些集是不交的; 本质上, 这等价于开集条件. 如果 $V_{i_1,\cdots,i_k}$ 是非空的, 我们记 $C_{i_1,\cdots,i_k}=$

$|V_{i_1,\cdots,i_k}|/|V_{i_1,\cdots,i_{k-1}}|$ 为构造过程中序列集之间的相似比; 如果 $V_{i_1,\cdots,i_k}$ 是空集, 则取 $C_{i_1,\cdots,i_k}=0$; 定义随机自相似集 $F=\bigcap_{k=0}^{\infty}E_k$.

设 P 是定义在 $\Omega$ 的子集族上的概率测度, 使得 $C_{i_1,\cdots,i_k}$ 是随机变量. 假设给定 $C_{i_1,\cdots,i_k}>0$, 也就是给定 $V_{i_1,\cdots,i_k}$ 是非空的, 再假定对于每个序列 $i_1,\cdots,i_k$ 和对 $1\leqslant i\leqslant m$, $C_{i_1,\cdots,i_k,i}$ 与 $C_i$ 是具有相同的分布. 除了对每个序列 $i_1,\cdots,i_k$ 不要求随机变量 $C_{i_1,\cdots,i_k,1},\cdots,C_{i_1,\cdots,i_k,m}$ 相互独立外, 假设 $C_{i_1,\cdots,i_k}$ 是独立的; 这就在 $\Omega$ 内的构造上定义了一个自相似的概率分布. 用 $N$ 表示 $C_1,\cdots,C_k$ 中正数的 (随机) 个数, 也即 $V_1,\cdots,V_k$ 为非空的集合的个数.

**定理 15.2** 上面所描述的随机集 $F$ 为空集的概率是 $q$, 这里 $t=q$ 是下面的多项式方程的最小非负根.

$$f(t)\equiv\sum_{j=0}^{m}\mathrm{P}(N=j)t^j=t. \tag{15.8}$$

集 $F$ 的豪斯多夫维数和盒维数以概率 $1-q$ 由下面方程的解给出

$$\mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^{m}C_j^s\right)=1. \tag{15.9}$$

*** 证明注记** 基本上, 这是定理 15.1 的概率讨论与定理 9.3 的几何讨论的结合. 注意到, 如果有一个正的概率使 $N=0$, 那么就有一个正的概率使得 $E_1=\varnothing$, 因此就有 $F=\varnothing$. 当 $E_1$ 的每个基本集消失时, 这个 "消失" 也就发生了. 由这个过程的自相似性, 这种情况发生的概率 $q_0$ 等于 $f(q_0)$, 所以 $q_0=f(q_0)$. 如果 $q$ 是 $f$ 的最小非负根, 那么应用 $f$ 是递增的, 一个递推的讨论表明 $\mathrm{P}(E_k=\varnothing)=f(\mathrm{P}(E_{k-1}=\varnothing))\leqslant f(q)=q$ 对所有 $k$ 成立, 所以 $q_0\leqslant q$, 这样 $q_0=q$.

容易看出, $F$ 为空集的概率是 0, 也即 $q=0$ 的充分必要条件是以概率 1, $N\geqslant 1$; 同时也不难证明 $F$ 以概率 1 是空集, 也就是 $q=1$ 的充分必要条件是 $\mathrm{E}(N)<1$ 或 $\mathrm{E}(N)=1$ 且 $\mathrm{P}(N=1)<1$.(这些消失概率与分枝过程理论有很密切的联系) □

**例 15.3 随机 von Koch 曲线**

设随机变量 $C$ 服从区间 $(0, 1/3)$ 上的均匀分布, 设 $E_0$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的单位直线段, 通过在 $E_0$ 的中间去掉长度为 $C$ 的线段, 而代之以由去掉的线段为一边的等边三角形的另外两边来形成 $E_1$, 在 $E_1$ 的 4 条线段的每一条上重复上述的过程, 并按这种方法独立地、持续地做下去, 最终得到一条极限曲线 $F$. 那么可以得到结论: 以概率 1 有 $\dim_{\mathrm{H}}F=\dim_{\mathrm{B}}F=1.144\cdots$.

**计算** 这是定理 15.2 的一种特殊情况. 集 $V$ 可以认为是底边在 $E_0$ 上, 高为 $\sqrt{3}/6$ 的等腰三角形, 在每一步, 长为 $L$ 的线段由长为 $(1-C)L/2, CL, CL, (1-C)L/2$

的四条线段来代替, 所以有 $m=4$ 和 $C_1 = C_4 = (1-C)/2$, 还有 $C_2 = C_3 = C$. 因为 $C$ 服从 $(0,1/3)$ 上的均匀分布, 表达式 (15.9) 变成为

$$1 = \mathrm{E}\left(2\left(\frac{1}{2}(1-C)\right)^s + 2C^s\right) = \int_0^{1/3} 3\times 2\left[\left(\frac{1}{2}(1-c)\right)^s + c^s\right]\mathrm{d}c$$

或 $s+1 = 12\times 2^{-(s+1)} - 6\times 3^{-(s+1)}$

经计算, 可以得到所指出的维数. □

## 15.2 分形渗流

随机分形可能有复杂的拓扑结构, 比如它可能是高度连通的. 下面考虑一个具有统计自相似结构的拓扑状况, 这个结构称为 "分形渗流". 特别地, 这显示了一种 "相变" 的现象: 结构的参数在连续变化中递增地经过某个临界值时, 拓扑结构发生了突变.

设数 $p$ 满足 $0<p<1$, 把一个单位正方形 $E_0$ 按照简单的方法等分成为 9 个边长为 1/3 的正方形; 按照下面的方法从这些正方形中选出一部分子集来组成 $E_1$: 每个正方形以独立的概率 $p$ 被选中; 类似地, $E_1$ 的每个正方形被分成 9 个边长为 1/9 的正方形, 并且它们中的每一个也以独立的概率 $p$ 被选为 $E_2$ 的正方形; 按这种方法继续下去, 得到 $E_k$ 是由一些边长为 $3^{-k}$ 的 $k$ 水平正方形组成的随机集类. 依赖于参数 $p$ 的这个过程定义了一个随机分形 $F_p = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$(见图 15.4 和图 15.5). (不难用严格的概率术语来描述这个构造; 例如, 取所有可能的 $E_k$ 中正方形的网序列做为样本空间.)

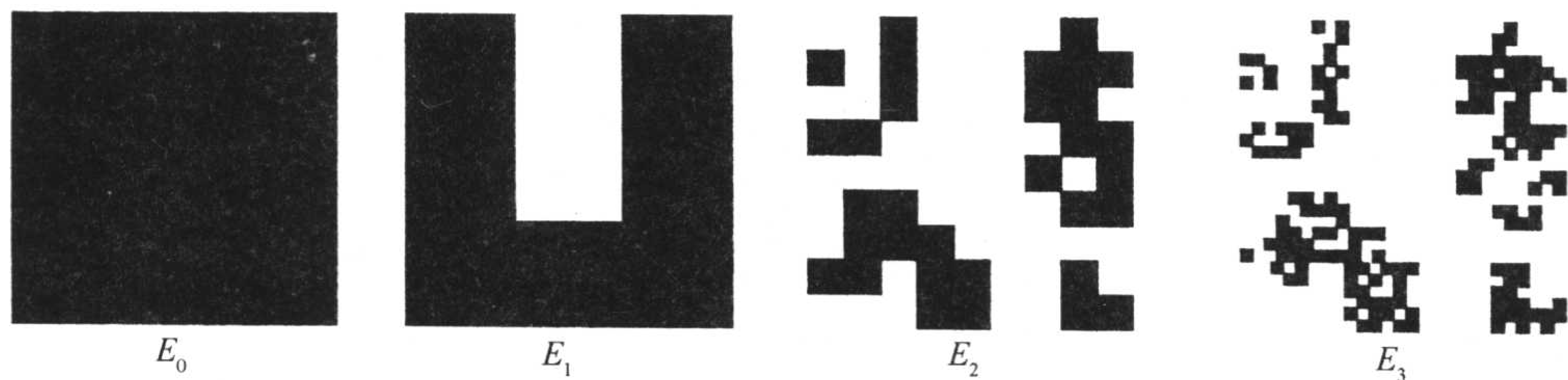



图 15.4 15.2 节中讨论的随机分形在 $p$=0.6 时的构造步骤, 得到的分形如图 15.5(a) 所示

**命题 15.4** 给定 $p$, 设 $t=p$ 是下面方程的最小正解

$$t = (pt+1-p)^9,$$

则 $F_p$ 以概率 $q$ 是空集. 如果 $p\leqslant 1/9$ 则 $q$=1, 如果 $1/9<p<1$, 则 $0<q<1$ 并且以概率 $1-q$ 有 $\dim_{\mathrm{H}} F_p = \dim_{\mathrm{B}} F_p = \ln 9p/\ln 3$.

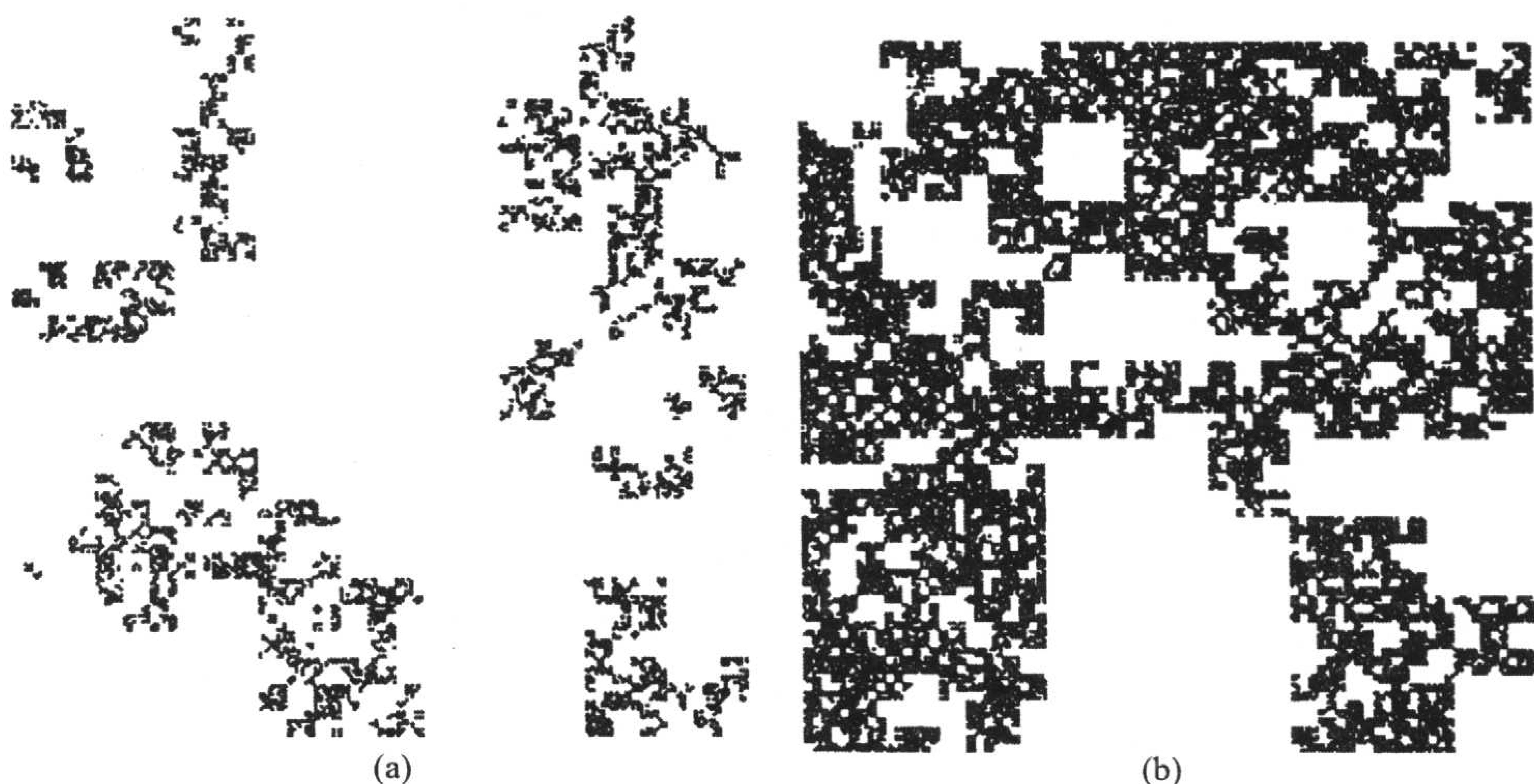



图 15.5 通过在 15.2 节所讨论的渗流过程来实现的随机分形, 其中 (a) $p$=0.6, (b) $p$=0.8

**证明** 设 $N$ 是 $E_1$ 中的正方形 (随机) 个数, 那么 $P(N=j)=\begin{pmatrix} 9 \\ j \end{pmatrix} p^j(1-p)^{9-j}$, 这里 $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ 是二项式系数, 所以由式 (15.8) 知, $F_p=\varnothing$ 的概率是下面方程的最小正根:

$$t=\sum_{j=0}^{9}\begin{pmatrix} 9 \\ j \end{pmatrix} p^j(1-p)^{9-j}t^j=(pt+1-p)^9.$$

由于 $E_1$ 中的每个正方形的边长都是 1/3, 所以式 (15.9) 变成

$$1=\mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^{N} C_j^s\right)=\mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^{N} 3^{-s}\right)=3^{-s}\mathrm{E}(N)=3^{-s}9p$$

(边长为 1/3 的 9 个正方形中的每一个都以概率 $p$ 被选中, 所以选中的数目的期望是 $9p$), 于是由定理 15.2, 在 $F_p$ 是非空的条件下, $F_p$ 的几乎必然的维数是 $\ln 9p/\ln 3$. □

下面简短地讨论一下当 $p$ 从 0 增加到 1 时, 随机集 $F_p$ 状态变化的情况：我们已经注意到了, 如果 $0<p\leqslant 1/9$, $F_p$ 几乎必然是空的; 如果 $1/9<p<1/3$, 以概率 1, 则或者 $F_p=\varnothing$, 或者 $\dim_{\mathrm{H}} F_p=\ln 9p/\ln 3<1$, 所以由命题 2.5 知 $F_p$ 是全不连通的. 在另一种极端情形, 如果 $p$ 接近 1, 在这个构造过程中的每一步有如此高比例的正方形被保留下来, 似乎有理由认为 $F_p$ 仍然接通正方形 $E_0$ 的左端和右端; 当这种情况发生时, 就说两边之间的渗流(percolation) 发生了. 将要证明的是当 $P$ 非常接

近于 1 时, 这种渗流的情况至少会发生; 但只得到似乎很可笑的下界 0.999, 这个数值肯定是可以大大减小的.

**命题 15.5** *如果* $0.999 < p < 1$, *则有一个正的概率 (事实上大于 0.999) 使得随机分形* $F_p$ *连接* $E_0$ *的左端和右端.*

*** 证明** 这个证明依赖于下面的观察, 如果 $I_1$ 和 $I_2$ 是 $E_k$ 中邻接的正方形, 并且 $I_1$ 和 $I_2$ 都包含 8 个或 9 个 $E_{k+1}$ 中的子正方形, 那么就至少有 $I_1$ 中的一个子正方形与 $I_2$ 中的一个子正方形是相连的, 通过 $I_1$ 和 $I_2$ 中的 $E_{k+1}$ 的正方形就形成了一个连通的整体.

称 $E_k$ 中的某个正方形是*充满的*(full), 如果它包含 $E_{k+1}$ 中的 8 个或 9 个正方形; 称 $E_k$ 中的某个正方形是*2 充满的*(2- full), 如果它包含 $E_{k+1}$ 中的 8 或 9 个充满的正方形; 类似地, 称 $E_k$ 中的某个正方形是 *$m$充满的*(m-full), 如果它包含 $E_{k+1}$ 中的 8 或 9 个 $(m-1)$ 充满的正方形. 由上所述, 如果 $E_0$ 是 $m$ 充满的, 那么 $E_0$ 的对边由 $E_m$ 中相连的正方形序列连接到了一起.

正方形 $E_0$ 是 $m$ 充满的 $(m \geqslant 1)$, 如果下列三个条件之一成立:

(a) $E_1$ 包含 9 个全是 $(m-1)$ 充满的正方形;

(b) $E_1$ 包含 9 个正方形, 其中 8 个是 $(m-1)$ 充满的;

(c) $E_1$ 包含 8 个全是 $(m-1)$ 充满的正方形.

这样, 如果 $p_m$ 是 $E_0$ 为 $m$ 充满的概率, 利用式 (1.16) 把这三种可能的概率相加起来, 并利用这个过程的自相似性, 如果 $m \geqslant 2$, 则可以得到

$$\begin{aligned} p_m &= p^9 p_{m-1}^9 + p^9 9 p_{m-1}^8 (1 - p_{m-1}) + 9p^8(1-p)p_{m-1}^8 \\ &= 9p^8 p_{m-1}^8 - 8p^9 p_{m-1}^9 \end{aligned} \tag{15.10}$$

进一步, 有 $p_1 = p^9 + 9p^8(1-p) = 9p^8 - 8p^9$, 所以, 对任意 $m \geqslant 1$, 存在一个由 $p_m = f(p_{m-1})$ 定义的离散动力系统, 这里 $p_0$=1 且

$$f(t) = 9p^8t^8 - 8p^9t^9. \tag{15.11}$$

假设 $p$=0.999, 那么式 (15.11) 变成

$$f(t) = 8.928\,251\,5t^8 - 7.928\,287\,4t^9$$

稍微计算可知 $t_0$=0.999 961 3 是 $f$ 的一个不动点; 当 $t_0 < t \leqslant 1$, 这个不动点在 $0 < f(t) - t_0 \leqslant \frac{1}{2}(t - t_0)$ 的意义下是稳定的. 由此可知, $p_m$ 是递减的并且当 $m \to \infty$ 时收敛到 $t_0$, 所以存在一个概率 $t_0 > 0$, 使得 $E_0$ 对所有的 $m$ 都是 $m$ 充满的. 当这种情况发生时, 对每个 $m$, $E_0$ 的相对两条边, 由 $E_m$ 中的正方形序列连接在一起, 所

以交集 $F=\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ 连接了 $E_0$ 的相对两条边. 于是, 如果 $p=0.999$, 有一个使渗流发生的正概率, 因此对更大的 $p$ 值更是如此. □

已经了解到, 如果 $0<p<1/3$, 以概率 1, $F_p$ 是空的或全不连通的. 另一方面, 如果 $p>0.999$, 那么有很高的渗流概率. 下一个定理指出, 对 $p$ 的每个值, 只能出现上述情形中的一种.

**定理 15.6** *有一个满足 $0.333<p_c<0.999$ 的临界数 $p_c$, 使得如果 $0<p<p_c$, 则 $F_p$ 以概率 1 是全不连通的, 但如果 $p_c<p<1$ 则有一个正的概率使得 $F_p$ 把 $E_0$ 的左端和右端连接起来.*

**证明思想** 假设 $p$ 是使 $F_p$ 有正的概率不是全不连通的. 那么 $F$ 中的某两个不同的点, 也有正的概率通过 $F$ 中的路径连接起来. 这意味着对某个 $k$, 有一个正的概率使得这个路径穿过 $E_k$ 的正方形相对的两边; 由这个构造的统计自相似的特点, 也有一个正的概率使 $E_0$ 的左边和右边通过一路径连接在一起. 显然, 如果 $F_p$ 以概率 1 是全不连通的, 那么如果 $p'<p$, $F'_p$ 也同样以概率 1 是全不连通的; 于是使得 $F_p$ 是全不连通的那个临界概率 $p_c$ 是这些 $p$ 值的上确界, 也就是定理已经得证. □

实验的结果表明, $0.7<p_c<0.8$.

随着 $p$ 值的增加在超过 $p_c$ 时表现出来的 $F_p$ 的形式的变化甚至比定理 15.6 指出的更具有戏剧性. 设 $F'_p$ 是通过在整个平面上铺瓦似的平铺 $F_p$ 的相互独立的随机样本而得到的随机集. 如果 $p<p_c$, 那么 $F'_p$ 几乎必然是全不连通的. 然而, 如果 $p\geqslant p_c$, 那么以概率 1, $F'_p$ 有一个单独的无界的连通部分. 这样当 $p$ 增加通过 $p_c$ 时, $F'_p$ 的孤立点突然合并形成基本上是一个整体的部分时, 发生了 “相变”. 这个证明的思想是, 如果 $p>p_c$, 那么 $F'_p$ 在两个不交的单位半径的圆盘中的给定部分, 就有一个正的概率使得它们可以通过 $F'_p$ 中的路径连接起来. 在 $F'_p$ 的一个无界的部分内, 有无穷多个这样的圆盘, 所以如果 $F'_p$ 有两个无界的部分, 那么, 以概率 1 它们能被连接在一起.

## 15.3 注记和参考文献

在 15.1 节典型讨论的各种类型的随机分形构造由 Mandelbrot(1974,1982), Kahane(1974), Peyrière(1974), Falconer(1986b), Mauldin and Williams(1986a), Graf(1987), Graf, Mauldin and Williams(1988), Olsen(1994) 以及 Hutchchinson and Rüschendorf(2000) 等给出.

Mandelbrot(1972) 给出了一个通过随机删除而得到的一个有趣的分形构造; 该内容同时可以参见 Kahane(1985), Zähle(1984) 和 Falconer(1997). 关于概率在分形中的其他应用, 见 Stoyan and Stoyan (1994) 以及 Falconer(1997).

Mandelbrot(1974) 提出了分形渗流模型, Chayes, Chayes and Durrett(1988) 详细地分析了相变; Dekking and Meester(1990) 重点讨论了模型的其他相变. Chayes(1995) 给出了关于分形渗流及其推广的清晰论述.

已经有很多关于"离散的"渗流的文章, 其中点是从大正方形网中随机地选出的 (见 Kesten(1982) 和 Grimmett(1987)), 并且这种情形与分形情况之间有很多平行的结果.

## 练　习

**15.1** 试寻找出如下构造的随机康托尔集的几乎必然的豪斯多夫维数: 在每一步的构造过程中, 以 1/2 的概率去掉每段区间中间 1/3 的部分; 以 1/2 的概率去掉每段区间中间 2/3 的部分.

**15.2** 考虑如下的随机 von Koch 曲线的构造. 从一单位长度的线段开始, 用 (向上的) 等边三角形的另两边来代替它; 以 1/2 的概率去掉中间 1/3 的部分. 按着通常的方法, 我们在余下的每条线段上重复这个过程. 证明: 这个随机分形的豪斯多夫维数以概率 1 为 1.

**15.3** 证明图 15.1 所描绘的随机 von Koch 曲线总是具有豪斯多夫维数 $s=\ln 4/\ln 3$, 并且是一个 $s$ 集.(这不是典型的随机构造.)

**15.4** 设 $0< p < 1$. 可以通过下面的方法来随机化 Sierpiński 垫的构造 (见图 0.3), 在每一步中, 以概率 $p$ 独立地选择三个被留下来的等边三角形的每一个. (这样, 我们就有了一个基于 Sierpiński 垫的渗流过程.) 证明: 如果 $p \leqslant 2/3$, 那么极限集 $F$ 以概率 1 是空的; 但是如果 $2/3< p < 1$, 那么 $F$ 以一个正的概率是非空的. 找出这个概率的一个表达式, 并证明: 如果给定 $F$ 是非空的, 那么以概率 1, 有 $\dim_{\mathrm{H}} F = \ln 3p/\ln 2$.

**15.5** 对于练习 15.4 刻划的随机 sierpiński 垫, 证明: 对任意 $p < 1$, $F$ 以概率 1 是全不连通的.(如果两个三角形在顶点连接, 就认为它们是相连的.)

**15.6** 考虑定理 15.1 分析过的随机康托尔集. 用 $\mathcal{H}^s_\infty(F)$ 表示式 (2.1) 中 $F$ 的任意覆盖和的下确界, 证明:

$$\mathcal{H}^s_\infty(F) = \min\{1, \mathcal{H}^s_\infty(F\bigcap I_1) + \mathcal{H}^s_\infty(F\bigcap I_2)\}$$

这里 $s$ 是式 (15.1) 的解. 应用统计自相似性推导出: 除非 $\mathbf{P}(C_1^s + C_2^s = 1) = 1$, 否则几乎必然地有 $\mathcal{H}^s_\infty(F) = 0$. 即 $\mathcal{H}^s(F) = 0$.

**15.7** 证明: 由式 (15.5) 给出的鞅 $X_k$ 是 $L^2$ 有界的, 即存在数 $m$, 使得对任意 $k$, 有 $\mathrm{E}(X_k^2) \leqslant m$. (提示: 对 $\gamma = \mathrm{E}(C_1^{2s} + C_2^{2s}) < 1$ 和常数 $a$, 证明 $\mathrm{E}(X_{k+1}^2 | \mathcal{F}_k) \leqslant X_k^2 + a\gamma^k$, 然后取无条件期望).

**15.8** 考虑一个分形渗流模型, 集 $F$ 的构造是以概率 $p$ 选择保留下的正方形得到的, 其中 $p_c < p < 1$. 证明以概率 1, 或者 $F = \varnothing$, 或者 $F$ 包含无穷多个非平凡的连通部分 (非平凡的连通部分意味着至少包含两个不同的点).

# 第 16 章　布朗运动和布朗曲面

1827 年, 植物学家布朗发现悬浮在液体里的微小颗粒沿非常不规则的轨道运动. 这与空气中烟尘微粒的类似现象最终都被解释为微粒间的分子碰撞的结果. 爱因斯坦发表了关于这种运动的数学研究成果, 这最终导致了使 Perrin 获得诺贝尔奖的阿伏加得罗数的计算.

1923 年, Wiener 提出了一个严格的数学模型, 它所描述的轨道与布朗运动中所观察到的类似. 在 3 维空间中, 这个 "Wiener 过程" 所描述的轨道是如此不规则, 以致它具有等于 2 的豪斯多夫维数. 这是一个具有分形外貌的自然现象的很好例子, 并且这个分形外貌是可以用简单的数学模型来解释的.

一条轨道可由函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ 来描述, 这里 $f(t)$ 是在时刻 $t$ 时粒子的位置. 可从两种不同的观点来研究 $f$. 其一, 认为轨道(trail) 或轨迹(image)$f([t_1,t_2])=\{f(t):t_1\leqslant t\leqslant t_2\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的子集, $t$ 仅被当作参数; 其二, 认为 $f$ 的图(graph) graph $f=\{(t,f(t)):t_1\leqslant t\leqslant t_2\}\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 为 $f$ 随时间变化的一个记录. 一般地, 布朗运动轨道和它的图都是分形.

在这一章里, 研究的目的是在函数空间上定义一个概率测度, 使可能发生的轨道类似于所观察到的布朗运动. 下面首先从研究经典布朗运动的分形结构开始, 然后考察一些变量, 它们已经被用来作为许多自然现象的模型, 如聚合物链、股市的价格以及拓扑曲面等.

## 16.1　布朗运动

首先定义 1 维情形的布朗运动, 然后把定义推广到高维情形.

为了引出定义, 首先考虑在实直线上作随机游动的粒子. 假设在很小的时间间隔 $\tau$ 内, 粒子随机地向左或向右运动一个小距离 $\delta$(这可能是一维情形中粒子在随机分子碰撞下的合理描述). 用 $X_\tau(t)$ 表示粒子在时间 $t$ 的位置. 如在时刻 $k\tau$, 粒子的位置为 $X_\tau(k\tau)$, 则 $X_\tau((k+1)\tau)$ 可能为 $X_\tau(k\tau)+\delta$ 或 $X_\tau(k\tau)-\delta$. 设在时刻 0, 粒子从原点开始运动, 则对 $t>0$, 在时刻 $t$ 粒子的位置由随机变量

$$X_\tau(t)=\delta(Y_1+\cdots+Y_{[t/\tau]})$$

所描述, 其中 $Y_1,Y_2,\cdots$ 为独立随机变量序列, 并且每个都以概率 1/2 等于 1, 以概率 1/2 等于 − 1, $[t/\tau]$ 表示小于或等于 $t/\tau$ 的最大整数. 用 $\delta=\sqrt{\tau}$ 来规范化步长,

则有

$$X_\tau(t) = \sqrt{\tau}(Y_1 + \cdots + Y_{[t/\tau]}). \tag{16.1}$$

由中心极限定理 (见式 1.26) 可知, 对固定的 $t$, 如果 $\tau$ 很小, 则因是 $Y_i$ 的均值为 0, 方差为 1, 所以 $X_\tau(t)$ 近似服从均值为 0, 方差为 $\tau[t/\tau] \simeq t$ 的正态分布. 同样, 如果 $t$ 和 $h$ 固定, $\tau$ 充分小, 则 $X_\tau(t+h) - X_\tau(t)$ 近似服从均值为 0, 方差为 $h$ 的正态分布. 如果 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_{2m}$, 则增量 $X_\tau(t_2) - X_\tau(t_1), X_\tau(t_4) - X_\tau(t_3), \cdots, X_\tau(t_{2m}) - X_\tau(t_{2m-1})$ 是相互独立的随机变量. 可以定义布朗运动为当 $\tau \to 0$ 时随机游动 $X_\tau(t)$ 的极限.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 为概率空间. 为达到研究的目的, 称 $X$ 为*随机过程*(random process) 或从 $[0,\infty)$ 到 $\mathbf{R}$ 的*随机函数*(random function), 假如对任一 $t$, $0 \leqslant t < \infty$, $X(t)$ 为随机变量. 有时, 仅考虑在有限区间 $[t_1, t_2]$ 上的随机函数, 在这种情形下, 也可作类似的讨论. (在随机过程的正式定义中必须加上 "可测性" 条件, 在这里不必涉及.) 当然, 我们将认为 $X$ 在样本空间 $\Omega$ 中的每一点 $\omega$ 都定义一个*样本函数*(sample function)$t \mapsto X(\omega, t)$. 因此, 把样本空间 $\Omega$ 中的点看为是函数 $X$: $[0,\infty) \to \mathbf{R}$ 的参数, 而且, 把 P 当成这个函数类上的概率测度.

定义*布朗运动*(Brownian motion) 或Wiener *过程*(Wiener process) 为满足下列条件的随机过程 $X$:

**(BM)** (i) 以概率 1 有 $X(0) = 0$(即过程从原点开始), 且 $X(t)$ 为 $t$ 的连续函数

(ii) 对任意 $t \geqslant 0$ 和 $h > 0$, 增量 $X(t+h) - X(t)$ 服从均值为 0, 方差为 $h$ 的正态分布, 所以

$$\mathrm{P}(X(t+h)) - X(t) \leqslant x) = (2\pi h)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-u^2}{2h}\right) \mathrm{d}u; \tag{16.2}$$

(iii) 如果 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \cdots \leqslant t_{2m}$, 则增量 $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \cdots, X(t_{2m}) - X(t_{2m-1})$ 相互独立.

注意, 从 (i) 及 (ii) 可立刻得出, 对于每一个 $t$, $X(t)$ 自身也服从均值为 0, 方差为 $t$ 的正态分布; 同时也可以立即看出, $X$ 的增量是*平稳的*(Stationary), 即 $X(t+h) - X(t)$ 的分布与 $t$ 无关.

首先要提出的问题就是, 是否实际存在满足条件(BM)的随机函数. 要证明布朗运动存在是非常困难的, 在这里也不想给出证明. 证明要用到正态分布的特殊性质. 例如, 给定 $X(t_2) - X(t_1)$ 与 $X(t_3) - X(t_2)$ 是独立的, 且分别服从均值为 0, 方差为 $t_2 - t_1$ 和 $t_3 - t_2$ 的正态分布, 那么 $X(t_3) - X(t_1)$ 必然服从均值为 0, 方差为 $t_3 - t_1$ 的正态分布 (见式 (1.24) 及以下等); 这种自相容性对于布朗运动的定义是本质的. $X(t)$ 是满足条件(BM)的连续过程当且仅当 $X(t)$ 是 $\tau \to 0$ 时随机游动 $X_\tau(t)$ 的极限, 这样的说法至少看起来似乎是合理的.

代替证明存在性, 我们介绍两种模拟布朗样本函数的方法, 比如用计算机. 事实上, 两种方法都可以作为存在性证明的基础. 第一种方法是利用随机游动逼近式 (16.1). 对 $1 \leqslant i \leqslant m$, 用 "掷硬币" 来决定 $Y_i$ 是取 1 还是 $-1$, 其中 $m$ 充分大, $X_\tau(t)$ 可以据此描绘出来. 若 $\tau$ 与 $t$ 相比很小, 那么这就给出了布朗样本函数一个很好的逼近.

另外, 利用 "随机中点位移" 法可以用来得到样本函数 $X$: $[0,1] \to \mathbf{R}$. 对 $0 \leqslant k \leqslant 2^j$, 这里通过对 $j$ 作归纳来定义 $X(k2^{-j})$ 的值, 设 $X(0) = 0$, 首先从均值为 0, 方差为 1 的正态分布中随机地选取 $X(1)$; 下一步又从均值为 $(X(0)+X(1))/2$, 方差为 1/2 的正态分布中选取 $X(1/2)$; 接着再选出 $X(1/4)$ 和 $X(3/4)$; 并如此继续下去 $\cdots$. 在第 $j$ 步, 对于奇数 $k$, 值 $X(k2^{-j})$ 从具有均值为 $(X((k-1)2^{-j})+X((k+1)2^{-j}))/2$, 方差为 $2^{-j}$ 的正态分布中独立地选出. 这个过程决定了 $X(t)$ 在所有二进制点 $t = k2^{-j}$ 的值. 假设 $X$ 是连续的, 则 $X$ 被完全决定. 应用正态分布的性质, 可以证明这样生成的函数有条件(**BM**)给出的分布.

区间 $[0,\pi]$ 上的布朗运动具有如下的傅里叶展开式:

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}C_0 t + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\sin kt}{k},$$

其中 $C_k$ 相互独立地服从均值为 0, 方差为 1 的正态分布. 随机地选择 $C_k$ 并且截短上面的序列, 可以得到近似的样本函数, 图 16.1 显示了布朗样本函数的图.

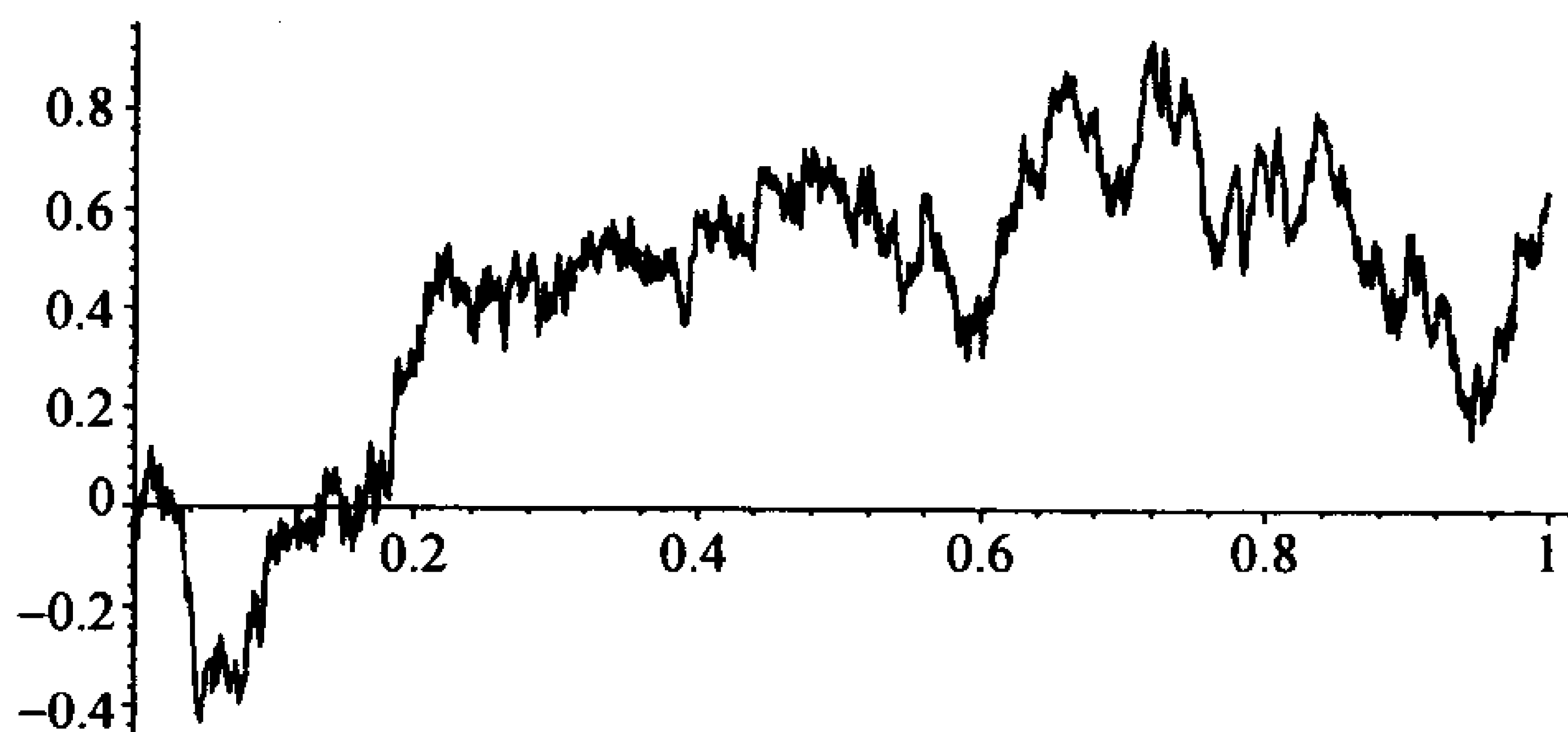



图 16.1 显示布朗运动的图

容易将布朗运动的定义从 $\mathbf{R}$ 推广到 $\mathbf{R}^n$ 上: 在 $\mathbf{R}^n$ 上定义布朗运动, 使其坐标分量都是独立的 1 维布朗运动. 所以, 称由 $X(t) = (X_1(t), \cdots, X_n(t))$ 给出的 $X : [0,\infty] \to \mathbf{R}^n$ 为某概率空间上的$n$ *维布朗运动*, 如果对每一个 $i$, 随机过程 $X_i(t)$ 是 1 维布朗运动, 并且对任意的时间集 $t_1, \cdots, t_n, X_1(t_1), \cdots, X_n(t_n)$ 是相互独立的. 图 16.2 给出了 $\mathbf{R}^2$ 中布朗运动的一个样本轨道.

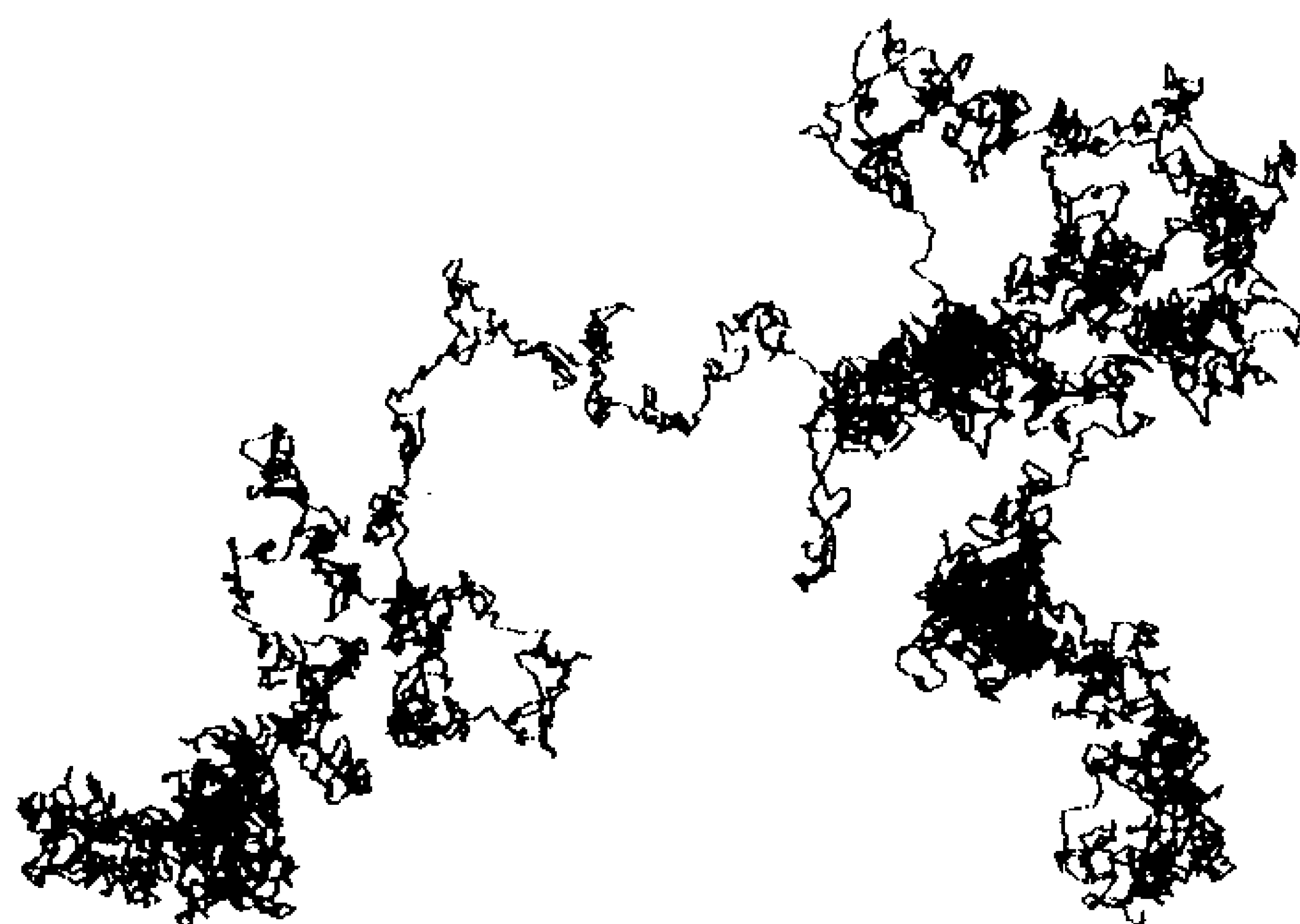


图 16.2 $\mathbf{R}^2$ 中布朗轨道的模拟

由定义, $X(t)$ 到每一坐标轴的射影为 1 维布朗运动. 然而, 各个坐标轴在这一点上并没有什么区别: 因为 $n$ 维布朗运动是各向同性的(isotropic), 即它在每一方向上都有同样的特征. 为了说明这一点, 并为了方便, 下面考虑 2 维布朗运动 $X(t)=(X_1(t),X_2(t))$, 如果用 $L_\theta$ 表示通过原点且方向角为 $\theta$ 直线, 则 $X(t)$ 到 $L_\theta$ 上的射影是 $X_1(t)\cos\theta+X_2(t)\sin\theta$. 对于 $t\geqslant 0$ 和 $h>0$, 随机变量 $X_1(t+h)-X_1(t)$ 和 $X_2(t+h)-X_2(t)$ 相互独立, 且都服从均值为 0, 方差为 $h$ 的正态分布, 所以, 在 $L_\theta$ 上射影的增量由下式给出:

$$(X_1(t+h)-X_1(t))\cos\theta+(X_2(t+h)-X_2(t))\sin\theta,$$

它服从均值为 0, 方差为 $h\cos^2\theta+h\sin^2\theta=h$ 的正态分布 (见式 (1.24) 及以下等). 同样, 射影的增量也是相互独立的, 所以对任意的角 $\theta$, $X(t)$ 到 $L_\theta$ 上的射影为 1 维布朗运动.

若 $\gamma>0$, 用 $\gamma h$ 替代 $h$, 用 $\gamma^{1/2}x$ 替代 $x$, 并不改变式 (16.2) 右边的值 (在积分中做变换 $u_1=u\gamma^{-1/2}$). 所以, 对任意 $x_i$, 有

$$\mathrm{P}(X_i(t+h)-X_i(t)\leqslant x_i)=\mathrm{P}\big(X_i(\gamma t+\gamma h)-X_i(\gamma t)\leqslant \gamma^{1/2}x_i\big)$$

由此推出 $X(t)$ 与 $\gamma^{-1/2}X(\gamma t)$ 有相同的分布. 用系数 $\gamma$ 改变时间间隔, 用系数 $\gamma^{1/2}$ 改变空间尺度, 得到的过程与原来过程是不可分辨, 所以称布朗运动 $X(t)$ 和它的图是统计自仿射的; 但是称布朗轨道是统计自相似的, 即轨道 $\{X(t):0\leqslant t\leqslant T\}$ 与轨道 $\{X(\gamma t):0\leqslant t\leqslant \gamma T\}$ 除了相差一个比例常数 $\gamma^{1/2}$ 外, 它们是不可分辨的.

设 $X(t)=(X_1(t),\cdots,X_n(t))$ 是 $n$ 维布朗运动, 因为对每一 $i$, $X_i(t+h)-X_i(t)$ 服从独立的正态分布, 由式 (16.2) 可知, 如果 $[a_i,b_i]$ 为区间, 则

$$\mathrm{P}(X_i(t+h)-X_i(t)\in[a_i,b_i])=(2\pi h)^{-1/2}\int_{a_i}^{b_i}\exp\Big(-\frac{x_i^2}{2h}\Big)\mathrm{d}x_i.$$

因此, 如果 $E$ 为坐标平行体 $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X(t+h)-X(t)\in E)&=\prod_{i=1}^{n}\left[(2\pi h)^{-1/2}\int_{a_i}^{b_i}\exp\left(-\frac{x_i^2}{2h}\right)\mathrm{d}x_i\right]\\&=(2\pi h)^{-n/2}\int_E\exp\left(-\frac{|x|^2}{2h}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{16.3}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$. 利用这样的平行体的并的逼近集, 对任何博雷尔集 $E$, 式 (16.3) 也是成立的. 所以, 如果取 $E$ 为球 $B(0,\rho)$, 并且变换成极坐标, 则有

$$\mathrm{P}(|X(t+h)-X(t)|\leqslant\rho)=ch^{-n/2}\int_{r=0}^{\rho}r^{n-1}\exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right)\mathrm{d}r\tag{16.4}$$

其中 $c=2\pi^{-n/2}a_n$, 而 $a_n$ 是球 $B(0,1)$ 的 $(n-1)$ 维表面积.

布朗运动的一个基本性质是, 对任意 $\lambda<1/2$, 它的样本函数以概率 1 满足指数为 $\lambda$ 的 Hölder 条件.

**命题 16.1** 设 $0<\lambda<1/2$, 则布朗样本函数 $X:[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 以概率 1 满足对某个 $H_0>0$,

$$|X(t+h)-X(t)|\leqslant b|h|^{\lambda}\quad(|h|<H_0),\tag{16.5}$$

这里 $b$ 仅依赖于 $\lambda$.

**证明** 若 $h>0$, 由式 (16.4) 作变换 $u=rh^{-1/2}$, 并且做一些适当放大后有

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X(t+h)-X(t)|>h^{\lambda})&=ch^{-n/2}\int_{h^{\lambda}}^{\infty}r^{n-1}\exp\left(\frac{-r^2}{2h}\right)\mathrm{d}r\\&=c\int_{h^{\lambda-1/2}}^{\infty}u^{n-1}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u\leqslant c_1\int_{h^{\lambda-1/2}}^{\infty}\exp(-u)\mathrm{d}u\\&=c_1\exp(-h^{\lambda-1/2})\leqslant c_2h^{-2}\end{aligned}\tag{16.6}$$

这里 $c_1$ 和 $c_2$ 不依赖于 $h$ 或 $t$. 取 $[t,t+h]$ 为二进制区间 $[(m-1)2^{-j},m2^{-j}]$, 则可以得到:

$$\mathrm{P}(|X((m-1)2^{-j})-X(m2^{-j})|>2^{-j\lambda}\text{ 对某些 }j\geqslant k\text{ 和 }1\leqslant m\leqslant 2^j\text{成立})$$

$$\leqslant c_2\sum_{j=k}^{\infty}2^j2^{-2j}=\ c_2 2^{-k+1}.$$

于是, 以概率 1 存在整数 $k$, 使得对所有 $j>k$ 及 $1\leqslant m\leqslant 2^j$ 有下式成立:

$$|X((m-1)2^{-j})-X(m2^{-j})|\leqslant 2^{-j\lambda}\tag{16.7}$$

如果 $h < H_0 = 2^{-k}$, 可能要除去端点, 区间 $[t, t+h]$ 可以表为相邻的形式为 $[(m-1)2^{-j}, m2^{-j}]$ 的二进制区间的可数并, 这里 $2^{-j} \leqslant h$, 且任何长度相等的区间不能多于两个 (取 $[t, t+h]$ 中不包含于任何其他这样区间的所有二进制区间). 则应用 $X$ 的连续性, 如果 $k$ 是满足 $2^{-k} \leqslant h$ 的最小整数, 则

$$|X(t) - X(t+h)| \leqslant 2\sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\lambda} = \frac{2^{-k\lambda}2}{(1-2^{-\lambda})} \leqslant \frac{2h^{\lambda}}{(1-2^{-\lambda})} \qquad \square$$

**定理 16.2**　$\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 中的布朗轨道的豪斯多夫维数和盒维数都以概率 1 等于 2.

**证明**　对每个 $\lambda < 1/2$, $X : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ 以概率 1 满足式 (16.5) 的 Hölder 条件, 所以由命题 2.3 得,

$$\dim_{\mathrm{H}} X[0,1] \leqslant (1/\lambda) \dim_{\mathrm{H}} [0,1] < 1/\lambda,$$

对盒维数也有类似的不等式. 于是, 几乎所有的布朗轨道的维数至多为 2.

为估计下界, 要用到位势理论方法: 取 $1 < s < 2$, 对给定的 $t$ 和 $h$, 用 $p(\rho)$ 表示式 (16.4) 中的表达式. 取数学期望, 并且在计算中做变换 $\omega = r^2/h$ 之后, 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(|X(t+h) - X(t)|^{-s}) &= \int_0^{\infty} r^{-s} \mathrm{d}p(r) \\
&= ch^{-n/2} \int_0^{\infty} r^{-s+n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right) \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2} ch^{-s/2} \int_0^{\infty} \omega^{(n-s-2)/2} \exp\left(-\frac{\omega}{2}\right) \mathrm{d}\omega \\
&= c_1 h^{-s/2}
\end{aligned} \tag{16.8}$$

其中 $c_1$ 与 $h, t$ 无关. 因为 $s < 2$, 所以

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big(\int_0^1 \int_0^1 |X(t) - X(u)|^{-s} \mathrm{d}t\mathrm{d}u\Big) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \mathrm{E}|X(t) - X(u)|^{-s} \mathrm{d}t\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \int_0^1 c_1 |t-u|^{-s/2} \mathrm{d}t\mathrm{d}u < \infty.
\end{aligned} \tag{16.9}$$

在轨道 $f$ 上有一自然方式定义的质量分布 $\mu_f$, 使得一个集的质量等于轨道在集内所耗的时间, 即 $\mu_f(A) = \mathcal{L}\{t : 0 \leqslant t \leqslant 1,\ 且\ f(t) \in A\}$, 这里 $\mathcal{L}$ 为勒贝格测度. 则对任意函数 $g$, $\int g(x)\mathrm{d}\mu_f(x) = \int_0^1 g(f(t))\mathrm{d}t$, 所以式 (16.9) 变成

$$\mathrm{E}\Big(\iint |x-y|^{-s} \mathrm{d}\mu_x(x)\mathrm{d}\mu_x(y)\Big) < \infty.$$

因此如果 $s<2$, 则 $\iint |x-y|^{-s}\mathrm{d}\mu_x(x)\mathrm{d}\mu_x(y)<\infty$ 以概率 1 成立, 这里 $\mu_x$ 为 $X(t)$ 上的质量分布, 所以由定理 4.13(a) 知 $\dim_{\mathrm{H}} X[0,1]\geqslant s$. □

事实上, $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 上的布朗轨道的 2 维豪斯多夫测度以概率 1 为 0. 利用 2.5 节给出的更精细的维数定义进行细致的讨论, 可以证明, 当 $n=2$ 时, 对应于由函数 $h(t)=t^2\ln(1/t)\ln\ln\ln(1/t)$ 定义的测度, 轨道 $X[0,1]$ 以概率 1 有正的有限测度, 当 $n\geqslant 3$ 时, 对应于 $h(t)=t^2\ln\ln(1/t)$ 定义的测度, 轨道 $X[0,1]$ 也以概率 1 有正的有限测度. 在这个意义下, 布朗轨道的维数 "以对数小于"2.

关于布朗轨道的一个明显的定性问题是, 它们是否是简单曲线, 或者说是否自相交. 给定函数 $f$, 称 $x$ 为$k$ 重(multiplicity $k$) 点, 如果对 $k$ 个互不相同的 $t$ 值, $f(t)=x$. 维数方法可以用来确定布朗函数是否有多重点.

**定理 16.3** 布朗样本函数 $X:[0,\infty]\to\mathbf{R}^n$ 以概率 1 有如下的重点:

$n=2$ 时, 对于每个正整数 $k$ 都有 $k$ 重点;

$n=3$ 时, 有 2 重点但没有 3 重点;

$n=4$ 时, 没有重点.

**证明思想** 一个方法是应用第 8 章的交集定理. 对于 $n=3$ 的情形, 假设 $\dim_{\mathrm{H}}(X[0,1])\bigcap X([2,3])<1$ 以概率 1 成立. 应用布朗运动的各向同性和比例性质, 不难看到对任意相似变换 $\sigma$, 以概率 1 有 $\dim_{\mathrm{H}}(X([0,1])\bigcap\sigma(X([2,3])))<1$. 由此推出对几乎所有的相似变换, 以概率 1 有 $\dim_{\mathrm{H}}(X([0,1])\bigcap\sigma(X([2,3])))<1$. 由定理 16.2, 以概率 1 有 $\dim_{\mathrm{H}} X([0,1])=\dim_{\mathrm{B}} X([0,1])=2$, 这与定理 8.2(a) 矛盾. 于是可以得到的结论, 以正的概率, 比如说以概率 $p$ 有 $\dim_{\mathrm{H}}(X[0,1])\bigcap(X([2,3]))=1$; 那么应用 $X(t)$ 的统计自相似性, 可以知道对任意 $t$ 和 $\delta$, 同样以概率 $p$, 有 $\dim_{\mathrm{H}}(X([t,t+\delta])\bigcap X([t+2\delta,t+3\delta]))=1$. 因为增量是独立的, 所以 2 重点集的豪斯多夫维数以概率 1 为 1.

类似的技巧可以用来证明其他的结果. □

确定布朗图的几乎必然维数的方法与布朗轨道类似.

**定理 16.4** 布朗样本函数的图 $X:[0,1]\to\mathbf{R}$ 的豪斯多夫维数与盒维数都以概率 1 等于 $1\frac{1}{2}$.

**证明** 显然, 由 Hölder 条件 (16.5) 和推论 11.2(a), 对任意 $\lambda<1/2$, $X$ 的图的豪斯多夫维数与上盒维数以概率 1 至多为 $2-\lambda$, 所以维数至多为 $1\frac{1}{2}$. 为了估计下界, 与定理 16.2 的证明一样, 把积分区域分成两部分, 并分别用两种方法估计积分, 可得

$$\mathrm{E}((|X(t+h)-X(t)|^2+h^2)^{-s/2})=\int_0^\infty (r^2+h^2)^{-s/2}\mathrm{d}p(r)$$

$$
\begin{aligned}
&= ch^{-1/2}\int_0^{\infty}(r^2+h^2)^{-s/2}\exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right)\mathrm{d}r\\
&= \frac{1}{2}c\int_0^{\infty}(wh+h^2)^{-s/2}w^{-1/2}\exp\left(\frac{-w}{2}\right)\mathrm{d}w\\
&\leqslant \frac{1}{2}c\int_0^{k}(h^2)^{-s/2}w^{-1/2}\mathrm{d}w+\frac{1}{2}c\int_k^{\infty}(wh)^{-s/2}w^{-1/2}\mathrm{d}w\\
&\leqslant c_1h^{1/2-s}
\end{aligned}
$$

可以用下式:

$$\mu_f(A)=\mathcal{L}\{t:0\leqslant t\leqslant 1,\ \text{且}\ (t,f(t))\in A\}$$

定义的 $t$ 轴上的勒贝格测度, 作为函数 $f$ 图上的质量分布 $\mu_f$, 应用勾股 (Pythagoras) 定理知, 如果 $s<1\frac{1}{2}$,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\iint|x-y|^{-s}\mathrm{d}\mu_X(x)\mathrm{d}\mu_X(y)\right)\\
&=\int_0^1\int_0^1\mathrm{E}((|X(t)-X(u)|^2+|t-u|^2)^{-s/2})\mathrm{d}t\mathrm{d}u\\
&\leqslant\int_0^1\int_0^1 c_1|t-u|^{1/2-s}\mathrm{d}t\mathrm{d}u<\infty.
\end{aligned}
$$

由于在 $X$ 的图上的质量分布 $\mu_X$ 以概率 1 是正的、有限的而且具有有限的 $s$ 能, 所以由定理 4.13(a), 可以得出 $\dim_{\mathrm{H}}\mathrm{graph}X\geqslant 1\frac{1}{2}$. □

因为以概率 1, 在任何区间上, $X$ 的图的维数都为 $1\frac{1}{2}$, 所以立即得到布朗函数尽管是连续但不是连续可微的; 事实上, 布朗函数以概率 1 处处不可微.

如布朗轨道一样, 布朗函数图的维数以对数小于 $1\frac{1}{2}$; 对应于函数 $h(t)=t^{3/2}\ln\ln(1/t)$ 定义的测度, 在区域 $[0,1]$ 上的 $X$ 的图有正的有限测度.

布朗样本函数取特殊值的时间集通常是很令人感兴趣的. 若 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 为一函数, 对任意 $c$ 值, 可以定义*水平集*(level set)$f^{-1}(c)=\{t:f(t)=c\}$; 水平集本质上是 $f$ 的图与平行于 $t$ 轴的直线的交.

**命题 16.5** *对几乎所有的 $c$(在 1 维勒贝格测度意义下), 布朗样本函数 $X:[0,1]\to\mathbf{R}$ 以概率 1 满足 $\dim_{\mathrm{H}}X^{-1}(c)\leqslant 1/2$; 更进一步, 对任意给定的 $c$, 以正的概率, $\dim_{\mathrm{H}}X^{-1}(c)=1/2$.*

**证明注记** 对几乎所有的 $c$, 必然以概率 1 有:

$$\dim_{\mathrm{H}}X^{-1}(c)=\dim_{\mathrm{H}}((\mathrm{graph}X)\bigcap L_c)\leqslant\frac{1}{2},$$

这里 $L_c$ 是直线 $y=c$, 否则由推论 7.10, 意味着 $\dim_{\mathrm{H}}\mathrm{graph}X>1\frac{1}{2}$, 这与定理 16.4 是矛盾的.

证明以正概率有 $\dim_H X^{-1}(c) = 1/2$ 是非常困难的, 相应的论证与证明定理 8.2 的表述似乎有些相似. □

## 16.2 分数布朗运动

尽管布朗运动具有中心理论的重要性, 但对于其他多种目的来说, 它的局限性是太大了. 布朗样本函数图的维数几乎必然等于 $1\frac{1}{2}$, 但是, 为了模拟各种不同的模型, 还需要有相应的函数图具有其他维数的随机函数.

布朗运动 $X : [0, \infty] \to \mathbf{R}$ 是*高斯过程*(Gaussian process), 这意味着对 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_m$ 和系数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, 随机变量 $\lambda_1 X(t_1) + \cdots + \lambda_m X(t_m)$ 也是正态变量(称 $((X(t_1), \cdots, X(t_m))$ 是*多元正态变量*(multivariate normal)). 布朗运动具有平稳的独立增量, 且具有有限方差, 实际上它是唯一具有这种概率分布的函数. 为了得到不同特征的样本函数, 需要放宽一个或多于一个的上述条件.

通常有两种变化: *分数布朗运动*的增量是服从正态分布的但不再是相互独立的; 而另一方面, Lévy 过程取消了要求是正态分布的条件, 并由此可以得出不连续的函数. 为了简单起见, 这里仅讨论这些过程在 1 维情形下的图, 对取值在 $n$ 维空间的相应过程也可以类似地定义.

指数为 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 的分数布朗运动, 是定义在某概率空间上的一高斯过程 $X : [0, \infty] \to \mathbf{R}$, 使得

**(FBM)** (i) $X(t)$ 以概率 1 连续, 且 $X(0) = 0$,

(ii) 对任意 $t \geqslant 0$ 和 $h > 0$, 增量 $X(t+h) - X(t)$ 服从均值为零, 方差为 $h^{2\alpha}$ 的正态分布, 所以,

$$\mathrm{P}(X(t+h) - X(t) \leqslant x) = (2\pi)^{-1/2} h^{-\alpha} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-u^2/2h^{2\alpha}\right) \mathrm{d}u. \tag{16.10}$$

可以证明, 对 $0 < \alpha < 1$, 满足**(FBM)**条件的过程是存在的. 图 16.3 给出了不同 $\alpha$ 值的分数布朗运动的图.

上面的定义蕴含增量 $X(t+h) - X(t)$ 是平稳的, 即它们具有不依赖于 $t$ 的概率分布. 然而, 除去 $\alpha = 1/2$ 的布朗情形, 由**(FBM)**给定的函数的分布不能有独立的增量. 由条件 (i) 和 (ii) 可知, $\mathrm{E}(X(t))^2 = t^{2\alpha}$, 并且

$$\mathrm{E}\left((X(t+h) - X(t))^2\right) = h^{2\alpha},$$

由此可以证明:

$$\mathrm{E}(X(t)(X(t+h)) = \frac{1}{2}[t^{2\alpha} + (t+h)^{2\alpha} - h^{2\alpha}],$$

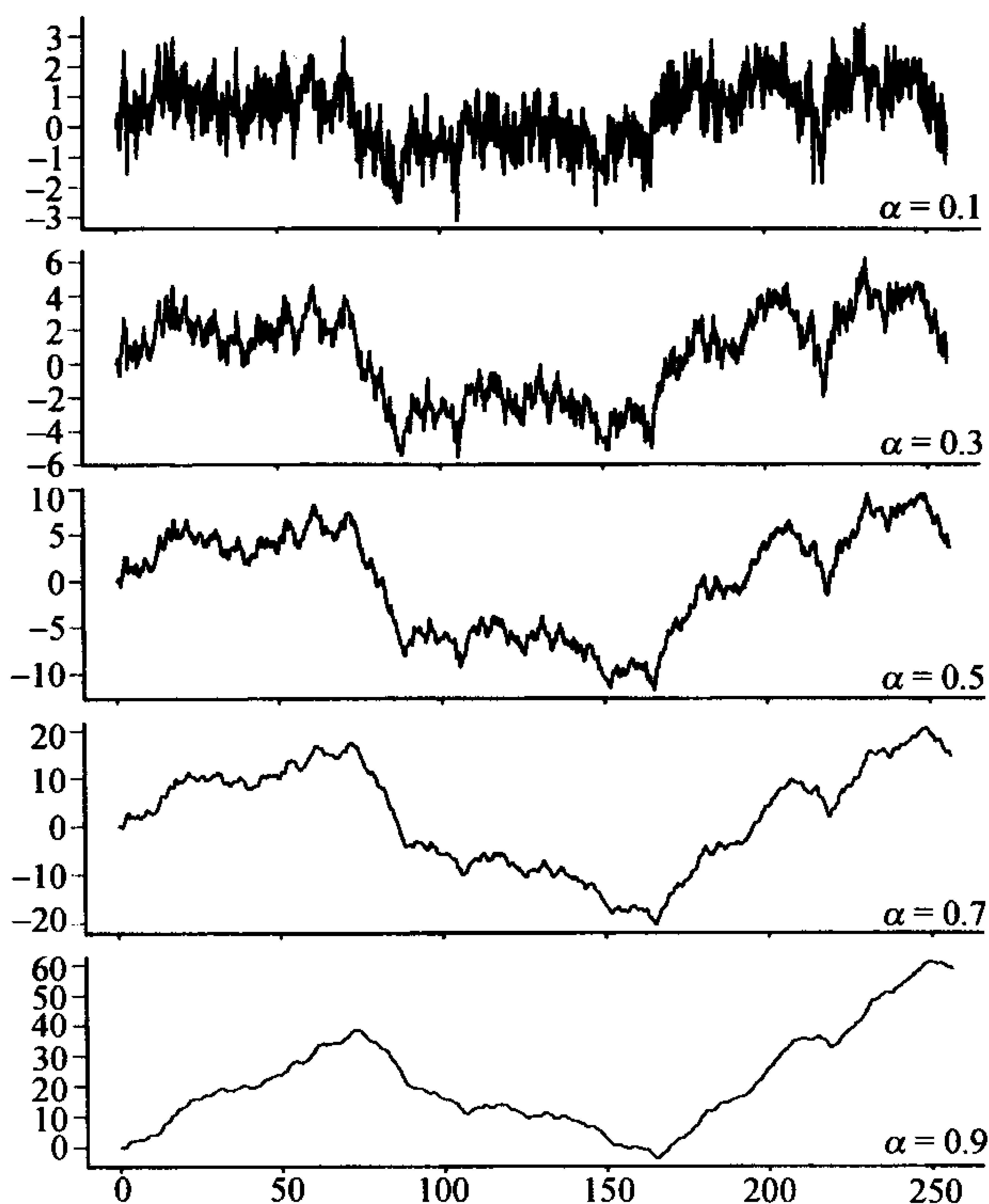



图 16.3 $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ 时指数为 $\alpha$ 的分数布朗函数的实现

所以

$$\mathrm{E}(X(t)(X(t+h) - X(t))) = \frac{1}{2}[(t+h)^{2\alpha} - t^{2\alpha} - h^{2\alpha}], \tag{16.11}$$

当 $\alpha \neq 1/2$ 时, 它是非零的; 因此 $\mathrm{E}((X(t) - X(0))(X(t+h) - X(t)))$ 为正或为负由 $\alpha > 1/2$ 或 $\alpha < 1/2$ 来决定, 于是, 增量不独立. 如果 $\alpha > 1/2$, 则 $X(t) - X(0)$ 和 $X(t+h) - X(t)$ 趋向于同号; 所以, 假如 $X(t)$ 在过去有增加的趋向, 则它在将来也趋向于增加. 类似地, 如果 $\alpha < 1/2$, 则 $X(t) - X(0)$ 和 $X(t+h) - X(t)$ 趋向于反号. 再注意到由条件式 (16.10) 知, 该过程具有自仿射性, 即对 $\gamma < 0$, 改变比例的轨道 $\gamma^{-\alpha} X(\gamma t)$ 有与 $X(t)$ 相同的统计分布.

分数布朗图的几乎必然维数可以用与严格布朗情形相类似的方法来决定.

**命题 16.6** *设 $0 < \lambda < \alpha$, 如果存在 $H_0 > 0$ 及 $b > 0$, 满足 $|h| < H_0$, 则指数为 $\alpha$ 的布朗样本函数 $X : [0,1] \to \mathbf{R}$ 以概率 1 有*

$$|X(t+h) - X(t)| \leqslant b|h|^{\lambda} \tag{16.12}$$

**证明注记** 设 $\lambda < 1/2$, 用式 (16.10) 替代式 (16.4), 证明过程如命题 16.1 一样. 然而, 若 $\alpha > \lambda \geqslant 1/2$, 这导致用估计 $c_2 h^{1/2-\alpha}$ 来替代式 (16.6) 中相应的估计, 而且

需要用非常繁复的概率论技巧, 来证明 Hölder 条件 (16.12) 对任意的 $t$ 是一致成立的. □

**定理 16.7** 指数为 $\alpha$ 的布朗样本函数 $X:[0,1]\to\mathbf{R}$ 的图的豪斯多夫和盒维数以概率 1 为 $2-\alpha$.

**证明** 由推论 11.2(a) 和 Hölder 条件 (16.12) 可以证明维数几乎处处最多为 $2-\alpha$. 下界可以像定理 16.4 中应用概率分布式 (16.10) 得出. □

在 11.2 节讨论的自相关理论可以应用到分数布朗函数. 为了方便起见, 设 $X$ 对所有时间有定义, 即 $X:(-\infty,\infty)\to\mathbf{R}$, 这仅要求对定义 (**FBM**) 进行稍微修改. 因为方差 $\mathrm{E}(|X(t+h)-X(t)|^2)$ 随 $h$ 趋于无穷, 因此有

$$\lim_{T\to\infty}\mathrm{E}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)^2\mathrm{d}t\right)=\infty.$$

所以, 样本函数的均方差趋向于无穷. 然而

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X(t+h)-X(t))^2\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathrm{E}(X(t+h)-X(t))^2\mathrm{d}t=h^{2\alpha}.\end{aligned}$$

可以推出 "平均的" 样本函数满足

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X(t+h)-X(t))^2\mathrm{d}t\simeq ch^{2\alpha}$$

根据式 (11.18) 和式 (11.19), 这确实是相应于维数为 $2-\alpha$ 的图. 由此进一步地平行考虑, 我们可以期望 $X(t)$ 的由式 (11.15) 定义的幂谱近似等于 $1/\omega^{1+2\alpha}$.

因为增量之间不再是独立的, 模拟指数为 $\alpha$ 的分数布朗运动比模拟布朗运动困难的多. 然而, 借助功能强大的现代计算机, 精确地模拟它还是有可能的. 为了在点集 $t_1,\cdots,t_k$ 上实现指数为 $\alpha$ 的分数布朗运动, 可以考虑到由协方差矩阵给出 $\boldsymbol{X}$ 的协方差:

$$A_{i,j}=\mathrm{E}(X(t_i)X(t_j))=\frac{1}{2}(|t_i|^{2\alpha}+|t_j|^{2\alpha}-|t_i-t_j|^{2\alpha}).$$

于是, 如果 $\boldsymbol{M}$ 是满足 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 的矩阵, 其中右上角 T 表示矩阵的转置, 又设 $\boldsymbol{V}=(V_1,\cdots,V_k)$ 是由相互独立的随机变量组成的随机向量, 其中 $V_i$ 都服从均值为 0, 方差为 1 的标准正态分布, 则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t_i)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$ 在点 $t_i$ 具有指数为 $\alpha$ 的分数布朗运动的分布. 为看清这个结论, 下面利用矩阵符号验证对应的协方差:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X(t_i)X(t_j))&=\mathrm{E}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})=\mathrm{E}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{V})^{\mathrm{T}})\\&=\mathrm{E}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{M}\mathrm{E}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{I}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

所以, 根据 $V_i$ 选取出一个具有独立的标准正态分布的随机数序列, 乘积 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{MV}$ 就给出了指数为 $\alpha$ 的分数布朗运动的一个实现. 当 $k$ 较大时, 寻找矩阵 $\boldsymbol{M}$ 使 $\boldsymbol{A}$ 具有 "Choleski 分解" $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}$ 的计算量是相当巨大的, 已经有使这个计算变得相对容易的各种数值计算方法[①].

另一种构造具有类似于指数为 $\alpha$ 的布朗函数特征的函数的方法, 是使 Weierstrass 函数 (11.4) 随机化. 考虑随机函数

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\lambda^{-\alpha k}\sin(\lambda^k t+A_k) \tag{16.13}$$

这里 $\lambda>1$, $C_K$ 是服从均值为 0, 方差为 1 的正态分布的独立随机变量, "位相" $A_k$ 是相互独立的, 并都服从 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布. 显然, $\mathrm{E}(X(t+h)-X(t))=0$, 而且利用正弦和余弦函数的差分公式, 以及 $k=j$ 时 $\mathrm{E}(C_kC_j)=1$ 和 $k\neq j$ 时 $\mathrm{E}(C_kC_j)=1$, 及 $\cos^2(\alpha+A_k)$ 的均值等于 1/2, 可以得到:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(X(t+h)-X(t))^2\\ =&\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}C_k\lambda^{-\alpha k}2\sin\left(\frac{1}{2}\lambda^k h\right)\cos\left(\lambda^k\left(t+\frac{1}{2}h\right)+A_k\right)\right)^2\\ =&2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-2\alpha k}\sin^2\left(\frac{1}{2}\lambda^k h\right).\end{aligned}$$

适当地选择 $N$, 使得它满足 $\lambda^{-(N+1)}\leqslant h<\lambda^{-N}$, 则对 $h<1$, 在 $0<c_1\leqslant\mathrm{E}(X(t+h)-X(t))^2/h^{2\alpha}\leqslant c_2<\infty$ 的意义下, 又可以得出:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(X(t+h)-X(t))^2\\ \simeq&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\lambda^{-2\alpha k}\lambda^{2k}h^2+2\sum_{k=N+1}^{\infty}\lambda^{-2\alpha k}\simeq c\lambda^{-2\alpha N}\simeq ch^{2\alpha}\end{aligned}$$

所以式 (16.13) 有类似于指数为 $\alpha$ 的分数布朗运动的某些统计特征, 而且提供了绘制各种维数的随机图的合适方法. 这种函数经常用于分形模型, $\alpha$=0.8 时相应于维数是 1.2 的图, 它像是 "山峰的轮廓线".

---

① 上述叙述表示方法上有明显的缺陷. 在前一个式子中 $A_{i,j}=\mathrm{E}(X(t_i)X(t_j))$ 是表示协方差矩阵 $\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 中的一个元素, 而在这个式子里 $\mathrm{E}(X(t_i)X(t_j))$ 却表示矩阵 $\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 这显然是不合适的; 另外这段表示的向量应当是列向量, 如果像文中写的行向量 $\boldsymbol{V}=(V_1,\cdots,V_k)$, 那么 $\boldsymbol{X}=X(t_i)=\boldsymbol{MV}$ 就没有办法乘了. 但由于这里与主要内容关系不大, 而且都是线性代数的基本内容, 且上下文的意思还是很清楚的, 因此在译稿中对这些不当的表示进行改动, 读者在阅读这段时请加以注意.

—— 译者注

正如所料，指数为 $\alpha$ 的布朗样本函数的水平集典型地有维数 $1-\alpha$. 推广命题 16.5 可以得到：对几乎所有的 $c$ 以概率 1, 有 $\dim_{\mathrm{H}} X^{-1}(c) \leqslant 1-\alpha$, 而同样对给定的 $c$, 以正概率有 $\dim_{\mathrm{H}} X^{-1}(c) = 1-\alpha$.

分数布朗运动的进一步推广则是*多重分形布朗运动*(multifractional Brownian motion), 当与 $t$ 很接近时, 多重分形布朗运动的形状看起来像是指数为 $\alpha(t)$ 的分数布朗运动, 其中 $\alpha:[0,\infty]\to(0,1)$ 是给定的连续函数.

## 16.3 Lévy 平稳过程

布朗运动的另一种推广形式是由 Lévy 提出的平稳过程. *Lévy平稳过程*定义为满足下列条件的随机函数 $X:[0,\infty]\to\mathbf{R}$, 其增量 $X(t+h)-X(t)$ 具有只依赖于 $h$, 且是相互独立的平稳分布; 也就是, 如果 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_{2m}$, 则 $X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_{2m})-X(t_{2m-1})$ 是相互独立的. 然而, 除去如布朗运动这样很特殊的情形之外, Lévy 过程具有无穷方差且以概率 1 不连续. 如果自仿射条件成立, 即对任意的 $\gamma>0$ 和某个 $\alpha$, $\gamma^{-1/\alpha}X(\gamma t)$ 和 $X(t)$ 有相同的分布, 则 Lévy 过程是*平稳的*.

通常情况下并不是总能直接给出平稳过程的概率分布. 这就经常用傅里叶变换定义分布, 图的维数的分析和平稳过程的轨迹分析也用到傅里叶变换的方法.

随机变量 $Y$ 的概率分布可以由它对应的*特征函数*来确定, 即它的傅里叶变换 $\mathrm{E}(\exp(\mathrm{i}uY))$ $(u\in\mathbf{R})$. 为了定义一个平稳过程, 可以取一适当函数 $\psi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, 并要求增量 $X(t+h)-X(t)$ 满足

$$\mathrm{E}(\exp(\mathrm{i}u(X(t+h)-X(t)))=\exp(-h\psi(u)), \tag{16.14}$$

同时要求如果 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_{2m}$, 则 $X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_{2m})-X(t_{2m-1})$ 相互独立. 显然, 这些增量是平稳的. 这个定义至少在下面意义下是相容的：若 $t_1<t_2<t_3$, 则对所有轨道取期望且应用独立性

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\exp(\mathrm{i}u(X(t_3)-X(t_1))))\\
=&\mathrm{E}(\exp\mathrm{i}u((X(t_3)-X(t_2))+(X(t_2)-X(t_1))))\\
=&\mathrm{E}(\exp\mathrm{i}u(X(t_3)-X(t_2)))\mathrm{E}(\exp\mathrm{i}u(X(t_2)-X(t_1)))\\
=&\exp(-(t_3-t_2)\psi(u))\exp(-(t_2-t_1)\psi(u))\\
=&\exp(-(t_3-t_1)\psi(u)).
\end{aligned}$$

可以证明对适当的 $\psi$, 平稳过程确实存在.

对 $0<\alpha\leqslant 2$, 取 $\psi(u)=c|u|^\alpha$, 就得到*指数为 $\alpha$ 的平稳对称过程*, 用 $\gamma h$ 替代 $h$, 用 $\gamma^{-1/\alpha}u$ 取代 $u$, 式 (16.14) 的等号右边不变, 这就知道 $\gamma^{-1/\alpha}X(\gamma t)$ 与 $X(t)$ 有同

样的统计分布, $X(t)$ 作为定义的过程是自仿射的; 当 $\alpha=2$ 时, 得到的就是标准的布朗运动.

**定理 16.8** 指数为 $\alpha$ 的平稳对称过程的图的豪斯多夫维数和盒维数都以概率 1 等于 $\max\{1,2-1/\alpha\}$.

**部分证明** 这里只证明 $\dim_{\rm H}\mathrm{graph}X\leqslant\overline{\dim}_{\rm B}\mathrm{graph}X\leqslant\max\{1,2-1/\alpha\}$, 用 $R_f[t_1,t_2]=\sup\{|f(t)-f(u)|:t_1\leqslant t,u\leqslant t_2\}$ 表示函数 $f$ 在区间 $[t_1,t_2]$ 上变化的最大范围. 因为过程 $X$ 是自仿射的, 所以对任意的 $t$, 和 $0<\delta<1$ 有,

$$\mathrm{E}(R_X[t,t+\delta])=\delta^{1/\alpha}\mathrm{E}(R_X[0,1]).$$

若 $X$ 的图与 $\delta$ 坐标网在 $N_\delta$ 个正方形上相交, 由命题 11.1 知

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N_\delta)&\leqslant 2m+\delta^{-1}\sum_{i=0}^{m-1}\mathrm{E}(R_X[\mathrm{i}\delta,(\mathrm{i}+1)\delta])\\&=2m+m\delta^{-1}\delta^{1/\alpha}\mathrm{E}(R_X[0,1])\end{aligned}$$

这里 $m$ 是大于或等于 $1/\delta$ 的最小整数, 所以 $m\leqslant 2/\delta$. 可以证明至少 $\mathrm{E}(R_X[0,1])<\infty$ 是合理的, 所以存在常数 $c$, 使得对所有充分小的 $\delta$, $\mathrm{E}(N_\delta\delta^\beta)\leqslant c$, 其中 $\beta=\max\{1,\ 2-1/\alpha\}$. 若 $\varepsilon>0$, 则 $E\left(N_\delta\delta^{\beta+\varepsilon}\right)\leqslant c\delta^\varepsilon$, 所以

$$\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}N_{2^{-k}}(2^{-k})^{\beta+\varepsilon}\right)\leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}(2^{-k})^\varepsilon<\infty.$$

由此推出, 以概率 1 有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}N_{2^{-k}}\left(2^{-k}\right)^{\beta-\varepsilon}<\infty$, 特别地, 当 $\delta=2^{-k}\to 0$ 时, $N_\delta\delta^{\beta-\varepsilon}\to 0$, 所以, 由命题 4.1 可以得, 以概率 1 有 $\overline{\dim}_{\rm B}\mathrm{graph}X\leqslant\beta$. □

若 $\alpha<1$, 则几乎处处 $\dim_{\rm H}\mathrm{graph}X=1$, 这是在 $[0,1]$ 上任何函数图可能的最小维数; 此种情形反映了样本函数是由 "跳跃" 组成, 在任意正的时间区间内都发生无穷多的跳跃, 尽管许多这样的跳跃却是非常的小. $X$ 的像, 即 $\{X(t):0\leqslant t\leqslant 1\}$, 以概率 1 有维数 $\alpha$; 它表明了跳跃的分布. 可以证明, 在区间 $[t,t+h]$ 中有 $k$ 个绝对值至少为 $a$ 的跳跃的概率等于 $(ha^{-\alpha})^k\exp(-ha^{-\alpha})/k!$, 即正好是均值为 $ha^{-\alpha}$ 的泊松分布.

若 $1<\alpha<2$, 平稳对称过程由一个 "连续" 部分和一个 "跳跃" 部分组成.

## 16.4 分数布朗曲面

最后, 用对分数布朗曲面的简要讨论来结束这一章, 它已经非常有效地用于计算机绘制地貌图.

用坐标 $(x,\ y)$ 来代替时间变量 $t$, 所以随机变量 $X(x,\ y)$ 可以被认为是曲面在点 $(x,\ y)$ 的高度.

对 $0<\alpha<1$, 定义指数为 $\alpha$ 的布朗函数$X:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为一高斯随机函数, 且满足:

**(FBS)** (i) 以概率 1, $X(0,0)=0$, 且 $X(x,y)$ 为 $(x,y)$ 的连续函数.

(ii) 对 $(x,y),(h,k)\in\mathbf{R}^2$, 高维增量 $X(x+h,y+k)-X(x,y)$ 服从均值为 0, 方差为 $(h^2+k^2)^\alpha=|(h,k)|^{2\alpha}$ 的正态分布, 即:

$$P(X(x+h,y+k)-X(x,y)\leqslant z$$
$$=(2\pi)^{-1/2}(h^2+k^2)^{-\alpha/2}\int_{-\infty}^{z}\exp\left(\frac{-r^2}{2(h^2+k^2)^\alpha}\right)\mathrm{d}r. \tag{16.15}$$

要证明满足这些条件的过程的存在性是很不容易的, 随机变量 $X(x,y)$ 在不同点的相关性也相当复杂.

称 $\{(x,y,X(x,y)):(x,y)\in\mathbf{R}^2\}$ 为指数为 $\alpha$ 的布朗曲面, 图 16.4 描绘出一些样本曲面.

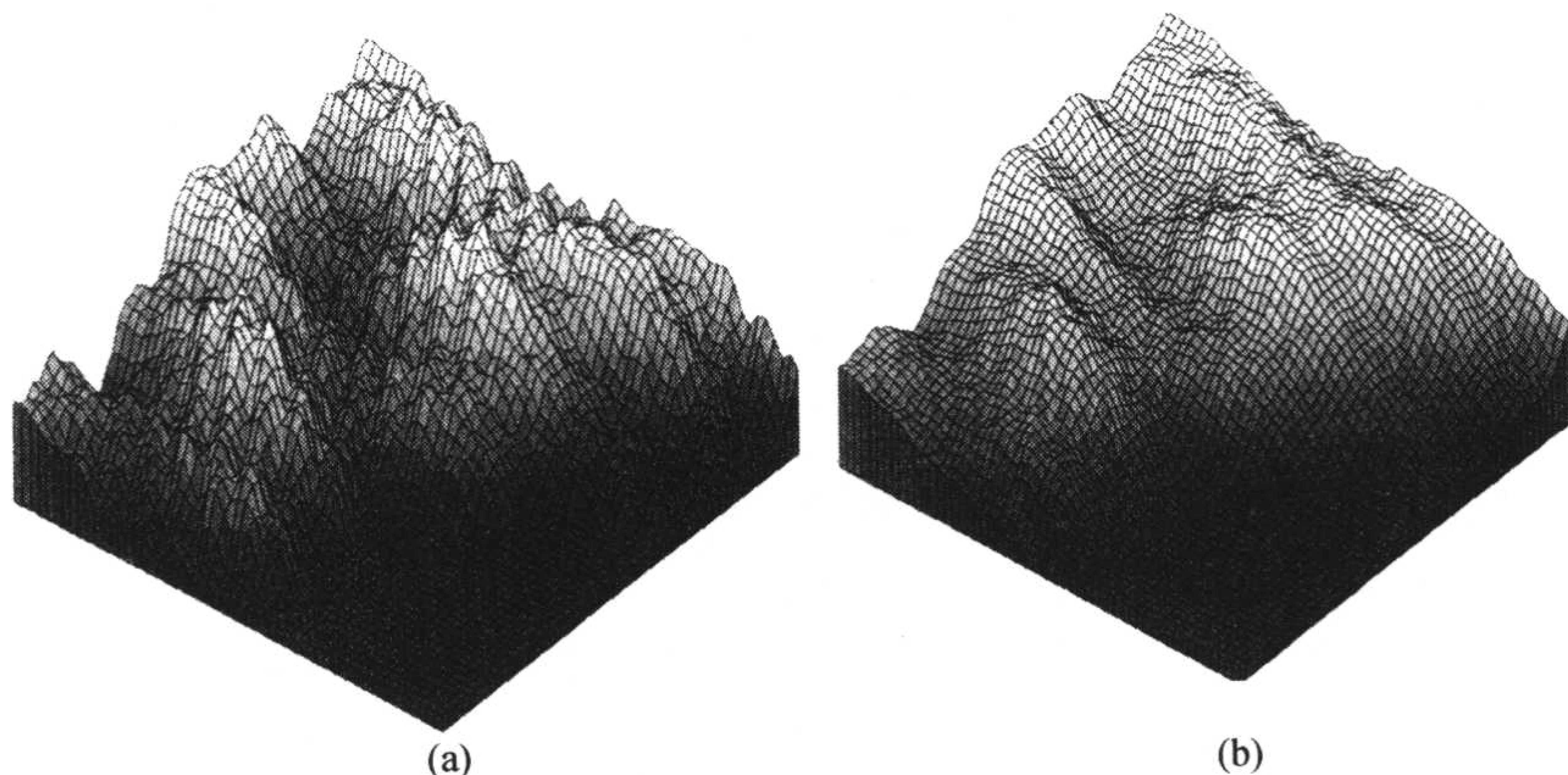



图 16.4 指数为 $\alpha$ 的分形布朗曲面: (a) $\alpha=0.95$, 维数 $=2.05$; (b) $\alpha=0.8$, 维数 $=2.20$

将式 (16.15) 与分布式 (16.10) 比较, 可以看到由 $X(x,y)$ 与任何垂直平面相交所得的图是指数为 $\alpha$ 的 1 维布朗函数图 (在加一常数后可以保证 $X(0)=0$). 经常可以通过研究这些垂直截口来得到关于曲面的一些信息.

**定理 16.9** 指数为 $\alpha$ 的布朗样本曲面的豪斯多夫维数和盒维数都以概率为 1 等于 $3-\alpha$.

**证明** 利用命题 16.1 和命题 16.6 的方法可以证明, 如果 $\lambda<\alpha$, 只要 $(h,k)$ 充分小, 则指数为 $\alpha$ 的布朗函数 $X:[0,1]\times[0,1]\to\mathbf{R}$ 以概率 1 满足

$$|X(x+h,y+k)-X(x,y)|\leqslant b(h^2+k^2)^{\lambda/2}=b|(h,k)|^\lambda.$$

由对两个变量函数所得的类似于推论 11.2(a) 的结果 (见练习 11.9) 知, $3-\lambda$ 是曲面的上盒维数的一个上界.

如果固定 $x_0$, 则 $X(x_0,y)-X(x_0,0)$ 为 $[0,1]$ 上的指数为 $\alpha$ 的布朗函数, 所以由定理 16.7, $X(x_0,y)$ 的图有豪斯多夫维数以概率 1 为 $2-\alpha$; 于是, 对几乎所有 $0\leqslant x_0\leqslant 1$, $X(x_0,y)$ 的图的维数以概率 1 为 $2-\alpha$. 但这些图只是由 $X$ 给出的曲面的平行截口, 所以由 $\mathbf{R}^3$ 中明显的类似于推论 7.10 的结果, 可知曲面的豪斯多夫维数至少为 $(2-\alpha)+1$. □

水平集 $X^{-1}(c)=\{(x,y):X(x,y)=c\}$ 为随机曲面的等高线. 把命题 16.5 推广到指数为 $\alpha$ 的曲面; 可以证明, 在 1 维测度的意义下, 对几乎所有的 $c$ 以概率 1 有 $\dim_{\rm H} X^{-1}(c)\leqslant 2-\alpha$, 而且以正概率 $\dim_{\rm H} X^{-1}(c)=2-\alpha$. 所以指数为 $\alpha$ 的曲面的等高线一般有维数 $2-\alpha$.

可以考虑由指数为 $\alpha$ 的布朗函数生成的一般样本曲面的问题, 这里不做详细的讨论. 然而, 注意到, 指数为 $\alpha$ 的曲面与式 (16.13) 相类似的地方是:

$$X(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\lambda^{-\alpha k}\sin(\lambda^k(x\cos B_k+y\sin B_k)+A_k),$$

这里 $C_k$ 是相互独立的且服从均值为 0 方差为 1 的正态分布的随机变量, $A_k$ 和 $B_k$ 是相互独立的且服从 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布的随机变量. 这样的函数提供了随机曲面计算机生成的一个可能方法.

这一章的思想可以在许多方向上推广, 并且可以以多种方式相互结合. 对任意 $n$ 和 $m$, 分数布朗运动和平稳过程可以定义为从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 上的函数, 而且有很多其他的变化. 水平集、多重点集、与固定集的交和各种分形 $F$ 的映像 $X(F)$ 等问题, 在所有这些情形中都可以提出. 分析这些问题经常需要多种几何方法的论证, 同时也需要复杂的概率技巧.

## 16.5 注记和参考文献

Karlin and Taylor(1975, 1981), Billingsley(1995) 以及 Rogers and Williams(2000) 论述了布朗运动的概率基础.

分数布朗运动由 Mandelbrot and Van Ness(1968) 引入, 可参见 Mandelbrot(2002). 在 Adler(1981), Kahane(1985), Samorodnitsky and Taqqu(1994), 以及 Embrechts and Maejima(2002) 中, 从数学角度给出了分数布朗函数和曲面的详细处理; 前两本书包含了维数方面的问题, 而后两本着重讨论了自相似性. 在 Ayache and Lévy Véhel (1999) 以及 Ayache, Cohen and Lévy Véhel(2000) 中提出了多重分形布朗运动.

平稳过程由 Lévy(1948) 提出, 还可参见 Samorodnitsky and Taqqu(1994), Rogers and Williams(2000) 以及 Mandelbrot(2002) 等. Taylor(1973, 1986) 的研究提到了这种过程的许多维数性质.

关于生成布朗轨道和曲面的计算方法的讨论, 比如在 Voss(1985), Peitgen and Saupe(1988), Falconer and Lévy Véhel(2000) 以及 Embrechts and Maejima(2002) 中都有介绍.

## 练 习

**16.1** 应用布朗运动的统计自相似性证明: $\mathbf{R}^3$ 中的布朗轨道的盒维数以概率 1 至多为 2.

**16.2** 设 $X:[0,\infty)\to\mathbf{R}^3$ 为通常所说的布朗运动, 证明: 三分康托尔集 $F$ 的映像 $X(F)$ 的豪斯多夫维数以概率 1 至多为 ln4/ln3. (更进一步: 证明它几乎等于 ln4/ln3) 对指数为 $\alpha$ 的布朗运动的类似结果是什么?

**16.3** 设 $X:[0,\infty)\to\mathbf{R}^3$ 为通常所说的布朗运动, $F$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的紧子集, 应用定理 8.2 证明: 如果 $\dim_{\mathrm{H}}F>1$, 则布朗轨道 $X(t)$ 以正概率击中 $F$.

**16.4** 设 $X(t)$ 是布朗运动, $c$ 是常数, 证明: 过程 $X(t)+ct$ 的图的维数以概率 1 等于 $1\frac{1}{2}$(这个过程称为带有漂移的布朗运动).

**16.5** 证明: 布朗样本函数 $X:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ 在任何区间 $[t,u]$ 上以概率 1 非单调.

**16.6** 设 $X(t)$ 是布朗运动, 证明: 以概率 1 存在 $t>0$, 使 $X(t)=0$; 利用自仿射性证明: 以概率 1 对任意 $a>0$, 存在 $t$, 满足 $0<t<a$ 使 $X(t)=0$; 进一步证明: 以概率 1 对任意 $a>0$, 有无穷多个满足 $0<t<a$ 的 $t$, 使 $X(t)=0$.

**16.7** 设 $X(t)$ 是布朗运动, 证明: 对 $q>0$, $E(|X(t+h)-X(t)|^q)=c|h|^q$, 其中 $c$ 仅依赖于 $q$.

**16.8** 证明: 如果 $\lambda>\alpha$, 则对几乎所有的 $t$, Hölder 不等式 (16.12) 以概率 1 不成立.

**16.9** 取 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2<1$, 设 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 分别为从 $[0,1]$ 到 $\mathbf{R}$ 上的指数为 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 的独立的布朗函数, 证明: 由 $\{X_1(t),X_2(t):0\leqslant t\leqslant 1\}$ 给出的 $\mathbf{R}^2$ 中的轨道的豪斯多夫和盒维数以概率 1 等于 $(1+\alpha_2-\alpha_1)/\alpha_2$.

**16.10** 验证: 对指数为 $\alpha$ 的分数布朗运动 $X(t)$, 满足 $\mathrm{E}((X(t)-X(0))(X(t+h)-X(t)))=\frac{1}{2}[(t+h)^{2\alpha}-t^{2\alpha}-h^{2\alpha}]$; 并且证明: 如果 $1/2<\alpha<1$, 则上式是正的, 而如果 $0<\alpha<1/2$, 则上式是负的, 这个结论对样本函数能说明什么?

# 第 17 章　多重分形测度

质量分布 $\mu$ 可能会以某种方式分布在一个区域上，使得质量的集中程度非常不规则．确实，有这样的点集，其上的局部质量分布服从一种指数为 $\alpha$ 的幂定律．即，对充分小的 $r$，关系式 $\mu(B(x,r)) \simeq r^{\alpha}$ 成立，而对于不同的 $\alpha$ 值，可以确定不同的分形．于是，由单个测度可以生成各种各样的分形，这就可以据此研究这些分形的结构以及它们的内部联系．我们称一个具有如此丰富结构的测度为*多重分形测度*(multifractal measure) 或者就简单称为*多重分形*(multifractal)；就像前面对待分形的情形一样，在这里还是倾向于避免给"多重分形"下精确的定义．

在许多物理现象中都可以观察到多重分形测度，比如流体中的湍流、雨量的分布、宇宙空间中的质量分布、黏性指进、神经网络、期货价格以及许多其他的现象．

一类重要的多重分形出现在动力系统中 (见 13.7 节)．如果 $f$：$D \to D$ 是区域 $D$ 上的映射，对于 $D$ 的子集 $A$，可以通过下式定义一个"居留测度"．

$$\mu(A) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \# \{k : 1 \leqslant k \leqslant m \text{ 且 } f^k(x) \in A\},$$

这里 $x$ 是 $D$ 中某个初始点；那么 $\mu(A)$ 代表 $x$ 的迭代进入 $A$ 中的"次数比例"．从前面的章节中已经知道 $\mu$ 的支撑经常是 $f$ 的吸引子，而且可能是分形．然而，$\mu$ 的分布的不均匀性可能进一步突出了吸引子的动力学结构，并且可以用多重分形理论来记录和分析．

许多关于分形的思想可以用在多重分形分析中，例如，可以用类似于研究分形射影的方法来研究多重分形测度在直线或平面上的射影，尽管涉及的计算可能要比分形射影复杂得多．

通常有两种研究多重分形的方法：一种称为*精细理论*(fine theory)，这种方法用于研究分形本身的结构和维数；另一种方法称为*粗线条理论*(coarse theory)，在这种方法中，考虑具有正半径 $r$ 的小球的测度分布的不规则性，然后，令 $r \to 0$ 取极限．在很大程度上，精细多重分形分析类似于是在寻找集合的豪斯多夫维数；而粗线条理论则关系到计盒维数．在物理例子和计算机试验中，粗线条方法显得更易于操作，但是精细理论更适合于数学上的研究分析．这两种方法也有许多共同的地方，且应用这两种方法对许多测度可以得出相同的"多重分形谱"．

下面先分别给出粗线条和精细多重分形理论的大致轮廓，然后再详细考虑自相似测度的特殊情况，以此为例证解释多重分形理论，并论证该理论的中心思想，如勒让德变换．

在本章的讨论中,把下面例子中的测度称为康托尔集上的自相似多重分形测度;也正是这样的三分康托尔集,显示了很多分形数学的性质,支撑在康托尔集上的自相似测度是一大类很典型的多重分形测度.

**例 17.1** 给定 $p_1, p_2 > 0$, 满足 $p_1 + p_2 = 1$; 按下面的重复细分的方法在三分康托尔集 $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ 上构造一个的测度 $\mu$(这里的 $E_k$ 包含了 $2^k$ 个长度为 $3^{-k}$ 的区间, 见康托尔集的一般构造图图 0.1). 把单位质量分配到 $E_1$ 的两个区间上, 使左边的区间有质量 $p_1$, 右边的区间有质量 $p_2$; 再把 $E_1$ 的每个区间上的质量按 $p_1 : p_2$ 的比例分配到 $E_2$ 的两个子区间上; 按这种方法继续进行下去, 使得对每个 $k$, $E_k$ 的每个区间上的质量都是按比例 $p_1 : p_2$ 分配到 $E_{k+1}$ 的两个子区间上 (见图 17.1). 这样就在 $F$ 上定义了一个质量分布, 见命题 1.7.

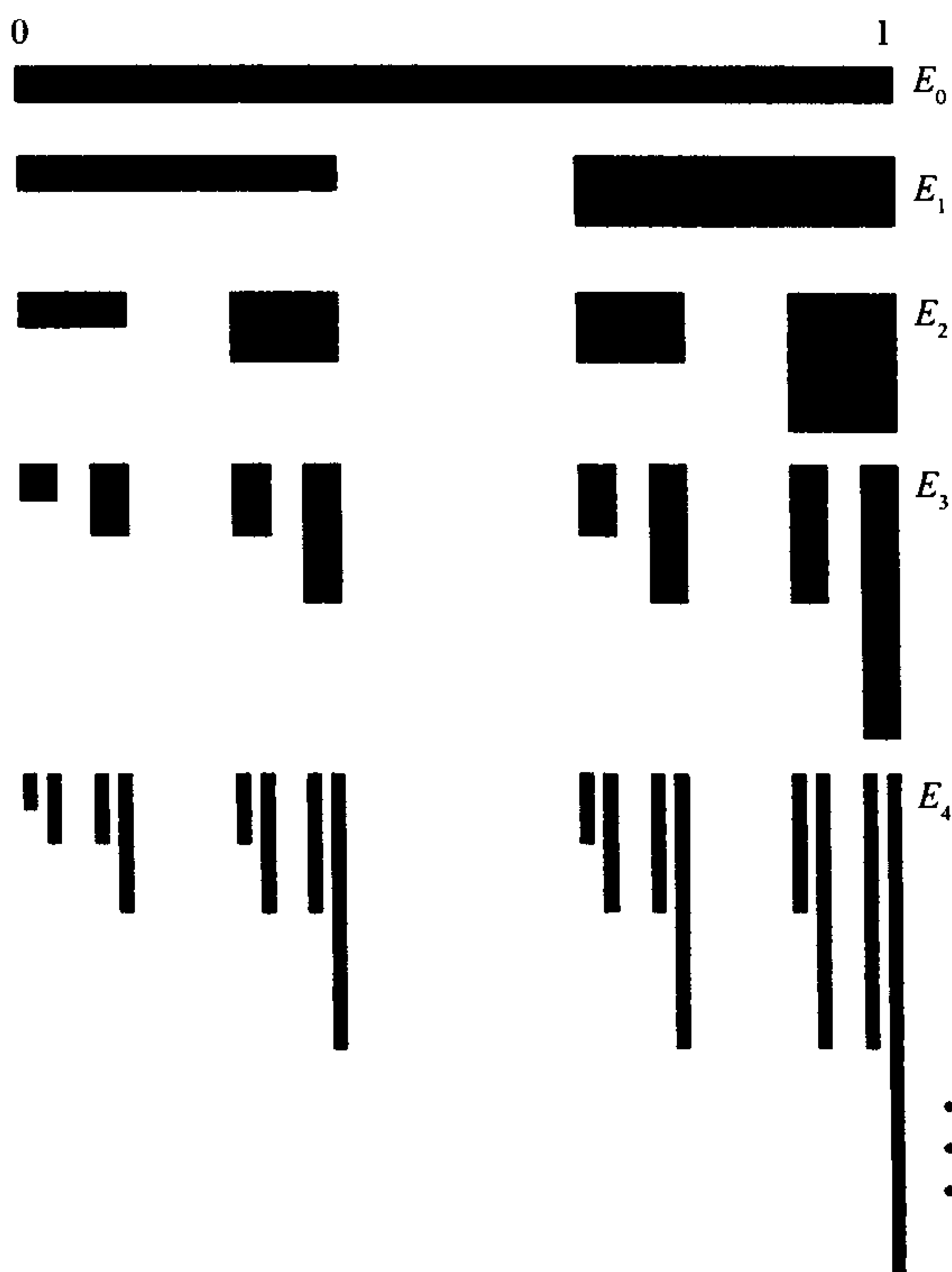



图 17.1 例 17.1 中自相似测度的构造. 在康托尔集构造中的每个区间 $E_k$ 的质量用面积表示, 它以比例 $p_1 : p_2$ 分到 $E_{k+1}$ 内的 $E_k$ 的两个子区间上 (在这里是 $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$). 继续这个过程可以产生康托尔集 $F$ 上的质量分布 $\mu$

显然, 假设 $I$ 是 $E_k$ 的一个 $k$ 水平区间, 如果在构造 $I$ 的迭代过程中, 左边的子区间取 $r$ 次, 而右边的子区间取 $k-r$ 次, 则有 $\mu(I) = p_1^r p_2^{k-r}$. 如果 $p_1 \neq p_2$ 而且 $k$

很大, 则各个 $k$ 水平区间的质量差别相当大 (见图 17.1), 并且这是多重分形的一种表现.

## 17.1　粗线条多重分形分析

设测度 $\mu$ 定义在 $\mathbf{R}^n$ 上, 且满足 $0 < \mu(\mathbf{R}^n) < \infty$, 则测度 $\mu$ 的粗线条多重分形分析与计算盒维数类似, 也就是要计算测度值 $\mu(C)$ 近似于 $r^\alpha$ 的网立方体 $C$ 的个数. (回顾一下, $\mathbf{R}^n$ 中 $r$ *网立方体*是那些形式为 $[m_1 r, (m_1+1)r] \times \cdots \times [m_n r, (m_n+1)r]$ 的立方体, 其中 $m_1, \cdots, m_n$ 是整数.) 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的有限测度 $\mu$ 及 $\alpha \geqslant 0$, 记

$$N_r(\alpha) = \#\{C: C \text{ 是 } r \text{ 网立方体, 且满足 } \mu(C) \geqslant r^\alpha\}, \tag{17.1}$$

并且定义 $\mu$ 的*粗线条多重分形谱*或称*粗线条奇异谱*如下:

$$f_C(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{r\to 0}\frac{\ln^+(N_r(\alpha+\varepsilon) - N_r(\alpha-\varepsilon))}{-\ln r} \tag{17.2}$$

如果上述二重极限存在. (这里记 $\ln^+ x \equiv \max\{0, \ln x\}$, 以确保 $f_C(\alpha) \geqslant 0$.) 定义式 (17.2) 表明, 如果 $\eta > 0$, 且 $\varepsilon > 0$ 充分小, 则对任意充分小的 $r$ 有:

$$r^{-f_C(\alpha)+\eta} \leqslant N_r(\alpha+\varepsilon) - N_r(\alpha-\varepsilon) \leqslant r^{-f_C(\alpha)-\eta} \tag{17.3}$$

粗略地讲, $-f_C(\alpha)$ 是那些满足 $\mu(C) \simeq r^\alpha$ 的 $r$ 网立方体 $C$ 的个数所服从的幂定律的指数. 要注意的是, $f_C(\alpha)$ 不是满足当 $r \to 0$, $\mu(C(x,r)) \simeq r^\alpha$ 的点 $x$ 构成的集合的盒维数, 其中 $C(x,r)$ 是包含 $x$ 的 $r$ 网立方体; 粗线条谱提供了在 $r$ 的尺度变化时, 对测度 $\mu$ 的相应变化的一个总体的描述, 但并没有给出 $\mu$ 在任一点处的极限状况的信息.

由于式 (17.2) 的极限可能不存在, 因此, 对 $\alpha \geqslant 0$, 利用下面两个式子分别定义 $\mu$ 的*下多重分形谱*和*上多重分形谱*:

$$\underline{f}_C(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varliminf_{r\to 0}\frac{\ln^+(N_r(\alpha+\varepsilon) - N_r(\alpha-\varepsilon))}{-\ln r} \tag{17.4}$$

$$\overline{f}_C(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{r\to 0}\frac{\ln^+(N_r(\alpha+\varepsilon) - N_r(\alpha-\varepsilon))}{-\ln r} \tag{17.5}$$

其中 $\alpha \geqslant 0$.

通常直接计算粗线条多重分形谱 $f_C$ 会很困难.

**例 17.1(续)**　在这个例子中, 集 $E_k$ 是由 $2^k$ 个长度为 $3^{-k}$ 的区间组成, 并且对每一个 $r$, 它们中有 $\binom{k}{r}$ 个区间的质量等于 $p_1^r p_2^{k-r}$, 这里 $\binom{k}{r}$ 是通常的二项式

系数. 因此, 不失一般性, 假定 $0 < p_1 < 1/2$, 就有:

$$N_{3^{-k}}(\alpha) = \sum_{r=0}^{m} \binom{k}{r},$$

这里 $m$ 是充分大的整数, 使得

$$p_1^m p_2^{k-m} \geqslant 3^{-k\alpha}, \text{ 即 } m \simeq \frac{k(\ln p_2 + \alpha \ln 3)}{\ln p_2 - \ln p_1}.$$

现在可以估计 $N_{3^{-k}}(\alpha)$ 及研究它的幂定律指数, 但是这十分烦琐, 下面很快会介绍一种更好的方法. □

下面引进矩和式: 对 $q \in \mathbf{R}$ 和 $r > 0$, 定义 $\mu$ 的 $q$ 幂矩和为:

$$M_r(q) = \sum_{\mathcal{M}_r} \mu(C)^q, \tag{17.6}$$

上述和式定义在集 $\mathcal{M}_r$ 上, 其中 $\mathcal{M}_r$ 是由满足条件 $\mu(C) > 0$ 的 $r$ 网立方体 $C$ 组成的集类. (当 $q$ 是负数时, 这里就出现一个有关稳定性的问题: 如果立方体 $C$ 仅仅刚截到 $\mu$ 的支撑 $\operatorname{spt}\mu$ 的边界, 则 $\mu(C)^q$ 可能会非常大. 对这个困难有许多处理的办法, 例如将和式限制在中心部分与 $\operatorname{spt}\mu$ 相交的立方体上, 但这里不继续探讨这个问题.) 通过下面的定义来确定 $M_r(q)$ 服从的幂定律的性状:

$$\beta(q) = \lim_{r \to 0} \frac{\ln M_r(q)}{-\ln r}, \tag{17.7}$$

假定上述极限存在.

这些矩和应当与 $N_r(\alpha)$ 有关, 这一点几乎没有什么可奇怪的. 运用式 (17.1), 如果 $q \geqslant 0$ 且 $\alpha \geqslant 0$, 则有

$$M_r(q) = \sum_{\mathcal{M}_r} \mu(C)^q \geqslant r^{q\alpha} N_r(\alpha), \tag{17.8}$$

并且, 如果 $q < 0$, 则

$$M_r(q) = \sum_{\mathcal{M}_r} \mu(C)^q \geqslant r^{q\alpha} \#\{C: C \text{ 是 } r \text{ 网立方体, 且满足 } 0 < \mu(C) \leqslant r^\alpha\}. \tag{17.9}$$

通过勒让德变换, 从上面的这些不等式可以得到 $f_c(\alpha)$ 和 $\beta(q)$ 之间一个有用的联系: 对于 $\alpha \geqslant 0$, 如果下式是有限的, 则 $\beta$ 的勒让德变换$f_L$ 可以定义为:

$$f_L(\alpha) = \inf_{-\infty < q < \infty} \{\beta(q) + \alpha q\}. \tag{17.10}$$

勒让德变换有一个对下面的研究很有用的几何解释：对于在 $\beta$ 的图下面存在的、斜率为 $-\alpha$ 的、支撑 $\beta$ 的直线 $L_\alpha$ 的 $\alpha,\beta$ 的勒让德变换就是 $L_\alpha$ 和纵轴相交处的值 (见图 17.2).

通过上面 $\beta$ 的勒让德变换可以容易地看出粗线条谱是有界的.

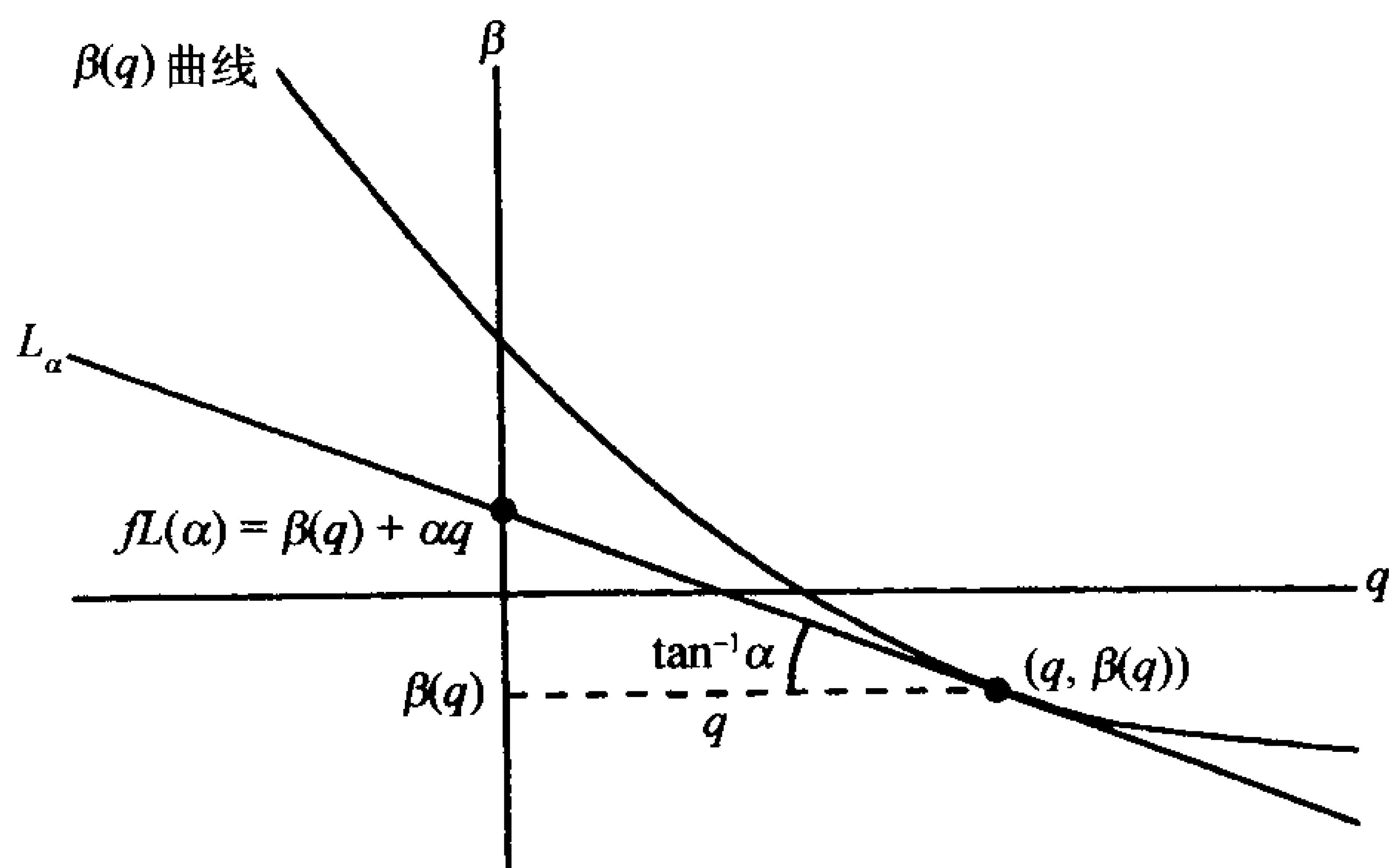



图 17.2　$\beta(q)$ 的勒让德变换是 $fL(\alpha)$, 即斜率为 $-\alpha$ 的切线 $L_\alpha$ 与 $\beta$ 轴的交

**命题 17.2**　设 $\mu$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有限测度, 且假定式 (17.7) 的极限存在, 则对于任意的 $\alpha \geqslant 0$,

$$\underline{f}_C(\alpha) \leqslant \overline{f}_C(\alpha) \leqslant f_L(\alpha) \tag{17.11}$$

其中 $f_L$ 是 $\beta$ 的勒让德变换.

**证明**　首先取 $q \geqslant 0$, 则对给定的 $\varepsilon > 0$, 和任意小的 $r$, 式 (17.8) 和式 (17.5) 蕴含着

$$M_r(q) \geqslant r^{q(\alpha+\varepsilon)} N_r(\alpha+\varepsilon) \geqslant r^{q(\alpha+\varepsilon)} r^{-\overline{f}_C(\alpha)+\varepsilon}. \tag{17.12}$$

由式 (17.7) 可得

$$-\beta(q) \leqslant q(\alpha+\varepsilon) - \overline{f}_C(\alpha) + \varepsilon,$$

因此, 取 $\varepsilon$ 任意小, 即得 $\overline{f}_C(\alpha) \leqslant \beta(q) + \alpha q$. 在式 (17.12) 中用 $\alpha-\varepsilon$ 代替 $\alpha$, 通过类似的论证, 同样可以证明当 $q < 0$ 时, 这个不等式也是成立的. □

式 (17.10) 中 $\beta$ 的勒让德变换 $f_L$ 称为 $\mu$ 的勒让德谱. 存在许多测度, 其勒让德谱就等于粗线条的多重分形谱, 也就是说, 式 (17.11) 中的等号是成立的.

**例 17.1(续 2)**　回顾一下, 在这个例子中, $\binom{k}{r}$ 个长度为 $3^{-k}$ 的 $k$ 水平区间各有质量 $p_1^r p_2^{k-r}$, 于是得到

$$M_{3^{-k}}(q) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} p_1^{qr} p_2^{q(k-r)} = (p_1^q + p_2^q)^k.$$

因此

$$\beta(q)=\lim_{r\to 0}\frac{\ln M_r(q)}{-\ln r}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln M_{3^{-k}}(q)}{-\ln 3^{-k}}=\frac{\ln(p_1^q+p_2^q)}{\ln 3}. \tag{17.13}$$

(对比式 (3.14), 容易看出, 通过让 $3^{-k}$ 的值趋于 0, 足于保证 $r$ 也趋于 0.)

$\mu$ 的勒让德谱来自于 $\beta$ 的勒让德变换, 也就是在 $q\in\mathbf{R}$ 上取 $\beta(q)+\alpha q$ 的最小值. 通过基本的计算可以得到, 这个最小值在 $q$ 满足下式时达到,

$$\alpha=-\frac{p_1^q\ln p_1+p_2^q\ln p_2}{(p_1^q+p_2^q)\ln 3}.$$

勒让德谱是就是这个最小值, 而这个值可以通过以 $q$ 为参数的下述表达式表示：

$$f_L(\alpha)=\frac{\ln(p_1^q+p_2^q)}{\ln 3}-\frac{q(p_1^q\ln p_1+p_2^q\ln p_2)}{(p_1^q+p_2^q)\ln 3}. \tag{17.14}$$

图 17.3 显示了当 $p_1=\dfrac{1}{3},p_2=\dfrac{2}{3}$ 时 $f_L(\alpha)$ 的图. 就像在 17.3 节中即将见到的, $f_L(\alpha)=f_C(\alpha)$, 即, 勒让德谱和粗线条多重分形谱是一致的. □

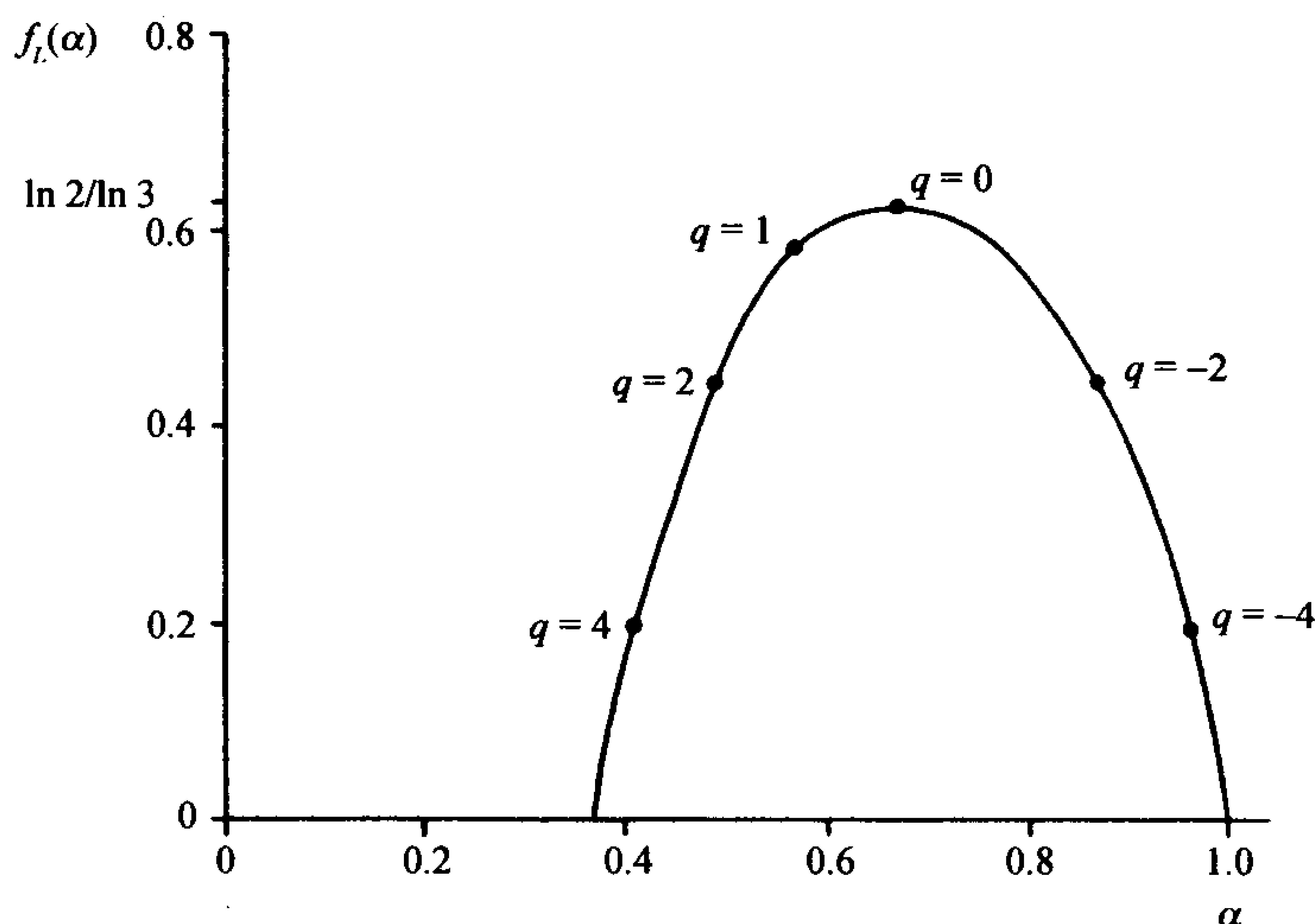



图 17.3 当 $p_1=\dfrac{1}{3},p_2=\dfrac{2}{3}$ 时, 例 (17.1) 的多重分形谱

在实际情形中, 多重分形谱经常很难估计和处理. 所以希望通过 “计盒维数” 的方法来计算粗线条谱 $f_C$ . 例如, 如果 $\mu$ 是平面上某个动力系统吸引子上的一个测度, 位于每个 $r$ 网正方形 $C$ 中初始点迭代次数的比例, 可以用来估计满足 $\alpha_i\leqslant\ln\mu(C)/\ln r<\alpha_{i+1}$ 的正方形的个数, 这里 $0\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_k$. 对于不同的 $r$, 可以通过检验这个直方图来研究 $N_r(\alpha+\varepsilon)-N_r(\alpha-\varepsilon)$ 服从的幂定律情形以及估计 $f(\alpha)$. 然而, 这种直方图方法计算速度很慢而且运算很复杂.

一般来说，通过实验用矩方法来决定多重分形谱是比较令人满意的. 因此，在 $q$ 的一个变化区间，对于不同的较小 $r$，可以得到式 (17.6) 中矩和的估计，并且通过估计幂定律的行为并利用式 (17.7) 来估计 $\beta(q)$; $\beta$ 的勒让德变换给出了 $\mu$ 的勒让德谱，并且常常被取作为粗线条谱. 矩方法一般比直方图方法更易于数值处理.

## 17.2　精细多重分形分析

精细多重分形分析直接考虑用测度的局部密度确定的分形. 设 $\mu$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的测度，满足 $0 < \mu(\mathbf{R}^n) < \infty$. 定义 $\mu$ 在点 $x$ 处的*局部维数*或*Hölder 指数*为：

$$\dim_{\mathrm{loc}} \mu(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\ln \mu(B(x,r))}{\ln r}, \tag{17.15}$$

如果这个极限存在的话. (更一般地，可以通过计算上局部极限和下局部极限来计算上局部维数和下局部维数，这里对此不深入讨论.) 下面研究局部维数取特殊值的那些点 $x \in \mathbf{R}^n$ 组成的集合. 给定 $\alpha \geqslant 0$，定义

$$F_\alpha = \{x \in \mathbf{R}^n : \dim_{\mathrm{loc}} \mu(x) = \alpha\} = \left\{x \in \mathbf{R}^n : \lim_{r \to 0} \frac{\ln \mu(B(x,r))}{\ln r} = \alpha\right\}. \tag{17.16}$$

因此，$F_\alpha$ 包含了那些局部维数存在且等于 $\alpha$ 的点.

在精细多重分形分析中，主要目的就是在 $\alpha$ 的一定范围内求出 $F_\alpha$ 的维数. 在大部分令人感兴趣的例子中，$F_\alpha$ 在 $\mu$ 的支撑上是稠密的; 因此，由命题 3.4 可得 $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F_\alpha = \underline{\dim}_{\mathrm{B}} \overline{F_\alpha} = \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(\mathrm{spt}\mu)$(类似地，对于上盒维数相应的等式同样成立)，可以看出，在区别 $F_\alpha$ 上，计盒维数几乎不起作用. 所以，转而要关注的是由式

$$f_{\mathrm{H}}(\alpha) = \dim_{\mathrm{H}} F_\alpha \tag{17.17}$$

定义的 $\mu$ 的*精细 (豪斯多夫) 多重分形谱*或*奇异谱*. (这里不考虑用填充维数类似定义的精细填充谱.)

显然，对任意的 $\alpha \geqslant 0$, $0 \leqslant f_{\mathrm{H}}(\alpha) \leqslant \dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{spt}\mu)$ 成立，并且根据命题 4.9(b) 有：

$$0 \leqslant f_{\mathrm{H}}(\alpha) \leqslant \alpha. \tag{17.18}$$

**例 17.1 (续 3)**　用通常的方法，可以将康托尔集 $F$ 中的点编码成为 $(i_1, i_2, \cdots)$ 的形式，如果 $x$ 位于康托尔集构造中第 $k$ 步时的左边子区间上，则 $i_k = 1$; 如果位于右边的子区间上，则 $i_k = 2$ . 然后，再用 $n_j(x|_k), j = 1, 2$ 表示 $x$ 的编码序列前 $k$ 位数中数 $j$ 出现的次数，则有 $\mu(B(x, 3^{-k})) = p_1^{n_1(x|_k)} p_2^{n_2(x|_k)}$，即

$$\ln \frac{\mu(B(x,3^{-k}))}{\ln 3^{-k}} = \frac{-1}{\ln 3}\Big(\frac{n_1(x|_k)}{k} \ln p_1 + \frac{n_2(x|_k)}{k} \ln p_2\Big).$$

于是, 如果 $n_j(x|_k)/k \to \alpha_j, j=1,2$, 则 $x \in F_\alpha$, 这里 $\alpha = -(\alpha_1 \ln p_1 + \alpha_2 \ln p_2)/\ln 3$. 在这个例子中, 现在可以计算出 $f_{\rm H}(\alpha) = \dim_{\rm H} F_\alpha$, 恰好与命题 10.1 中的一样, 并且这也给出了与式 (17.14) 等价的参数表达式. 在下一节中, 将给出正式的计算, 并在更一般的条件下讨论这些内容. □

正如集合的豪斯多夫维数不能大于它的盒维数一样, 在精细谱和粗线条谱之间也有一个基本的不等式.

**引理 17.3** 设 $\mu$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有限测度, 则对任意 $\alpha \geqslant 0$, 有

$$f_{\rm H}(\alpha) \leqslant \underline{f}_C(\alpha) \leqslant \overline{f}_C(\alpha). \tag{17.19}$$

**证明** 式 (17.19) 右边的不等式是显然成立的. 对于其左边的不等式, 只证明 $\mu$ 是 $\mathbf{R}$ 上的测度的情形; 除了用比较球和立方体的测度代替比较区间上的测度外, 对 $n \geqslant 2$ 情形的证明与这里的证明是完全类似的.

固定 $\alpha \geqslant 0$, 简记 $f \equiv f_{\rm H}(\alpha) = \dim_{\rm H} F_\alpha$, 并且可以假设 $f > 0$, 给定 $0 < \varepsilon < f$, 则 $\mathcal{H}^{f-\varepsilon}(F_\alpha) = \infty$. 由式 (17.16), 并利用 Egoroff 定理, 存在满足条件 $\mathcal{H}^{f-\varepsilon}(F_\alpha^0) > 1$ 的集合 $F_\alpha^0 \subset F_\alpha$, 以及数 $c_0 > 0$ 使得对任意的 $x \in F_\alpha^0$ 和任意的 $0 < r \leqslant c_0$, 有

$$3r^{\alpha+\varepsilon} \leqslant \mu(B(x,r)) < 2^{\varepsilon-\alpha} r^{\alpha-\varepsilon}. \tag{17.20}$$

可以选择满足 $0 < \delta \leqslant \dfrac{1}{2}c_0$ 的 $\delta$, 使得 $\mathcal{H}_\delta^{f-\varepsilon}(F_\alpha^0) \geqslant 1$.

对于 $r \leqslant \delta$, 考虑那些与 $F_\alpha^0$ 相交的 $r$ 网区间 (形式为 $[mr,(m+1)r]$, $m \in \mathbf{Z}$). 这样的区间 $I$ 包含 $F_\alpha^0$ 的一个点 $x$, 并满足

$$B(x,r) \subset I \bigcup I_L \bigcup I_R \subset B(x,2r),$$

其中 $I_L$ 和 $I_R$ 分别是紧挨着 $I$ 的左边和右边的 $r$ 网区间. 由式 (17.20) 得:

$$3r^{\alpha+\varepsilon} \leqslant \mu(B(x,r)) \leqslant \mu(I \bigcup I_L \bigcup I_R) \leqslant \mu(B(x,2r)) < r^{\alpha-\varepsilon},$$

即有:

$$r^{\alpha+\varepsilon} \leqslant \mu(I_0) < r^{\alpha-\varepsilon}, \tag{17.21}$$

这里 $I_0$ 是 $I, I_L$ 和 $I_R$ 三个之一. 由 $\mathcal{H}_\delta^{f-\varepsilon}$ 的定义, 至少有 $r^{\varepsilon-f}\mathcal{H}_\delta^{f-\varepsilon}(F_\alpha^0) \geqslant r^{\varepsilon-f}$ 个不同的 $r$ 网区间与 $F_\alpha^0$ 相交, 因此至少有 $\dfrac{1}{3}r^{\varepsilon-f}$ 个不同的 $r$ 网区间满足式 (17.21)(注意到任意两个区间 $I$ 或者被 $2r$ 的间隔区分开, 或者是来自于两个不同的 $I_0$). 因此, 总结以上知, 对于 $r \leqslant \delta$,

$$N_r(\alpha+\varepsilon) - N_r(\alpha-\varepsilon) \geqslant \frac{1}{3}r^{\varepsilon-f},$$

所以由式 (17.4) 得, $\underline{f}_C(\alpha) \geqslant f - \varepsilon$; 由于此不等式对任意的正数 $\varepsilon$ 都成立, 即可得出 $\underline{f}_C(\alpha) \geqslant f = f_{\mathrm{H}}(\alpha)$. □

正像前面遇见的许多分形具有相同的盒维数和豪斯多夫维数一样, 许多通常的多重分形测度也具有相同的粗线条谱和精细谱; 也就是说, 式 (17.19) 中的等号成立. 下一节将说明自相似测度的情形就是具有此种性质的测度.

为多重分形的目的, 通过建立合适的豪斯多夫类型测度, 可以在精细的分析理论中定义量 $\beta(q)$, 它起到了一个相似的作用, 这就如在粗线条理论中的式 (17.7). $\beta(q)$ 的勒让德变换确定了精细分形谱的一个上界, 而在许多情形中它也给出了这个谱的真值.

## 17.3 自相似多重分形

本节将计算 $\mathbf{R}$ 上的自相似测度的精细多重分形谱, 前面的式 (17.1) 是它的一个特殊情形. 自相似测度不仅本身是很重要的, 而且在这其中所描述的方法也可以用在很多其他测度上.

考虑支撑在 $\mathbf{R}$ 的子集 $F$ 上的自相似测度 $\mu$, 设 $S_1, \cdots, S_m$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是以 $c_1, \cdots, c_m$ 为压缩因子的相似压缩映射. 如第 9 章中一样, 迭代函数系 $\{S_1, \cdots, S_m\}$ 有 (唯一的、非空、紧的) 吸引子 $F \subset \mathbf{R}$. 这里要假定强分离条件成立, 即存在闭区间 $I$ 使得对任意 $i$ 有, $S_i(I) \subset I$, 并且当 $i \neq j$ 时, $S_i(I) \bigcap S_j(I) = \varnothing$.

如第 9 章中一样, 可以用有限序列 $\mathcal{I}_k = \{(i_1, \cdots, i_k) : 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 表示 $F$ 的自然构造中的区间, 对于 $\mathcal{I}_k$ 中的一个特定序列, 用 $\mathrm{i} = (i_1, \cdots, i_k)$ 表示 $\mathcal{I}_k$ 中的一个典型的区间. 于是:

$$I_{\mathrm{i}} = I_{i_1, \cdots, i_k} = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(I). \tag{17.22}$$

为了方便起见, 假设 $|I| = 1$, 于是, 对 $\mathrm{i} = (i_1, \cdots, i_k) \in \mathcal{I}_k$, 有

$$|I_{\mathrm{i}}| = c_{\mathrm{i}} \equiv c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k}. \tag{17.23}$$

可以通过重复细分来定义支撑在 $F$ 上的自相似测度 $\mu$. 设 $p_1, \cdots, p_m$ 为 "概率" 或 "质量比", 也就是说, 对任意的 $i$, $p_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. 继续将区间 $I_{i_1, \cdots, i_k}$ 上的质量分别以比例 $p_1 : \cdots : p_m$ 分配到 $I_{i_1, \cdots, i_{k,1}}, \cdots, I_{i_1, \cdots, i_{k,m}}$ 上, 这样就在 $F$ 上定义了一个质量分布 $\mu$(见命题 1.7). 因此

$$\mu(I_{i_1, i_2, \cdots, i_k}) = p_{\mathrm{i}} \equiv p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}. \tag{17.24}$$

容易看出, $\mu$ 是自相似测度, 这就意味着对任意集 $A$ 有

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^m p_i \mu(S_i^{-1}(A)). \tag{17.25}$$

下面, 给定任意实数 $q$, 定义 $\beta=\beta(q)$ 是满足下式的正数:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^q c_i^{\beta(q)} = 1. \tag{17.26}$$

由于 $0<c_i,p_i<1$, 这样的数 $\beta(q)$ 是存在的且是唯一的. 此外, $\beta$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是不增的函数, 且满足:

$$\lim_{q\to-\infty}\beta(q)=\infty \text{ 和 } \lim_{q\to\infty}\beta(q)=-\infty. \tag{17.27}$$

在等式 (17.26) 两边对 $q$ 求导, 可得,

$$0=\sum_{i=1}^{m} p_i^q c_i^{\beta(q)}\left(\ln p_i+\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}q}\ln c_i\right), \tag{17.28}$$

再次求导即有:

$$0=\sum_{i=1}^{m} p_i^q c_i^{\beta(q)}\left(\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}q^2}\ln c_i+\left(\ln p_i+\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}q}\ln c_i\right)^2\right).$$

因此, $\dfrac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}q^2}\geqslant 0$, 即 $\beta$ 是关于 $q$ 的凸函数; 而且只要对所有的 $i=1,\cdots,m$, $\ln p_i/\ln c_i$ 不全一样, 那么 $\dfrac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}q^2}>0$, 所以 $\beta$ 还是严格凸的; 为了避免退化情况, 就假定这个条件成立.

下面将证明精细 (豪斯多夫) 多重分形谱, $f_{\mathrm{H}}(\alpha)=\dim F_\alpha$, 是 $\beta$ 的勒让德变换, 和前面一样, 这里 $\beta$ 的勒让德变换$f$ 定义为

$$f(\alpha)=\inf_{-\infty<q<\infty}\{\beta(q)+\alpha q\}, \tag{17.29}$$

如果上式是有限的话. 因为 $\beta$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是凸函数, 所以存在 $\alpha$ 的变化范围, 记 $\alpha\in[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$ 在此范围内, $\beta$ 的图支撑在斜率为 $-\alpha$ 的直线上, 并且对于这样的 $\alpha$, 支撑线是唯一的 (因此 $-\alpha_{\min}$ 和 $-\alpha_{\max}$ 是 $\beta$ 的图的渐近线的斜率). 于是, $\beta$ 的勒让德变换 $f:[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]\to\mathbf{R}$ 就是 $L_\alpha$ 与纵坐标轴相交处的值 (可再次参见图 17.2). 显然, $f$ 对 $\alpha$ 是连续的.

由于 $\beta$ 是严格凸的, 对给定的 $\alpha$, 式 (17.29) 中的下确界在唯一的 $q=q(\alpha)$ 处达到; 对 $\beta(q)+\alpha q$ 求导并使其值等于 0, 即有:

$$\alpha=-\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}q}, \tag{17.30}$$

所以

$$f(\alpha)=\alpha q+\beta(q)=-q\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}q}+\beta(q). \tag{17.31}$$

注意到, 对任意的 $q \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}$ 以及 $\alpha \in (\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$, 只要知道其中一个, 就可以根据式 (17.26)、式 (17.30) 和式 (17.31) 确定另外两个. 运用式 (17.30) 和式 (17.28) 的变换可得：

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i^q c_i^\beta \ln p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i^q c_i^\beta \ln c_i}. \tag{17.32}$$

通过观察这个表达式, 我们可以发现：

$$\alpha_{\min} = \min_{1\leqslant i\leqslant m} \ln p_i/\ln c_i \quad 和 \quad \alpha_{\max} = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \ln p_i/\ln c_i, \tag{17.33}$$

并且这两个数关于 $q$ 分别趋于 $\infty$ 和 $-\infty$.

只要数 $\{\ln p_i/\ln c_i\}_{i=1}^m$ 都互不相同, 就有 $f(\alpha_{\min}) = f(\alpha_{\max}) = 0$(见练习 17.8).

在式 (17.31) 的两边同时对 $\alpha$ 求导, 并且运用式 (17.30), 就有

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha} = \alpha\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\alpha} + q + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\alpha} = q. \tag{17.34}$$

由 $q$ 随 $\alpha$ 的增加而减小可知, $f$ 是 $\alpha$ 的凸函数.

$q$ 取某些特殊值时的情形特别有趣 (见图 17.4). 如果 $q = 0$, 则 $\beta(q) = \dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{spt}\mu)$, 比较式 (17.26), 可得式 (9.13) 的维数公式; 更进一步, 通过式 (17.34), $q = 0$ 对应于 $f(\alpha)$ 的最大值; 于是, $\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{spt}\mu) = \max_\alpha f(\alpha)$.

当 $q = 1$ 时, 式 (17.26) 意味着 $\beta(q) = 0$, 因此, 由式 (17.31) 知 $f(\alpha) = \alpha$. 而且, $\mathrm{d}f(\alpha)/\mathrm{d}\alpha = q = 1$, 所以曲线 $f(\alpha)$ 位于直线 $f = \alpha$ 的下面, 并且这两条线在 $q = 1$ 点处相切. 后面, 很快就会得出 $\alpha(1) = f(\alpha(1)) = \dim_{\mathrm{H}} \mu$, 其中,

$$\dim_{\mathrm{H}} \mu = \inf\{\dim_{\mathrm{H}} E : E \text{ 是满足 } \mu(E) > 0 \text{ 的博雷尔集}\} \tag{17.35}$$

是*测度 $\mu$ 的豪斯多夫维数*. 因此, $\mu$ 的维数就是 $\mu$ 所凝聚的有效部分的集合的维数.

现在可以阐述自相似测度多重分形谱的主要结论, 即豪斯多夫多重分形谱是由式 (17.29) 通过 $\beta(q)$ 的勒让德变换得到的, 其中 $\beta(q)$ 是由式 (17.26) 定义的.

**定理 17.4**　*设 $\mu$ 是如上定义的自相似测度, 并设*

$$F_\alpha = \{x \in \mathbf{R}^n : \dim_{\mathrm{loc}} \mu(x) = \alpha\}.$$

*如果 $\alpha \notin [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, 则 $F_\alpha = \varnothing$; 并且如果 $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, 则*

$$f_{\mathrm{H}}(\alpha) \equiv \dim_{\mathrm{H}} F_\alpha = f(\alpha), \tag{17.36}$$

*其中 $f$ 是 $\beta(q)$ 的勒让德变换.*

这里先给出这个定理的简单的部分证明, 然后再给出其稍微完整的证明.

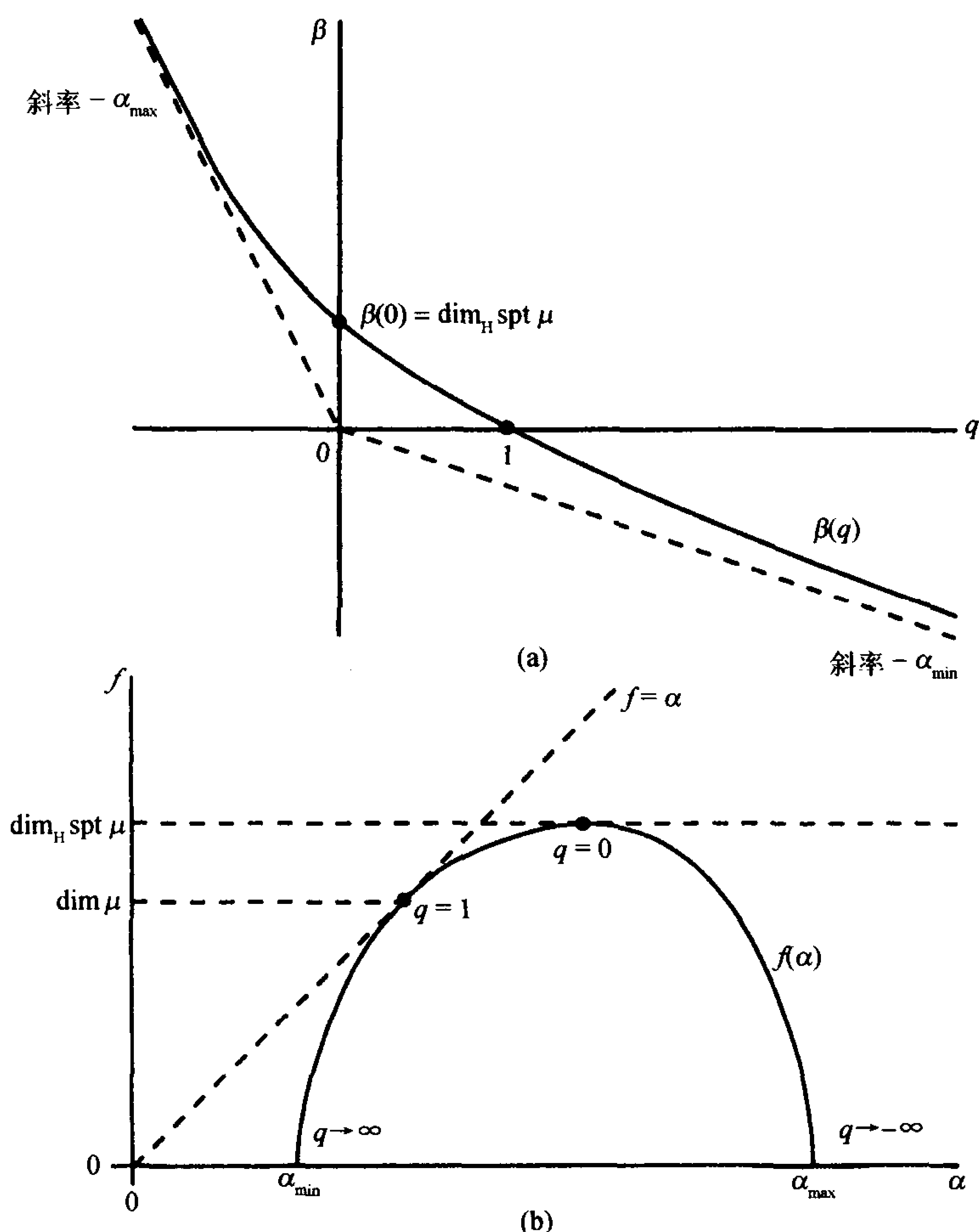



图 17.4 典型的自相似测度的多重分形函数的形式：(a) $\beta(q)$ 曲线; (b) "多重分形谱" $f(\alpha)=\dim_H F_\alpha$, 它是 $\beta(q)$ 的勒让德变换

按通常对此类问题的处理方法, 是通过其部分区间 $I_i$ 而不是通过球 $B(x,r)$ 来重新定义 $F_\alpha$. 对 $x\in \mathrm{spt}\mu$, 设 $I_k(x)$ 表示包含 $x$ 的 $k$ 水平区间 $I_{i_1,\cdots,i_k}$. 下面的论证中将把集 $I_k(x)$ 和球 $B(x,r)$ 来回转换, 其中 $|I_k(x)|$ 与 $r$ 是可比较的.

**引理 17.5** 对任意的 $x\in F$ 有

$$\dim_{\mathrm{loc}}\mu(x)\equiv\lim_{r\to 0}\frac{\ln\mu(B(r,x))}{\ln r}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\mu(I_k(x))}{\ln|I_k(x)|}. \tag{17.37}$$

上式中的两极限同时存在或同时不存在, 特别地,

$$F_\alpha=\left\{x\in F:\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\mu(I_k(x))}{\ln|I_k(x)|}=\alpha\right\}. \tag{17.38}$$

**证明**　令 $b=\min_{1\leqslant i\leqslant m}|I_i|$, 并令 $d$ 表示区间 $I_1,\cdots,I_m$ 之间的最小距离, 且设 $x\in F, 0<r<1$, 取 $k$ 是使得下式成立的整数:

$$|I_k(x)|\leqslant r<|I_{k-1}(x)|\leqslant b^{-1}|I_k(x)|.$$

那么 $I_k(x)\subset B(x,r)$ 且 $B(x,dr)\bigcap E\subset I_k(x)$, 由于 $I_k(x)$ 和任意 $k$ 水平区间的距离至少是 $d|I_{k-1}(x)|>dr$, 则

$$\mu(B(x,dr))\leqslant\mu(I_k(x))\leqslant\mu(B(x,r)).$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{\ln\mu(B(x,dr))}{\ln(dr)-\ln d}&=\frac{\ln\mu(B(x,dr))}{\ln r}\leqslant\frac{\ln\mu(I_k(x))}{\ln|I_k(x)|}\leqslant\frac{\ln\mu(B(x,r))}{\ln br}\\&=\frac{\ln\mu(B(x,r))}{\ln b+\ln r}.\end{aligned}$$

令 $r\to0$, 也就是 $k\to\infty$, 即得证. □

我们将给出上界 $\dim_{\rm H}F_\alpha\leqslant f(\alpha)$ 的直接证明, 其中包含了在区间限制类上求和的思想, 在多重分形理论中经常用到这种技巧.

**定理 17.4 的部分证明**　首先证明对 $q>0$, 有 $f(\alpha)\leqslant\beta(q)+q\alpha$: 除了符号的变化外, $q\leqslant0$ 的情形也类似可证 (见练习 17.13), 因此对 $q$ 的所有值都有, $\dim_{\rm H}F_\alpha\leqslant f(\alpha)$.

取 $\varepsilon>0$, 用 $Q_k$ 表示满足条件

$$|I_{\rm i}|^{\alpha+\varepsilon}\leqslant\mu(I_{\rm i})\tag{17.39}$$

的 $k$ 水平序列 $\mathrm{i}=(i_1,\cdots,i_k)\in\mathcal{I}_k$ 组成的集合, 则利用多项式展开及式 (17.26) 可得:

$$\begin{aligned}\sum_{\mathrm{i}\in Q_k}|I_{\rm i}|^{\beta+q(\alpha+\varepsilon)}&\leqslant\sum_{\mathrm{i}\in Q_k}|I_{\rm i}|^{\beta}\mu\left(I_{\rm i}\right)^q\\&\leqslant\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{I}_k}|I_{\rm i}|^{\beta}\mu\left(I_{\rm i}\right)^q\\&=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\left(c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k}\right)^\beta\left(p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}\right)^q\\&=\left(\sum_{i=1}^m p_i^q c_i^\beta\right)^k=1.\end{aligned}\tag{17.40}$$

对于每个整数 $K$, 记

$$F^K=\{x\in F:\mu(I_k(x))\geqslant|I_k(x)|^{\alpha+\varepsilon},\ 任意\ k\geqslant K\}.$$

则对于任意 $k \geqslant K$, 由式 (17.39) 知 $F^K \subset \bigcup_{\mathrm{i}\in Q_k} I_{\mathrm{i}}$; 由于对 $k$ 水平区间 $I_{\mathrm{i}}$, 有 $|I_{\mathrm{i}}| \leqslant c^k$, 其中 $c = \max_{1\leqslant i\leqslant m} c_i$, 因此, 由式 (17.40) 可得 $\mathcal{H}_{c^k}^{\beta+q(\alpha+\varepsilon)}(F^K) \leqslant 1$. 令 $k \to \infty$, 则有 $\mathcal{H}^{\beta+q(\alpha+\varepsilon)}(F^K) \leqslant 1$, 即得 $\dim_{\mathrm{H}}(F^K) \leqslant \beta + q(\alpha+\varepsilon)$. 但由式 (17.38) 知 $F_\alpha \subset \bigcup_{K=1}^{\infty} F^K$, 如果 $\ln\mu|I_k(x)|/\ln|I_k(x)| \to \alpha$, 则对充分大的 $k$, 有 $\mu(I_k(x)) \geqslant |I_k(x)|^{\alpha+\varepsilon}$. 因此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有 $\dim_{\mathrm{H}} F_\alpha \leqslant \beta + q(\alpha+\varepsilon)$, 即得 $\dim_{\mathrm{H}} F_\alpha \leqslant \beta + q\alpha$. □

[* 这个计算的余下部分可以省略.]

现在给出定理 17.4 的完整的证明. 记

$$\Phi(q,\beta) = \sum_{i=1}^{m} p_i^q c_i^\beta, \tag{17.41}$$

其中 $q,\beta \in \mathbf{R}$, $\beta(q)$ 是通过等式 $\Phi(q,\beta(q)) = 1$ 来定义的 (见式 (17.26)). 需要利用下面的引理来给出的 $\Phi$ 在点 $(q,\beta(q))$ 附近的估计.

**引理 17.6** 对任意 $\varepsilon > 0$ 和任意充分小的 $\delta > 0$, 下面两个不等式成立:

$$\Phi(q+\delta, \beta(q) + (-\alpha+\varepsilon)\delta) < 1 \tag{17.42}$$

$$\Phi(q-\delta, \beta(q) + (\alpha+\varepsilon)\delta) < 1 \tag{17.43}$$

**证明** 我们已知 $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}q = -\alpha$, 则如果 $\delta$ 充分小, 可得关于 $q$ 的展开式:

$$\beta(q+\delta) = \beta(q) - \alpha\delta + O(\delta^2) < \beta(q) + (-\alpha+\varepsilon)\delta.$$

由于 $\Phi(q+\delta, \beta(q+\delta)) = 1$, 且 $\Phi$ 关于第二个变量是递减的, 故不等式 (17.42) 成立. 用类似的方法可以证明不等式 (17.43) 也是成立的. □

为了证明定理 17.4, 对于每个 $\alpha$, 可以确定一个凝聚在 $F_\alpha$ 上的测度 $\nu$, 并且研究当 $r \to 0$ 时, $\nu(B(x,r))$ 服从的幂定律的性状, 以便能够运用命题 4.9 去求 $F_\alpha$ 的维数. 给定 $q \in \mathbf{R}$ 和 $\beta = \beta(q)$, 式 (17.26) 保证了可以通过重复细分的方法在 $\mathrm{spt}\mu$ 上定义一个概率测度 $\nu$, 使得对每个 $(i_1, \cdots, i_k)$, 有

$$\nu(I_{i_1,\cdots,i_k}) = (p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k})^q (c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k})^\beta, \tag{17.44}$$

并且可以用通常的办法将其拓展成 $F$ 上的一个测度.

对任意的 $\mathrm{i} = (i_1, \cdots, i_k)$, 式 (17.23) 和式 (17.24) 给出了度量 $I_{\mathrm{i}}$ 的三种方法:

$$|I_{\mathrm{i}}| = c_{\mathrm{i}}, \quad \mu(I_{\mathrm{i}}) = p_{\mathrm{i}}, \quad \nu(I_{\mathrm{i}}) = p_{\mathrm{i}}^q c_{\mathrm{i}}^\beta. \tag{17.45}$$

下面的命题包含了计算多重分形谱的关键所在.

**命题 17.7**　设 $q, \beta, \alpha$ 和 $f$ 的定义如上所述, 且 $\nu$ 是由式 (17.44) 所确定的测度, 则

(a) $\nu(F_\alpha) = 1$,

(b) 对任意的 $x \in F_\alpha$, 当 $r \to 0$ 时, 有 $\ln \nu(B(x,r))/\ln r \to f(\alpha)$.

**证明**　给定 $\varepsilon > 0$, 则对任意的 $\delta > 0$, 运用式 (17.45) 及多项式的展开得:

$$\begin{aligned}\nu\{x : \mu(I_k(x)) \geqslant |I_k(x)|^{\alpha-\varepsilon}\} &= \nu\{x : 1 \leqslant \mu(I_k(x))^\delta |I_k(x)|^{(\varepsilon-\alpha)\delta}\} \\ &\leqslant \int \mu(I_k(x))^\delta |I_k(x)|^{(\varepsilon-\alpha)\delta} \mathrm{d}\nu(x) \\ &= \sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{I}_k} \mu(I_\mathrm{i})^\delta |I_\mathrm{i}|^{(\alpha-\varepsilon)\delta} \nu(I_\mathrm{i}) \\ &= \sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{I}_k} p_\mathrm{i}^{q+\delta} c_\mathrm{i}^{\beta+(\varepsilon-\alpha)\delta} \\ &= \left( \sum_{i=1}^m p_\mathrm{i}^{q+\delta} c_\mathrm{i}^{\beta+(\varepsilon-\alpha)\delta} \right)^k \\ &= [\Phi(q+\delta, \beta+(\varepsilon-\alpha)\delta)]^k,\end{aligned}$$

其中 $\Phi$ 由式 (17.41) 定义. 选择 $\delta$ 充分小并利用式 (17.42) 可得

$$\nu\{x : \mu(I_k(x)) \geqslant |I_k(x)|^{\alpha-\varepsilon}\} \leqslant \gamma^k, \tag{17.46}$$

这里 $\gamma < 1$ 且不依赖于 $k$, 于是

$$\nu\{x: \text{存在 } k \geqslant K, \text{ 使 } \mu(I_k(x)) \geqslant |I_k(x)|^{\alpha-\varepsilon}\} \leqslant \sum_{k=K}^{\infty} \gamma^k \leqslant \gamma^K/(1-\gamma).$$

因此对于 $\nu$ 几乎所有的 $x$, 有:

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln \mu(I_k(x))}{\ln |I_k(x)|} \geqslant \alpha - \varepsilon.$$

上式对于任意的 $\varepsilon > 0$ 都是成立的, 于是就得到了下式中左边的不等式

$$\alpha \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln \mu(I_k(x))}{\ln |I_k(x)|} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln \mu(I_k(x))}{\ln |I_k(x)|} \leqslant \alpha.$$

利用式 (17.43) 去估计 $\nu\{x : \mu(I_k(I)) \leqslant |I_k(x)|^{\alpha+\varepsilon}\}$, 用类似的方法可以证明右边的不等式. 由式 (17.37) 可以得到, 对 $\nu$ 几乎所有的 $x$, 有

$$\dim_{\mathrm{loc}} \mu(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln \mu(I_k(x))}{\ln |I_k(x)|} = \alpha,$$

于是有 $\nu(F_\alpha) = \nu(F) = 1$.

对于 (b), 由式 (17.45) 可得:

$$\frac{\ln \nu(I_k(x))}{\ln |I_k(x)|} = q\frac{\ln \mu(I_k(x))}{\ln |I_k(x)|} + \beta\frac{\ln |I_k(x)|}{\ln |I_k(x)|} \tag{17.47}$$

因此, 对任意 $x \in F_\alpha$, 当 $k \to \infty$, 运用式 (17.31) 得

$$\frac{\ln \nu(I_k(x))}{\ln |I_k(x)|} \to q\alpha + \beta = f. \tag{17.48}$$

应用式 (17.37), 并用 $\nu$ 代替 $\mu$, 可得 (b) 是成立的. □

现在可以来证明本节关于自相似测度的多重分形谱的主要定理 17.4.

**定理 17.4 的证明** 由式 (17.45) 可得:

$$\frac{\ln \mu(I_{\mathrm{i}})}{\ln |I_{\mathrm{i}}|} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \ln p_{i_j}}{\sum_{j=1}^{k} \ln c_{i_j}},$$

其中 $\mathrm{i} = (i_1, \cdots, i_k)$, 因此根据式 (17.33), 对任意 i, 有 $\ln \mu(I_{\mathrm{i}})/\ln |I_{\mathrm{i}}| \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$. 由式 (17.37) 中的 $\ln B(x,r)/\ln r$ 的极限可知, $\ln \mu(I_{\mathrm{i}})/\ln |I_{\mathrm{i}}|$ 唯一可能的极限点在 $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ 中, 特别地, 如果 $\alpha \notin [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, 则 $F_\alpha = \varnothing$.

如果 $\alpha \in (\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$, 那么由命题 17.7, 存在凝聚在 $F_\alpha$ 上的测度 $\nu$, 满足对任意的 $x \in F_\alpha$, 有 $\lim_{r\to 0} \ln \nu(B(x,r))/\ln r = f(\alpha)$, 因此式 (17.36) 可以由命题 4.9 得到, 至于 $\alpha = \alpha_{\min}$ 和 $\alpha = \alpha_{\max}$ 的情形, 请参见练习 17.14. □

于是, 对于自相似测度, $F_\alpha$ 的维数可以由式 (17.26) 中 $\beta(q)$ 的勒让德变换得到. spt$\mu$ 的维数和测度 $\mu$ 的维数可以很容易地利用多重分形谱求得 (见式 (17.35)).

**命题 17.8** 设 $\mu$ 是如上所述的自相似测度, 把 $\alpha = \alpha(q)$ 作为 $q$ 的函数.

(a) 当 $\alpha = \alpha(0)$ 时, $f(\alpha)$ 取得最大值, 且满足 $f(\alpha(0)) = \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{spt}\mu$.

(b) $f(\alpha(1)) = \alpha(1) = \dim_{\mathrm{H}} \mu$.

**证明** 注意到 (a) 和 $f(\alpha(1)) = \alpha(1)$ 是式 (17.34) 的一个直接推论. 对于测度 $\mu$ 的维数, 由式 (17.26), 如果 $q = 1$, 则 $\beta = 0$, 因此, 由式 (17.44), 测度 $\nu$ 与测度 $\mu$ 是一致的. 于是, 根据命题 17.7, $\mu(F_{\alpha(1)}) = 1$, 并且对任意的 $x \in F_{\alpha(1)}$, $\dim_{\mathrm{loc}} \mu(x) = f(\alpha(1))$. 因此, 由命题 4.9, 对任意满足 $\mu(E) > 0$ 的 $E$, 有 $\dim_{\mathrm{H}} E = f(\alpha(1))$, 于是, 由式 (17.35) 中测度的维数的定义, 即知 (b) 是成立的. □

下面可以证明自相似测度的粗线条谱也等于 $f(\alpha)$, 即是 $\beta$ 的勒让德变换.

**命题 17.9** 设 $\mu$ 是如上所述的定义在 $\mathbf{R}$ 上的自相似测度, 则对满足 $q \geqslant 0$ 的任意 $\alpha = \alpha(q)$, 成立等式:

$$\underline{f}_C(\alpha) = \overline{f}_C(\alpha) = f_{\mathrm{H}}(\alpha) = f(\alpha). \tag{17.49}$$

**证明** 首先, 由定理 17.4 和引理 17.3 知, $f(\alpha)=f_{\mathrm{H}}(\alpha)\leqslant \underline{f}_C(\alpha)=\overline{f}_C(\alpha)$, 其中粗线条谱是由式 (17.4) 和式 (17.5) 给出的.

为了证明反向的不等式, 设 $d$ 表示 $I_i$ 与 $I_j$ 的最小距离, 其中 $i\neq j$, 并记 $a=2/d$, 给定 $r<a^{-1}$, 用 $Q$ 表示所有 $\mathrm{i}=(i_1,\cdots,i_k)\in\mathcal{I}_k$ 的序列组成的集合, 这里 $|I_{i_1,\cdots,i_k}|\leqslant ar$, 但是 $\left|I_{i_1,\cdots,i_{k-1}}\right|>ar$. 如果 $\mathrm{i}\in Q$, 则有

$$abr<|I_{\mathrm{i}}|=c_{\mathrm{i}}\leqslant ar, \tag{17.50}$$

其中 $b=\min_{1\leqslant i\leqslant m}c_i$. 注意到 $F$ 中的每一点恰好位于 $\mathrm{i}\in Q$ 的一个集合 $I_{\mathrm{i}}$ 上, 并且对于不同的 $\mathrm{i,j}\in Q$, 集合 $I_{\mathrm{i}}$ 和 $I_{\mathrm{j}}$ 至少有 $dar=2r$ 的间隔.

假设 $q>0$, 并设 $\beta,\alpha$ 和 $f$ 是相应于式 (17.26)、式 (17.30) 和式 (17.31) 给出的值, 则由式 (17.50) 和式 (17.31), 有:

$$\begin{aligned}\#\{\mathrm{i}\in Q:\mu(I_{\mathrm{i}})\geqslant a^{-\alpha}|I_{\mathrm{i}}|^{\alpha}\}&=\#\{\mathrm{i}\in Q:1\leqslant(a^{\alpha}|I_{\mathrm{i}}|^{-\alpha}\mu(I_{\mathrm{i}}))^q\}\\&=\#\left\{\mathrm{i}\in Q:1\leqslant a^{\alpha q}p_{\mathrm{i}}^q c_{\mathrm{i}}^{-\alpha q}\right\}\\&\leqslant a^{\alpha q}\sum_{\mathrm{i}\in Q}p_{\mathrm{i}}^q c_{\mathrm{i}}^{-\alpha q}\\&=a^{\alpha q}\sum_{\mathrm{i}\in Q}p_{\mathrm{i}}^q c_{\mathrm{i}}^{\beta}c_{\mathrm{i}}^{-\beta-\alpha q}\\&\leqslant a^{\alpha q}(abr)^{-\beta-\alpha q}\sum_{\mathrm{i}\in Q}p_{\mathrm{i}}^q c_{\mathrm{i}}^{\beta}\\&\leqslant a^{\alpha q}(ab)^{-f}r^{-f},\end{aligned}$$

其中等式 $\sum_{\mathrm{i}\in Q}p_{\mathrm{i}}^q c_{\mathrm{i}}^{\beta}=1$ 是通过不断地重复细分 $\sum_{i=1}^m p_{\mathrm{i},i}^q c_{\mathrm{i},i}^{\beta}=p_{\mathrm{i}}^q c_{\mathrm{i}}^{\beta}$ 而得到的. 因为每个 $r$ 网区间至多与 $\mathrm{i}\in Q$ 的一个集 $I_{\mathrm{i}}$ 相交, 那么由式 (17.1) 中 $N_r(\alpha)$ 的定义, 并运用式 (17.50), 可得:

$$\begin{aligned}N_r(\alpha)&=\#\{C:\ C\text{ 是 }r\text{网区间, 且满足 }\mu(C)\geqslant r^{\alpha}\}\\&\leqslant\#\{\mathrm{i}\in Q:\mu(I_{\mathrm{i}})\geqslant a^{-\alpha}|I_{\mathrm{i}}|^{\alpha}\}\\&\leqslant a^{\alpha q}(ab)^{-f(\alpha)}r^{-f(\alpha)}.\end{aligned}$$

于是, 存在一个数 $c$, 使得对充分小的 $\varepsilon$ 和 $r$, 有:

$$N_r(\alpha+\varepsilon)-N_r(\alpha-\varepsilon)\leqslant N_r(\alpha+\varepsilon)\leqslant cr^{-f(\alpha+\varepsilon)},$$

因此, 由式 (17.5), 对任意 $\varepsilon>0$, $\overline{f}_C(\alpha)\leqslant f(\alpha+\varepsilon)$, 由于 $f$ 是连续的, 即得 $\overline{f}_C(\alpha)\leqslant f(\alpha)$. □

对相应于 $q<0$ 时的 $\alpha$, 前面定义的粗线条谱的性状不足于使它具有式 (17.49) 中的等式关系.

**例 17.1(续 4)** 利用命题 17.9, 可以完成对这个例子的分析. 由于 $\beta(q)=\ln(p_1^q+p_2^q)/\ln 3$, $\mu$ 的粗线条谱和精细谱都等于 $\beta(q)$ 的勒让德变换 $f(\alpha)$, 即对任意 $\alpha\in[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$, $f_C(\alpha)=f_{\rm H}(\alpha)=f(\alpha)$, 其中 $\alpha_{\min}=\min_{i=1,2}\ln p_i/(-\ln 3)$ 和 $\alpha_{\max}=\max_{i=1,2}\ln p_i/(-\ln 3)$, 与前面一样, 这将导出式 (17.14) 给出的 $f$ 的参数表达式.

上面这些方法可以进一步推广到许多多重分形测度上; 特别地, 自相似测度的多重分形谱的微分可以毫无困难的应用到 $\mathbf{R}^n$ 上的自相似测度中, 并且区间 $S_i(I)$ 的分离条件可以减弱成开集条件.

## 17.4 注记和参考文献

目前有大量关于多重分形的著作, 也可以用许多特殊的测度来计算多重分形谱. 这里只提供了一小部分参考文献, 一些更详细的内容可以在其中找到.

从分形的观点对测度进行研究的思想见 Mandelbrot(1982), 也可参见 Mandelbrot(1974). Frisch and Parisi(1985) 以及 Halsey *et al.* (1986) 将勒让德变换引进到多重分形分析中; 各种非常基本的方法由 Evertsz and Mandelbrot(1992), Falconer(1997), Feder(1988), McCauley(1993) 以及 Tél(1988) 给出. 作为多重分形的范围广泛的评述和综合文献, Mandelbrot 的《精选》(*Selecta*)(1999) 包含了许多已经发表的论文, 其中包括关于多重分形上更广泛的研究和大量的参考书籍. Harte(2001) 给出了对此理论的一个基本处理方法, 特别地, 还提出了谱的统计估计.

应用在多重分形理论中的测度理论包括豪斯多夫类型测度的运用以及不同类型谱之间的联系, 这方面的内容见 Brown, Michon and Peyrière (1992), Olsen(1995) 以及 Pesin(1997). 关于粗线条谱的详细信息见 Riedi(1995).

自相似测度的分析见 Cawley and Mauldin(1992) 以及 Edgar and Mauldin(1992) 和 Olsen(1994), Olsen 还将其延拓到基于图的测度的构造. 具有无穷相似性的自相似多重分形见 Mandelbrot and Riedi(1995) 以及 Mauldin and Urbański(1996). Mandelbrot(1974), Kahane and Peyrière(1976) 以及 Olsen(1994) 将其推广到随机自相似测度, Patzschke(1997) 将其推广到自仿射测度和弱分离条件. 基于向量值的多重分形见 Falconer and O'Neil(1996). McMauley(1993), Simpelaere(1994) 以及 Pesin(1997) 考虑了发生在动力系统中的多重分形测度. Jaffard(1997) 从多重分形的观点讨论了函数的局部形式.

许多关于多重分形性状的其他有意思的问题, 诸如负维数的解释, 见 Mandelbrot(1991); 多重分形的几何性质, 比如其射影下的性状、相交和积等, 见 Olsen(2000).

## 练 习

**17.1** 试求 $\beta(q)=\mathrm{e}^{-q}$ 的勒让德变换.

**17.2** 设 $\mu_1,\mu_2$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上具有不交支撑的有限测度, 定义 $\nu=\mu_1+\mu_2$. 证明 $f_{\mathrm{H}}^{\nu}(\alpha)=\max\{f_{\mathrm{H}}^{1}(\alpha),f_{\mathrm{H}}^{2}(\alpha)\}$, 其中 $f_{\mathrm{H}}^{\nu}(\alpha),f_{\mathrm{H}}^{1}(\alpha)$ 和 $f_{\mathrm{H}}^{2}(\alpha)$ 分别是 $\nu,\mu_1$ 和 $\mu_2$ 的豪斯多夫谱. 说明 $f_{\mathrm{H}}(\alpha)$ 在 $\alpha$ 不等于零的范围内不必是凹的.

**17.3** 设 $\mu$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有限测度, 并设 $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是双利普希茨函数. 定义 $\mathbf{R}^n$ 上的像测度 $\nu$ 为 $\nu(A)=\mu(g^{-1}(A))$. 证明当局部维数 $\dim_{\mathrm{loc}}\mu(x)$ 和 $\dim_{\mathrm{loc}}\nu(g(x))$ 存在时, 这两个维数相等; 因此可以证明由式 (17.17) 给出的 $f_{\mathrm{H}}(\alpha)$ 对于 $\nu$ 和 $\mu$ 是相同的.

**17.4** 设 $\mu$ 是支撑在 "由去掉区间中间一半而生成的" 康托尔集上的自相似测度, 即 $c_1=c_2=1/4$, 按比例 $p_1:p_2$ 将质量重复分配到其左右部分, 这里 $p_1,p_2$ 满足: $p_1+p_2=1$, 和 $p_1<p_2$. 证明 $\beta(q)=\ln(p_1^q+p_2^q)/\ln 4$. 因此, 可以通过参数 $q$ 求出 $\alpha$ 和 $f$.

**17.5** 设 $\mu$ 是练习 17.4 中康托尔集上的自相似测度, 对于 $q\geqslant 0$, 估计式 (17.6) 中的矩和 [提示: 首先考虑 $r=4^{-k}$ 的情形]. 因此表明式 (17.7) 中的 $\beta(q)$ 与练习 17.4 中的是一致的.

**17.6** 设 $\mu$ 是以长度比为 $c_1=1/2$, $c_2=1/4$ 的康托尔集为支撑, 按质量比 $p_1$ 和 $p_2$ 重复细分而构造出的自相似测度, 试给出 $\beta(q)$ 精确的表达式.

**17.7** 设 $\mu$ 是例 17.1 定义的测度, $\beta$ 由式 (17.13) 给出, 证明 $\beta(q)-\beta(-q)=q\ln(p_1p_2)/\ln 3$; 因此, 由式 (17.10) 中勒让德变换得到的多重分形谱 $f(\alpha)$ 是关于 $\alpha=-\ln(p_1p_2)/2\ln 3$ 对称的, 也就是 $f(\alpha)=f(-\ln(p_1p_2)/\ln 3-\alpha)$.

**17.8** 设 $\mu$ 是例 17.1 定义的测度, 且 $0<p_1<p_2<1$, $\beta$ 由式 (17.13) 给出. 证明对于充分大的 $q$, $\beta(q)=q\ln p_2/\ln 3+o(1)$; 并推导当 $q$ 为绝对值充分大的负数时的类似的表达. (这里 $o(1)$ 是当 $q\to\infty$ 而趋于 0 的 $q$ 的函数;) 分析 $\beta(q)$ 图通过原点的渐进线; 并证明 $\alpha_{\min}=-\ln p_2/\ln 3$, $\alpha_{\max}=-\ln p_1/\ln 3$ 以及 $f(\alpha_{\min})=f(\alpha_{\max})=0$.

**17.9** 对于 17.3 节讨论的自相似测度, 证明对 $\alpha_{\min}<\alpha<\alpha_{\max}$, 有 $\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}\alpha^2<0$; 因此 $f(\alpha)$ 曲线是严格凹的.

**17.10** 对式 (17.26) 定义的 $\beta$, 证明如果 $0<q\leqslant 1$, 则 $\beta(q)\leqslant 1-q$; 如果 $q\geqslant 1$, 则 $\beta(q)\geqslant 1-q$. (提示: 运用 Hölder 不等式: $\sum_{i=1}^m a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^m a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^m b_i^{p'}\right)^{1/p'}$, 其中 $1<p<\infty$, $1/p+1/p'=1$. )

**17.11** 设 $\mu$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的有限测度, proj 表示给定直线 $L$ 的投影. 定义 $\mu$ 到 $L$ 上的投影为: $(\mathrm{proj}\ \mu)(A)=\mu\{x\in\mathbf{R}^2:\mathrm{proj}\ x\in A\}$, 其中 $A\subset L$. 对于 $x\in\mathbf{R}^2$, 证明 $\overline{\lim}_{r\to 0}\ln((\mathrm{proj}\ \mu)(B_L(\mathrm{proj}\ x,r)))/\ln r\leqslant\overline{\lim}_{r\to 0}\ln\mu(B(x,r))/\ln r$, 其中 $B_L(y,r)$ 是 $L$ 上的中心是 $y$, 长度为 $2r$ 的区间.

**17.12** 适当修改 "定理 17.4 的部分证明", 证明: 对相应于 $q<0$ 情形的 $\alpha$, 有 $\dim_{\mathrm{H}}F_\alpha\leqslant\beta(q)+q\alpha$. (提示: 考虑满足条件 $\mu(I)\leqslant|I|^{\alpha-\varepsilon}$ 的区间 $I$ 的和式 $\sum|I|^{\beta+q(\alpha-\varepsilon)}$.)

**17.13** 扩展 "定理 17.4 的部分证明" 来证明对相应的 $q > 0$ 的 $\alpha$ 有

$$\dim_{\mathrm{H}}\{x \in F : \underline{\lim}_{k\to\infty} \ln \mu(I_k(x))/\ln|I_k(x)| \leqslant \alpha\} \leqslant f(\alpha).$$

**17.14** 当 $\alpha = \alpha_{\min}$ 时, 证明式 (17.36). (提示: 取 $\alpha$ 充分接近 $\alpha_{\min}$, 并注意到用 "对任意使得 $\ln \mu(B(x,r))/\ln r \leqslant \alpha$ 成立的 $x$, 有 $\lim_{r\to 0} \ln \nu(B(x,r))/\ln r \leqslant f(\alpha)$" 取代命题 17.7 中的 (b), 此命题仍然成立.)

# 第18章　物理应用

浮云的边界、山峰的轮廓、海岸线、闪电的分叉 $\cdots\cdots$ 以及许多其他自然界的物体, 用分形术语来描述其形状要比用经典几何中的直线和光滑曲线来描述好得多. 所以, 分形数学应该很适宜用来作为这些自然现象的模型, 也适宜用来对它们进行预测.

然而, 将分形几何的数学应用到现实生活的例子中还存在着相当大的困难. 比如说, 一般可以通过计算边长为 $\delta$ 的网正方形与英国海岸线相交的正方形的个数 $N_\delta$, 来估计这个海岸线的盒维数; 对从 20m 到 200km 范围内的 $\delta$ 值, 以 $-\ln\delta$ 为横坐标, 以 $\ln N_\delta$ 为纵坐标绘出的图非常接近于斜率大约为 1.2 的直线. 于是, 对这样的 $\delta$ 值, 幂定律 $N_\delta \simeq$ 常数 $\times\delta^{-1.2}$ 是成立的, 即在这个尺度范围内, 认为海岸线的维数为 1.2 是有意义的. 然而随着 $\delta$ 变小, 这个幂定律逐渐变得不精确, 最后也就没有什么意义了. 类似地, 与其他物理例子一样, 用边长为 $\delta$ 的盒子来估计维数, 在到达分子尺度之前就不可避免地要停止了.

本书第一部分对分形理论的研究都依赖于 $\delta\to 0$ 时取极限, 这在实际中是不可能做到的. 在自然界中不存在真正的分形, 正如不存在不可伸长的绳子, 也不存在没有摩擦的滑轮!

然而, 把分形 "精确" 的数学理论应用到自然界中 "近似的" 分形上, 还是有可能的, 而且在很多情况下, 已经取得了可喜的进展. 这和在科学中建立经典几何理论的很多应用是类似的. 例如, 把地球当作一个球体, 为涉及它的引力场的许多计算提供了非常好的近似.

在物理现象中, 具有分形模型的最有说服力的例子可能就是布朗运动 (参见第 16 章). 一个粒子由于受到随机分子的碰撞, 它的运动带有服从正态分布的增量的基本物理假设, 使它具有维数为 2 的运动轨迹. 这个结论可以根据计盒方法用实验来检验. 也可以在计算机上描绘出由大量的随机小增量形成的轨迹, 来模拟这个运动, 这样由计算机实现的图形的维数也可以用计盒方法来估计. 能够在实际中或在计算机上观测到的布朗运动, 具有理论模型所预测的分形形状 (也许应当指出由于质点沿着维数为 2 的处处不可微的轨道运动需要无穷的能量, 因此在非常小的尺度下, 甚至布朗运动也不能用分形来描述). 把实验、模拟、理论联系起来目的是为了研究其他分形物理现象.

因此, 分形的研究实际上在这三个方面进行的：实验、模拟和理论. 观测和度

量自然物体, 它们的维数和多重分形谱在一个适当的尺度范围内被估计, 也要注意它们对各个不同参数的依赖性. 这里有时要用到一些理论上的技巧, 比如射影定理 6.1 中为了估计照片上物体的维数而做的假定. 当然, 对一个有意义的维数, 重复同一个实验应当得出相同的值.

虽然维数单纯地作为一个物理常数可以有一定的意义, 但是如果能用物理术语解释分形的性质, 那就更令人满意了. 所以, 下一步就是设计一些方法来解释自然现象. 我们利用计算机模拟, 通过比较模拟中的与现实中的一些特征, 能对各种各样的模型进行评价. 由于计算机总是近似的, 因此只有把它作为自然界中的分形模型, 而不是尺度可以任意小的精确分形模型时, 确实才有比较好的效果.

希望有一种带有像维数这样明显的物理特征, 可以进行数学处理, 并且也能由数学论证推导出来的理论模型. 这种模型应当能解释这些特征依赖于各种不同参数的原因; 最理想的, 它不仅具有描述性而且还具有预测性. 自然界中的分形现象通常是相当复杂的以至于难以描述, 因此, 在建立和分析相应的数学模型时, 可能需要加上某些假设和做某些近似. 当然, 具有这样建立保持物理内涵的理论模型的能力, 是成为一名杰出理论科学家的标志. 有时对一些微分方程可以描述的物理现象, 分形吸引子也经常能解决 (见 13.5 节). 另一方面, 对带有分形边界或区域的微分方程的分析, 可以提出一些完全不同的问题.

有许多用这些方法专门研究分形现象的文献; 在这些文献中, 实验、模拟和理论三者之间维数的一致性, 经常好得使人惊奇. 此外, 维数的分析已经有效地被用来确定某些物理过程的主要特征. 然而还存在着很多问题, 诸如 "为什么浮云的投影在一个较广的尺度范围内有维数是 1.35 的边界？" "金属表面的维数如何影响它们的物理性质, 比如热辐射或摩擦系数？" "使地形的维数为 2.2 的地质学过程是什么？" 这些问题都应该在分形模型的框架内得到解答.

为了大多数试验目的, 必须用到计盒维数, 利用等价定义 3.1 之中任一条定义的 $N_\delta$, 物体的维数通常可以由估计 $\ln N_\delta$ 对应 $-\ln\delta$ 的图的斜率来确定. 经常希望通过一个物理近似集 $E$ 上的计盒计算, 去估计另一个精确的理论分形集 $F$ 的维数. 为了做到这一点, 一定要用比所需的近似精确度稍大一些的盒子. 确切地说, 如果 $d(E,F)\leqslant\varepsilon$, 这里 $d$ 为豪斯多夫距离, $N_\delta(\mathrm{E})$ 和 $N_\delta(F)$ 是半径为 $\delta$ 并且覆盖 $E$ 和 $F$ 的球的数目, 对 $\delta>\varepsilon$, 很容易看到

$$N_{\delta+\varepsilon}(E)\leqslant N_\delta(F)\leqslant N_{\delta-\varepsilon}(E)$$

当应用相应于 $E$ 的重对数图 $(\ln-\ln)$ 去估计 $\dim_{\mathrm{H}} F$ 时, 可以考虑应用上面的不等式. 正如在本书中各种各样的例子指出的那样, 还应当记住, 假定精确分形的豪斯多夫维数与盒维数相等是有一定的理论根据的.

有时, 一些其他的量对测度比对维数更方便. 例如, 在时间相关的信号中, 自相关函数 (见 11.2 节) 应该是可测的, 它给式 (11.20) 提供了维数的一个表示.

目前在比较详细地研究一些特殊的物理例子, 其中对分形的分析有助于对物理过程的理解.

## 18.1 分形的生长

很多自然界中的物体明显地以分形的形式生长, 分枝重复地分裂产生了更小的分枝. 当用适当的尺度观测一些树、一些根系和一些植物 (特别是最原始的植物, 像地衣、苔藓和海藻) 时, 它们看起来都像是分形的. 闪电和其他放电现象的分叉状图样, 以及在水中加进黏性液体 (如油) 所发生的 "黏性指进" 也都具有分枝分形形式. 在硫酸铜溶液电解过程中, 阴极上铜的沉积是以分形形式生长的.

决定植物生长的生物规律太复杂, 以至不能用来作为数学模型的基础, 可是, 其他现象可以用相对简单的生长规律来作为模型, 下面就要研究其中的一些现象.

用硫酸铜 ($CuSO_4$) 电解这个简单试验就能说明分形的生长 (见图 18.1). 一个圆形碟子的底部覆盖着一层很薄的硫酸铜溶液, 铜制的阴极立在碟子中央, 一个窄铜条环绕在碟子的边缘形成阳极. 如果在两个电极之间加上几伏的电压, 那么几分钟后, 围绕阴极开始形成铜的沉积; 大约半小时后, 析出的铜将扩展成几英寸长的分形图形.

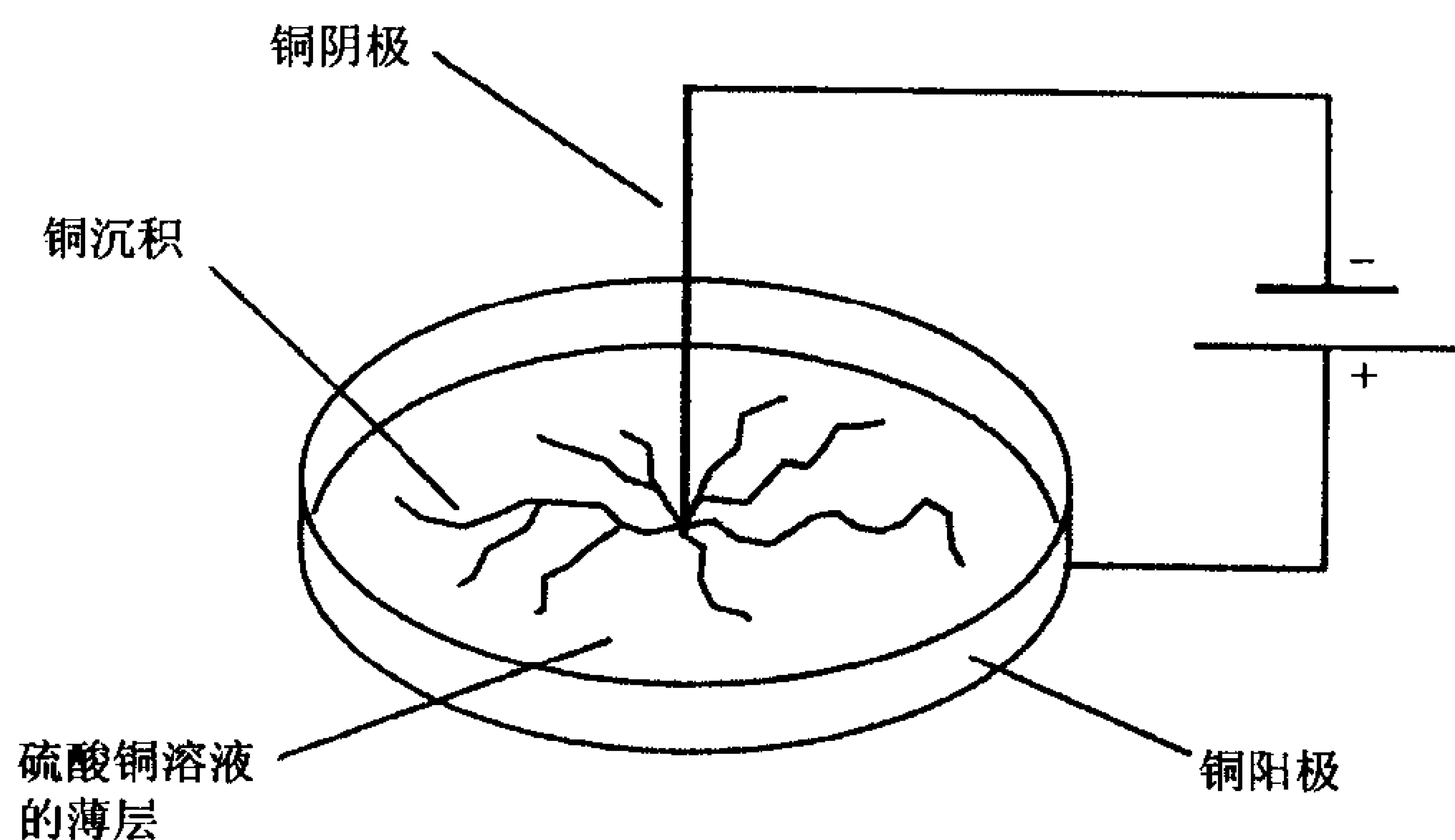



图 18.1 在硫酸铜电解过程中, 从阴极向外生长的铜的似分形样沉积

这个电解过程是这样的: 在溶液中, 硫酸铜分解成铜离子 ($Cu^{2+}$) 和硫酸根离子 ($SO_4^{2-}$), 并且在溶液中随机漂移. 当加上电压后, 铜离子击中阴极得到两个电子, 以铜的形式沉淀; 击中已经沉淀的铜的铜离子, 又以铜的形式沉淀, 所以沉淀物将从阴极向外生长. 如果铜离子是以充分随机的方式运动, 比如遵从布朗运动的轨道

(见第 16 章), 离子击中已经暴露在外的指状物的边缘的可能性, 要比击中早期沉淀部分的可能性要大, 因为早期沉淀的部分可以认为被随后的增长遮盖住了. 所以, 铜的沉淀将是以带有很细的分枝的指状物生长, 而不是以一个围绕阴极的固体 "团" 的形式生长, 至少这似乎是合理的.

在所描述的试验中, 由于在阴极和阳极之间加上了一个电场, $Cu^{2+}$ 离子是以布朗运动为轨道并且外加向阴极的漂移. 如果增加溶液中的硫酸根离子的浓度, 例如通过向溶液中加入硫酸钠, 会使电场中的铜离子受到屏蔽, 此时, 分形析出还是发生, 但却给数学模型的建立提供了方便, 因为现在的铜离子 ($Cu^{2+}$) 可以认为是以布朗运动轨道运动的. 一个类似的过程发生在硫酸锌 ($ZnSO_4$) 的电解中, 这里锌为阳极, 碳为阴极, 此时从阴极生长出锌的指状物.

**有限制的扩散凝聚**(the diffusion-limited aggregation, DLA) 模型提供了一个有关分形生长的很有说服力的模型. 这个模型以小正方形格子为基础, 从一个代表阴极的被涂黑的小正方形开始, 以它为中心做一个大圆. 在圆周附近的一个随机点释放出的粒子在圆上做布朗运动, 一直到它离开这个圆或到达与涂黑的正方形相邻的正方形为止, 所到达的这个相邻的正方形也被涂黑. 这个过程重复进行很多次后, 一个正方形的连通集将从初始的那个正方形向外生长. 为了计算方便, 设粒子做的是随机游动 (这是布朗运动的一个近似), 所以当粒子被释放后, 它将分别以 1/4 概率移动到相邻的左、右、上、下的正方形中, 这个过程持续进行下去, 一直到粒子离开这个圆, 或者到达与涂黑的正方形相邻的正方形中为止 (见图 18.2). (有很多缩短所需计算的方法, 例如, 如果粒子距离阴影部分为 $k$ 个正方形, 粒子也可以一次移动 $k$ 步).

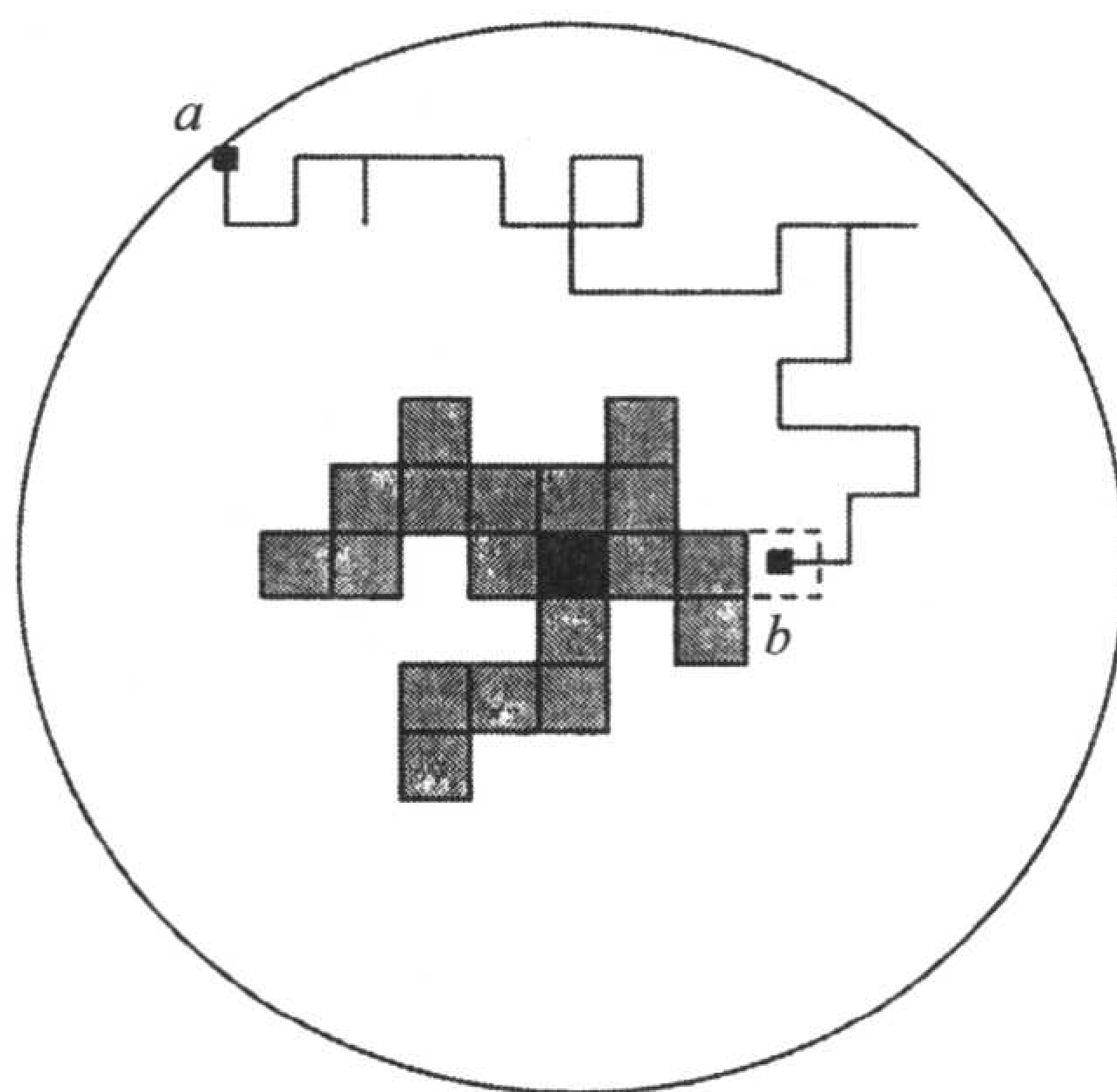



图 18.2 有限制的扩散凝集 (DLA) 模型. 在圆的一个随机点 $a$ 释放粒子, 粒子做随机游动直到它离开这个圆或者到达已经涂黑的正方形的相邻正方形 $b$, 在这种情形这个正方形也被涂黑

运行这个模型, 比如说有 10 000 个正方形被涂上了阴影, 能够得到一个高度分枝的图像 (见图 18.3), 这个图形与电解图很相似. 主要分枝从原点出发, 在生长过程中, 又出现了许多分枝, 每个分枝又产生了较小的分枝, 所有这些都向外生长. 自然, 在比正方形边长大的尺度情况下, 用计盒维数的方法能估计这些结构的维数, 电解实验和这个模拟之间有非常好的一致性, 它们的维数是 1.70, 在三维的类似情况下, 都有维数 2.43.

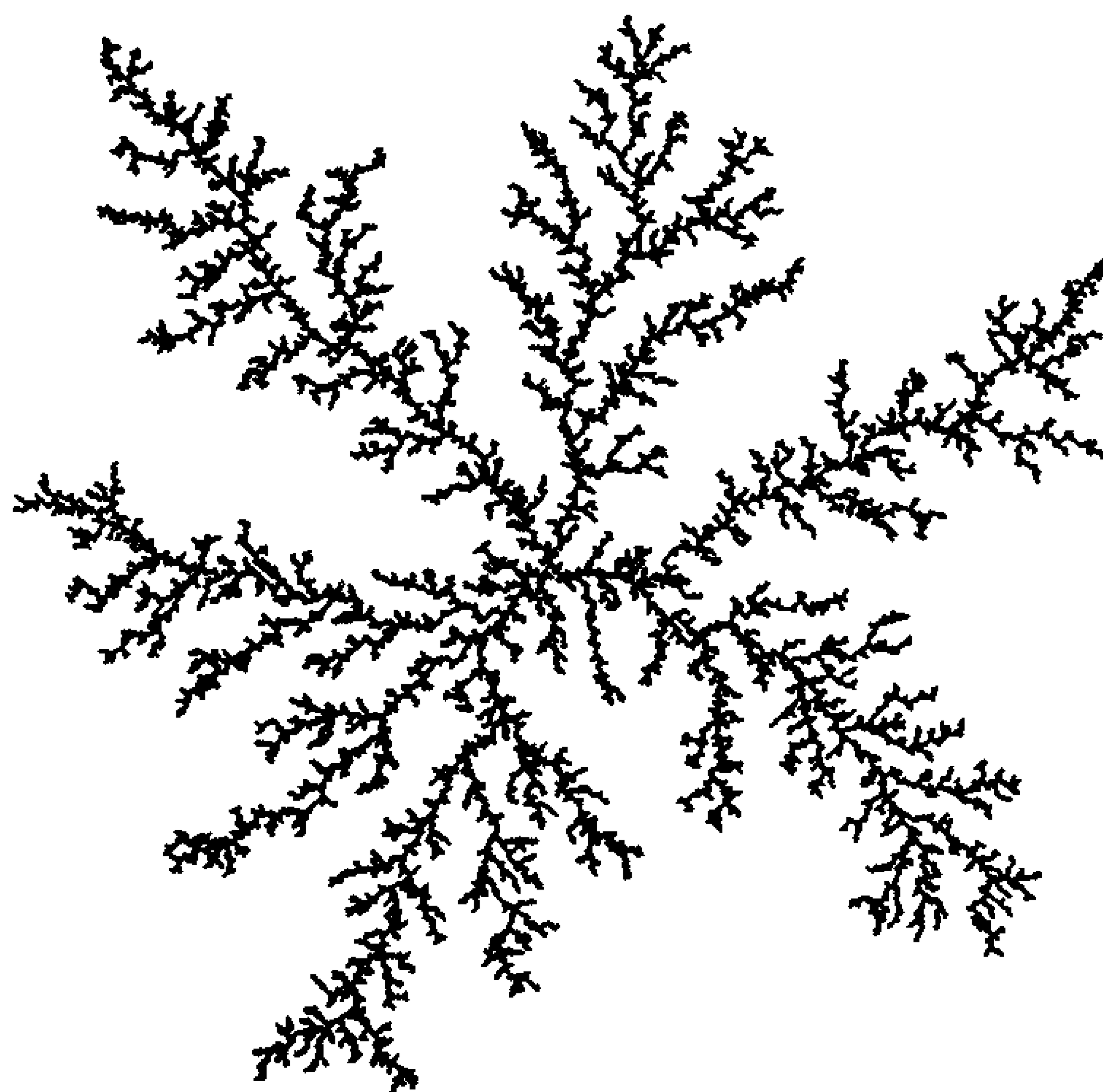


图 18.3 由计算机实现的有限制的扩散凝聚, 用所描述的方法从分成 700×700 个小正方形的正方形中选出 16 000 个小正方形

DLA 模型可以被看作是在一定的距离, 一个接一个不断地释放离子的过程. 尽管这为沉积的形式提供了一个好的模型, 但它不能体现出沉积随时间发展变化的思想, 而只能取决于大量同时随机运动的离子, 这些离子在碰到沉积的铜就附在它上面. 所以这个 "离散" 模型的 "连续" 变形是很有用的. 假定溶液中的大量铜离子在点 $x$ 和时刻 $t$ 的密度为 $u(x,t)$, 那么在圆心在 $x$, 面积为 $\delta x$ 的很小的圆盘上的离子数量为 $u(x,t)\delta x$; 如果设离子按独立的布朗轨道运动, 时刻 $t$ 时, 在这个小圆盘上的离子会重新分布; 而到 $t+h$ 时, 离子在点 $x'$ 具有由 2 维正态分布给出的密度:

$$\delta u(x',t+h) = (2\pi)^{-1}h^{-1}\exp\Big(-\frac{(x-x')^2}{2h}\Big)u(x,t)\delta x$$

(参见式 16.3), 所以有

$$u(x',t+h) = (2\pi)^{-1}h^{-1}\int\exp\Big(-\frac{(x-x')^2}{2h}\Big)u(x,t)\mathrm{d}x$$

上式的积分是在流体区域上进行的, 这里假定 $h$ 相对于从沉积点 $x'$ 到边界的距离是非常小的, 所以, 离子的进入或迁移的影响可以忽略. 因为微分方程决定了溶

液中离子密度的变化, 所以, 在积分号下对 $x'$ 和 $t$ 微分, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 u \tag{18.1}$$

这就是众所周知的二维情形的扩散方程或热传导方程.

对这个微分方程, 需要详细说明一下边界条件. 在外边界, 以一个常数速率提供离子, 所以

$$\text{在 } |x| = r_0 \text{ 上}, u = u_0 \tag{18.2}$$

在时间 $t$, 用 $F_t$ 表示铜的沉积边界. 事实上, 如果充分接近这个边界, 所有离子都失去电荷, 因此, 在 $F_t$ 上

$$u = 0 \tag{18.3}$$

因为失去电荷的离子以金属铜的形式沉淀. 边界 $F_t$ 向前推进的速度 $v$ 的方向是与 $F_t$ 正交的方向 $n$, 而数量上等于方向 $n$ 上的 (离子) 浓度的微商. 所以, 在边界 $F_t$ 上存在一个常数 $k$, 使得

$$v_n = kn \cdot \nabla u \tag{18.4}$$

(假定在一个非常小的尺度上, $F_t$ 实际上是光滑的).

如果生长与外电极保持一段距离, 那么一个最好的近似就是扩散速度与时间独立, 所以式 (18.1) 可被拉普拉斯方程代替

$$\nabla^2 u = 0. \tag{18.5}$$

利用式 (18.4) 解出这个带有边界条件 (18.2) 和 (18.3) 的方程, 就能找到沉淀生长的速度.

这些方程太理想化了, 因此不能提供一个精确模型. 首先, 为了防止相对于不规则表面方程的不稳定性, 方程需要 "截去" 一个较短的尺度. 在正方形格子 DAL 模型中就应用到了这一点, 如果一个粒子与聚集体充分接近, 它就会碰到这个聚集体. 其次, 对微分方程的推导, 假定了一个连续变化的粒子密度, 而不是大量离散粒子. 而正是这些个别粒子的运动的随机变化, 才增强了分枝图形的不规则性. 所以式 (18.4) 应当修改成包含有一个随机摄动项的形式.

$$v_n = kn \cdot \nabla u + p \tag{18.6}$$

这里 $p$ 可以被认为是一个 "噪音" 项. 上面谈的两个特点在正方形格子的 DAL 模型中都存在, 这就比试图直接从数值上解这个微分方程更适合于对生长形式的模拟.

正方形格子的 DAL 模型的一个解释就是提供了在边界 $F_t$ 上, 受一个随机摄动的微分方程 (18.2)~(18.5) 的空间解法. 令人惊奇的是, 同样的微分方程和边界条件描述了好几个有相当差别的物理现象. 所以可以期望 DAL 模型能不同程度地应用到这些不同的情况中.

在流体中黏性指进生长就是一个例子. 假设固定两块玻璃板使它们之间的距离很小, (可能为$\frac{1}{2}$mm), 在中间的区域灌满像油一样黏性液体 (这个装置称为 Hele-Shaw 槽). 如果像水这样的低黏度的液体通过一个板的小洞被注入, 那么在一定条件下, 水就以很薄的带有许多分枝的指状物图形在油中扩散, 这种形状非常像在电解实验中出现的铜沉积.

润滑 (Lubrication) 理论告诉我们, 在这种情况下, 油的流速与压力的梯度成比例:

$$v = -c\nabla p \tag{18.7}$$

这里 $p(x)$ 是点 $x$ 压力. 假设油是不可压缩的, 则流速的散度为 0, 即 $\nabla \cdot v = 0$, 所以在油中有

$$\nabla^2 p = 0$$

如果水的黏滞度与油的黏滞度比较可以忽略, 那么水中的压力实际上就是一个常数, 于是就有边界条件:

在流体的内表面上, $p(x) = p_0$

在与注入点有较大的距离 $r_0$ 处, $p(x) = 0$

于是, 压力差 $u(x) = p_0 - p(x)$ 满足微分方程 (18.5) 以及边界条件 (18.2) 和 (18.3); 此外, 在流体的内表面上, 油中的压力梯度是垂直于边界的 (因为在边界上压力是常数), 所以式 (18.4) 给出了边界向前推进的速率, $v_n = -kn \cdot \nabla p$, 其中带有表面张力造成的短程影响; 这里压力与电解实验中的粒子密度类似.

因此, 这可能使我们对在一定条件下, 黏性指进看起来像是由正方形格子 DAL 模型产生的图形这个事实不感到惊奇了. 尽管这里没有在电解例子中出现的随机元, 但是内界面的不规则性增强了对指进的影响.

流体通过一个能渗透的介质也有很类似的情形, 式 (18.7) 就是确定这种流体的 Darcy 定律, 在这种情形下, 分形指进也能发生.

气体放电现象提供了更进一步的例子. 远离放电的电离区域, 静电势 $u$ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 u = 0$. 电离轨道导电性能足够好, 以致可以认为它有常电势, 所以 $u$ 与黏性指进的例子满足同样的边界条件. (有争论的) 假设电离的速度与电场成比例, 可得出式 (18.4). 这就是具有相同微分方程的另一个例子, 对这个例子, 正方形格子的 DLA 模型提供了一个逼真的图像.

在适当的实验条件下,对电解、粘性指进和放电现象的图形,如果在一个适当的尺度范围内估计它们的维数,结果都是 1.7,这与在计算机上研究正方形格子 DAL 模型所得到的维数值是一致的. 虽然这些现象的理论解释还不十分令人满意,但是这个维数的普适性却是非常引人注目的.

## 18.2 静电势和引力势的奇异性

在 $\mathbf{R}^3$ 中由一个电荷分布 $\mu$ 引起的静电势和由一个质量分布 $\mu$ 引起的引力势,由下式给出

$$\phi(x)=\int\frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|}. \tag{18.8}$$

可以证明势的奇异集 (即满足 $\phi(x)=\infty$ 的 $x$ 的集合) 的维数,不能太大.

**命题 18.1** 设 $\mu$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上具有有界支撑的质量分布,假设式 (18.8) 中的势有奇异集 $F=\{x:\phi(x)=\infty\}$,则 $\dim_{\mathrm{H}}F\leqslant 1$.

**证明** 设 $s>1$,并设 $x\in\mathbf{R}^3$,对 $r>0$,记 $m(r)=\mu(B(x,r))$. 假设存在 $a>0,c>0$,使得对所有的 $0\leqslant r\leqslant a$,有 $m(r)\leqslant cr^s$. 分步积分后,有:

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\int_{|x-y|\leqslant a}\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{|x-y|}+\int_{|x-y|>a}\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{|x-y|}\\&\leqslant\int_{r=0}^{a}\frac{\mathrm{d}m(r)}{r}+\int_{|x-y|>a}\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{a}\\&\leqslant[r^{-1}m(r)]_0^a+\int_0^a r^{-2}m(r)\mathrm{d}r+a^{-1}\mu(\mathbf{R}^3)\\&\leqslant c(1+(s-1)^{-1})a^{s-1}+a^{-1}\mu(\mathbf{R}^3)\\&<\infty.\end{aligned}$$

因此,如果 $x\in F$,则对任意 $c>0$,一定有 $\overline{\lim_{r\to\infty}}(\mu(B(x,r))/r^s)\geqslant c$. 由命题 4.9(b) 即得,对 $s>1,\mathcal{H}^s(F)=0$,命题得证. □

$\mu$ 通常可以用 "密度函数" $f$ 来表示,所以对任何博雷尔集 $A$,$\mu(A)=\displaystyle\int_A f(x)\mathrm{d}x$,此时式 (18.8) 变成

$$\phi(x)=\int\frac{f(y)}{|x-y|}\mathrm{d}y. \tag{18.9}$$

在 $f$ 上给定某些条件,例如,存在 $p>1$,使 $\displaystyle\int|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty$,则可以用类似的方法找出奇异集维数的进一步的界,参见练习 18.5.

很容易证明,如果 $f$ 是充分光滑的函数,那么式 (18.9) 就是泊松 (Poisson) 方程

$$\nabla^2\phi=-4\pi f$$

的解, 这个解还同时满足条件: 当 $|x| \to \infty$ 时, $\phi(x) \to 0$. 对一般的可积函数 $f$, 势 $\phi$ 不必是可微的, 进而式 (18.9) 可能被当作在某种意义下, 用分布理论精确得到的泊松方程的**弱解**(weak solution). 以一种非平凡的方式推广这种技巧, 可以得到一些其他偏微分方程的弱解的奇异集维数的界.

## 18.3 流体力学和湍流

尽管很多年来, 对流体中的湍流进行了认真的研究, 但对它仍然没有充分的了解. 慢慢流动的流体往往以平滑连续的方式流动, 这被 Navier-Stokes 方程 —— 流体力学的基本微分方程精确地描述了; 这样的平滑移动叫做*层流*(laminar). 在比较高的速度下, 流动通常变成*湍流*(turbulent): 流体粒子以快速变化的速度, 沿着回旋状路径流动, 并且在所有尺度上带有漩涡和不规则的变化. 读者一定很熟悉层流到湍流的变化过程, 正如把微微细流的水龙头突然开足的情形一样. 虽然湍流的精确形式是不规则的和难以预测的, 但是它们表现出的特性却始终是一致的.

不存在可以一致接受的湍流的定义, 这有它的方便之处, 因为可以把它看成是一种具有某种适宜的 "奇异特性" 的流动. 考虑一种模型, 其中湍流是通过在剧烈运动的点上, 由于液体的黏性产生局部的热振荡, 即 "流体摩擦" 表现出来的.

在合理的小尺度上, 湍流可以当作各向同性的, 也就是说各方向相互独立. 在流体力学中, 对各向同性湍流的直观了解主要是来自于科尔莫戈罗夫 (Kolmogorov) 的定性研究, 而不是来自于对微分方程的分析. 科尔莫戈罗夫的模型是以如下思想为基础的, 动能通过像搅动等形式大规模地被传递到流体内, 但动能仅能在小规模的漩涡上逸出 (以热的形式), 此时黏滞度的影响是很重要的, 在中间规模的漩涡上逸出可以被忽略. 如果存在各种规模的环流漩涡, 那么能量就通过一系列尺寸越来越小的漩涡转化为流体的运动, 直至达到很小的旋涡, 这时逸出就发生了. 正如科尔莫戈罗夫假设的, 如果流体区域都被这些规模不等的漩涡填满, 那么像热这样的能量逸出将在整个流体中均匀发生.

设 $\varepsilon(x)$ 为位于点 $x$ 的单位体积的逸出速度, 所以在时间 $\delta t$ 内, 围绕 $x$ 的很小体积 $\delta V$ 上产生的热量大约为 $\varepsilon(x)\delta V\delta t$. 于是, 在均匀逸出的假设对所有 $x \in D$, 都有

$$\varepsilon(x) = \bar{\varepsilon},$$

这里 $\bar{\varepsilon}$ 是能量进入流体区域 $D$ 上的速率, 并设 $D$ 具有单位体积.

显然, 如此 "均匀" 的湍流具有吸引人的简单的性质, 但却不能在实验的观察中得到验证. 用热线流速表测量表明: 一个湍急的流体中, 逸出速率在流体的不同部分差别很大. 这是一个间歇性现象, 在有些地方逸出率非常高, 但在另一些地方逸出

率非常低, 而科尔莫戈罗夫模型却要求它是一个常数. 这个变化可以用相关函数定量化, 对一个很小的向量 $\boldsymbol{h}$, 在相距为 $\boldsymbol{h}$ 的两点的逸出速率的相关性由下式给出：

$$\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x+\boldsymbol{h})\rangle \tag{18.10}$$

这里角括号表示对 $D$ 中所有 $x$ 求平均值. 如果逸出是常数, 就有 $\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x+\boldsymbol{h})\rangle = \bar{\varepsilon}^2$. 可是实验表明, 对介于 0.4 和 0.5 之间的一个 $d$ 值, 成立等式：

$$\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x+\boldsymbol{h})\rangle \simeq \bar{\varepsilon}^2|\boldsymbol{h}|^{-d}. \tag{18.11}$$

为了解释间歇性, 科尔莫戈罗夫模型修改为, 假设随着漩涡尺寸的变小, 同时它充满空间的比例也连续不断的变小, 从而取代了有各种不同尺寸的漩涡充满空间. 动能传递进入最大的漩涡, 并通过尺寸不断减小的漩涡, 直到在尺寸最小的漩涡中散逸掉. 现在, 能量以及它的逸出都只集中在流体很小的一部分上. 各种尺寸的漩涡可以设想为一个自相似分形 $F$ 的构造过程中前 $k$ 步中的 $E_i$, 这里 $k$ 是相当大的 (见第 9 章), 逸出在第 $k$ 步的 $E_k$ 上发生. 为了方便起见, 假定 $E_i$ 的每个 $k$ 水平基本集, 都被常数个大小相等的集代替而形成 $E_{i+1}$.

如果 $A$ 是 $D$ 的子集, 可定义$\mu(A) = \int_A \varepsilon(x)\mathrm{d}x$ 为集 $A$ 上能量逸出的总速率, 于是 $\mu(D) = \bar{\varepsilon}$ 是能量传入的速度, 那么 $\mu$ 在 $D$ 上具有质量分布的性质. 此外, 如果假设在 $E_i$ 的每个元上的逸出速率被等分到这个元在 $E_{i+1}$ 中大小相等的子元上, 利用豪斯多夫维数和盒维数都等于 $s$ 的自相似集 $F$ 上的一个简单结论 (见练习 9.11), 如果 $x \in F$, $0 < r < r_0$, 则有

$$c_1\bar{\varepsilon}r^s \leqslant \mu(B(x,r)) \leqslant c_2\bar{\varepsilon}r^s,$$

其中 $c_1$ 和 $c_2$ 是正常数. 这些不等式不但对散逸漩涡的尺寸趋于 0 的极限集 $F$ 成立, 而且如果 $r$ 比散逸漩涡的尺寸大, 不等式同时还对物理的近似集 $E_k$ 成立. 由于散逸集中在 $E_k$ 上, 所以

$$\begin{aligned}\int_{|h|\leqslant r}\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x+h)\rangle \mathrm{d}h &= \int_{x\in D}\int_{|h|\leqslant r}\varepsilon(x)\varepsilon(x+h)\mathrm{d}h\mathrm{d}x \\ &= \int_{x\in D}\varepsilon(x)\mu(B(x,r))\mathrm{d}x \\ &= \int_{x\in E_k}\varepsilon(x)\mu(B(x,r))\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

于是

$$c_1\bar{\varepsilon}^2r^s \leqslant \int_{|h|\leqslant r} \langle\varepsilon(x)\varepsilon(x+h)\rangle \mathrm{d}h \leqslant c_2\bar{\varepsilon}^2r^s. \tag{18.12}$$

如果相关函数满足幂定律：

$$\langle\varepsilon(x)\varepsilon(x+h)\rangle \simeq \bar{\varepsilon}^2|h|^{s-3},$$

那么在式 (18.12) 中的积分变为：

$$4\pi\int_{t=0}^{r} \bar{\varepsilon}^2t^{s-3}t^2\mathrm{d}t = 4\pi\bar{\varepsilon}^2r^s/s.$$

与式 (18.11) 比较, 得出 $s = 3 - d$, 所以 "分形的均匀湍流" 的假设与实验结果相互一致, 这时散逸集中在维数介于 2.5 和 2.6 之间的近似分形上.

很自然, 这促使我们去探索湍流区域具有分形形式的理论根据；一个可能的解释就是由于流体中的涡管. 根据 Kelvin 的环流理论, 这样的管在整个运动中都维持着, 至少在可以近似视为非黏质的流体中维持着. 然而涡管被流体运动展开, 变得又长又薄. 为了调节这个长度, 重复折叠是必要的, 所以管可能被假设为一个近似分形的形式, 正像图 13.5 中马蹄形映射的例子.

一个 (黏滞) 流体的性质应该被 Navier-Stokes 方程 (18.13) 所预测.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - v\nabla^2u + \nabla p = f \tag{18.13}$$

这里 $u$ 是速度, $p$ 是压力, $v$ 是黏滞度, $f$ 是所加的力密度. 从 Navier-Stokes 方程推导流动的分形区域的存在性远远不是一件容易的事. 然而, 18.2 节中所指出的方法可以推广成不易辨别的形式, 用这个推广可以严格地证明诸如, 对所有 $t$, 使式 (18.13) 的解 $u(x,t)$ 都无界的点 $x$ 的集合, 维数最多为 $2\frac{1}{2}$ 这样的结论. 所以有可能利用流体方程证明, 一定种类的 "剧烈流动" 必然集中在维数较小的集上.

## 18.4 分形天线

分形的一个值得注意的应用就是在高频无线电通讯中作为天线的应用, 特别是作为移动电话的天线. 因为利用分形的两个优点. 首先, 就是一些分形的 "充斥空间" 的特性, 比如 von Koch 曲线的一些变形, 可以使得在一个相对很小的空间中存放一个具有高响应度的分形天线；其次, 根据分形的几何性质, 可以构造反映分形自相似性的, 具有谐振频率的宽频天线；也可以构造具有独立的频率响应的天线, 例如一些随机分形天线.

电动力学, 特别是无线电波的性质都服从麦克斯韦 (Maxwell) 方程. 假设一个依赖于时间 $t$ 的电磁场分布 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, 其中 $\omega$ 是频率, 那么, 在点 $x$ 的电场应该是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathbf{E}(x)$, 磁场是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathbf{H}(x)$. 此时, 真空中的 Maxwell"旋度" 方程简化为：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathrm{i}\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathrm{i}\omega\varepsilon\mathbf{E},$$

这里 $\varepsilon$ 是介电常数, $\mu$ 是空间的导磁性. 显然, 对任意数 $\lambda$(正数或负数), 这两个方程经过如下两个变换:

$$x \mapsto \lambda x \text{ 和 } \omega \mapsto \omega/\lambda,$$

并在方程两边同时乘于 $1/\lambda$, 则两个方程保持不变.

如果天线在用因子 $\lambda$ 缩放的情况下具有相似的形状, 麦克斯韦方程的边界条件在此比例下也是相似的, 则当频率变为原来 $1/\lambda$, 即波长变为原来的 $\lambda$ 倍时, 电波幅射性质也可能具有所期望的相似性状.

这个性质可以由 Sierpiński双极(Sierpiński dipole) 证实, 这是一个实用的分形天线的例子 (见图 18.4). 在实际中, 两个 Sierpiński 三角形被蚀刻在一个印刷电路板上, 顶点相对 (一个分形 "蝴蝶结"), 从一个发射器或接收器通过两线式传输线连接到这两个顶点. 天线的基础频率对应于与 Sierpiński 三角形直径可比较的一个波长, 天线中被观察到的峰值出现在这个波长的 1, 1/2, 1/4, 1/8 和 1/16 倍处, 而这些比例正好对应于三角形的基本相似比, 由此就证实了上面的论述. 在每次谐振时, 电流密度都集中在最靠近连接点的一对适当比例的 Sierpiński 三角形上. 改变 Sierpiński 三角形的构造参数, 可以得到其他波段序列的天线.

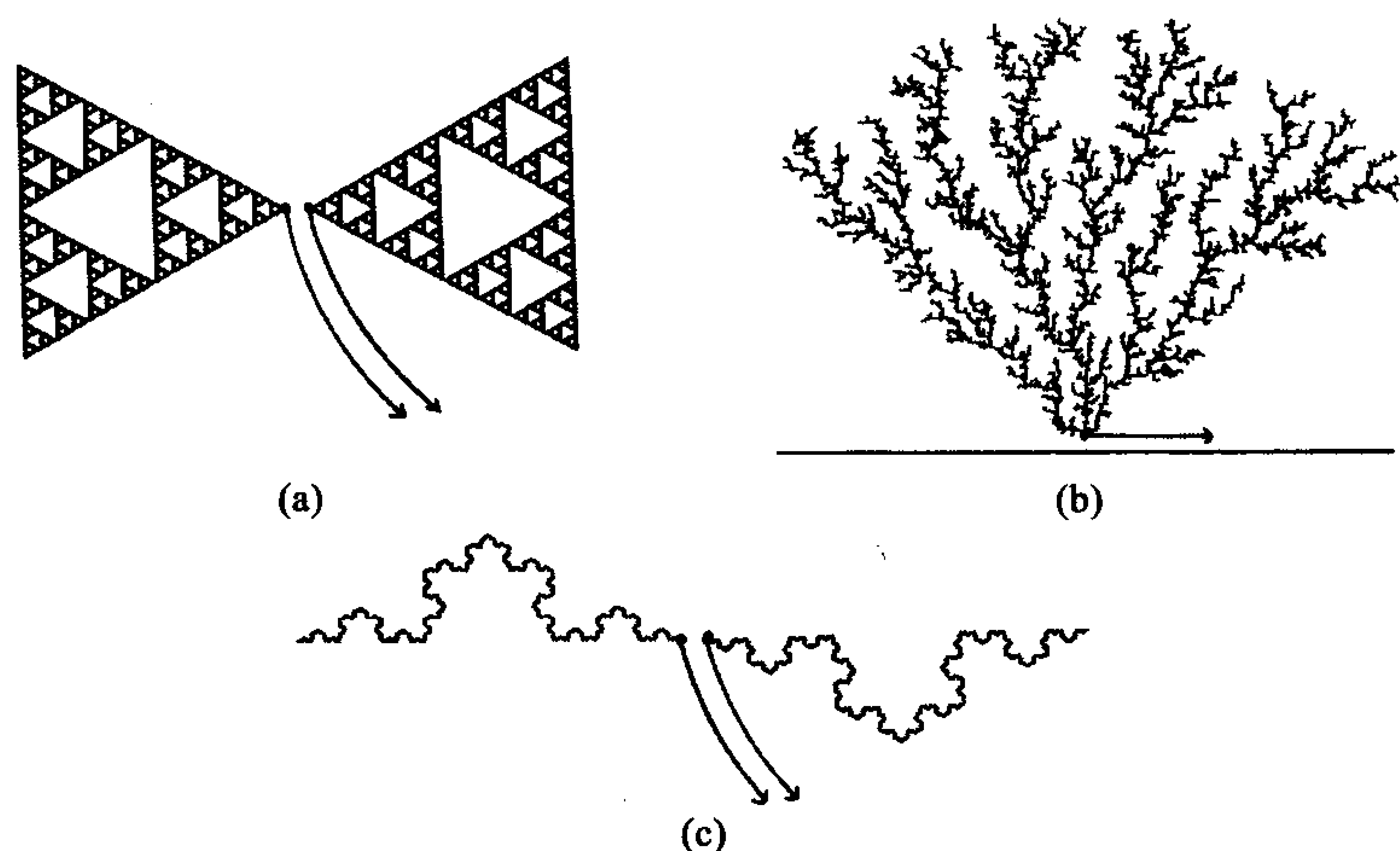



图 18.4 分形天线, 显示连接线. (a) Sierpiński 双极天线, (b) 随机树型天线, (c) von Koch 双极天线

随机分形可以用来构造适合于连续频段的天线. 例如, 树型天线 (如那些由电解生成的, 形如图 18.3), 它在所有尺度上都是统计自相似的, 并可以对一段连续频

率有相对稳定的响应, 这类天线与传统的连续频段天线非常相似.

## 18.5　金融中的分形

观察股票价格、汇率等的图像, 可以发现存在某些种类的自仿射现象, 即, 对某个数 $0<\alpha<1$, 如果 $X(t)$ 是 $t$ 时刻的股价, 则对于 $t>t_0, \gamma>0$, 增量 $X(\gamma t)-X(\gamma t_0)$ 和增量 $\gamma^\alpha(X(t)-X(t_0))$ 总体相似. 这显示一个统计自仿射过程, 或者甚至一个确定性自仿射函数可能适合于用来建立价格模型. 此外, 自仿射假设有很多关于模型过程的特点的推论.

由于在随机过程中的重要地位, 布朗运动 (参见 16.1 节) 是用来试验的最自然的统计自仿射模型. 加上它的一些变化, 布朗运动已经成为许多金融模型的基础.

令 $X$ 是 $[0,\infty)$ 上的布朗运动; 可以把 $X(t)$ 看成某个股票在时间 $t$ 的价格, 或价格的对数. 布朗运动的一个重要特点就是它的鞅性或独立增量性: 给出至 $t$ 时刻的一个过程, 对任意 $h>0$, $X(t+h))$ 的期望值就是 $X(t)$, 这表示股票的将来的价格是不可预测的, 即现在的盈利很可能变成以后的损失.

如果假设 $X$ 是指数为 $\alpha$ 的分数布朗运动 (见 16.2 节), 此时增量不是独立的, 而是相关的, 即, $\mathrm{E}((X(t)-X(0))(X(t+h)-X(t)))>0$ 或 $<0$, 这取决于 $\alpha>1/2$ 或 $\alpha<1/2$. 此外, 如果 $\alpha>1/2$, 则过程具有*长程相关性*(long range dependence), 也就是说, 对于固定的小的 $h$, 增量的协方差

$$\begin{aligned}\mathrm{E}((X(h)-X(0))(X(t+h)-X(t))) &= \frac{1}{2}[(t+h)^{2\alpha}+(t-h)^{2\alpha}-2t^{2\alpha}]\\ &\simeq \alpha(2\alpha-1)t^{2\alpha-2}h^2\end{aligned}$$

随着 $t$ 的增大而慢慢减小, 在这个意义上就是说以下的和 $\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{E}(((X(h)-X(0))(X(k+h)-X(k)))\sim\sum_{k=0}^{\infty}k^{2\alpha-2}$ 是发散的. 一种可能的解释是, 对某个 $\alpha>1/2$, 指数为 $\alpha$ 的分数布朗运动提供了一个合理的价格模型, 因此可以通过研究过去的股价变动推导出将来的股价走势.

可能有一些进一步的变化, 比如, 考察 $cX(t)+at$, 其中 $X$ 是指数为 $\alpha$ 的分数布朗运动, $a$ 和 $c$ 是正的常数, 同时给过程加上一个具有基本向上走向的速率 $a$ 的 "漂移". 给定一段时间 $t$ 范围内的金融数据, 则可以用统计的方法估计出 $\alpha$, $a$ 和 $c$ 的适当的值.

乍一看, 布朗运动表现出的性质似乎相似于股价或汇率的走势, 但是, 仔细观察后会发现显著的区别 (见图 18.5(a) 和 (c)). 布朗运动没有在股价观察中出现的突然跳跃和强烈的周期活动性, 或者说是 "易变性". 这可以通过考虑增量来说明: 对固定的较小的 $h>0$, 如果 $X$ 是布朗运动, 则增量 $X(t+h)-X(t)$ 作为 $t$ 的函数, 呈现

出像具有完全不变振幅的 "噪音"(见图 18.6(a))；然而，股价却具有非常明显的、超越环境噪音水平且对应于股价波动的峰值和谷值 (见图 18.6(c)).

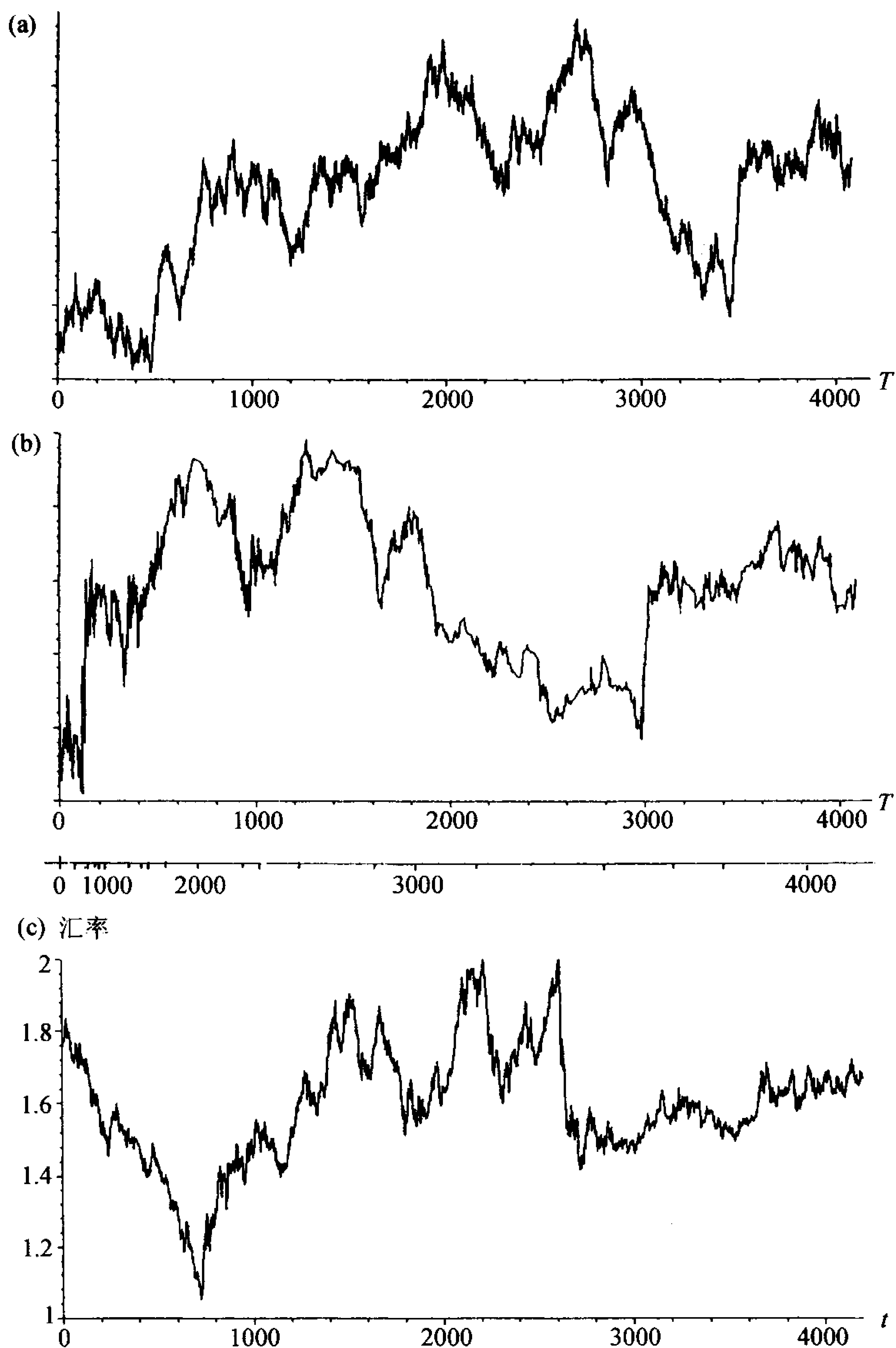



图 18.5 (a) 布朗运动, (b) 由多重分形 "扰乱" 真实时间 $t$ 而得到的关于市场时间 $T$ 的布朗运动实现, (c)11 年内每日美元/英镑汇率. 平稳时期的结合再加上剧烈活动时期的散点分布使图形更像 (b) 而不是 (a) 的某个过去情况

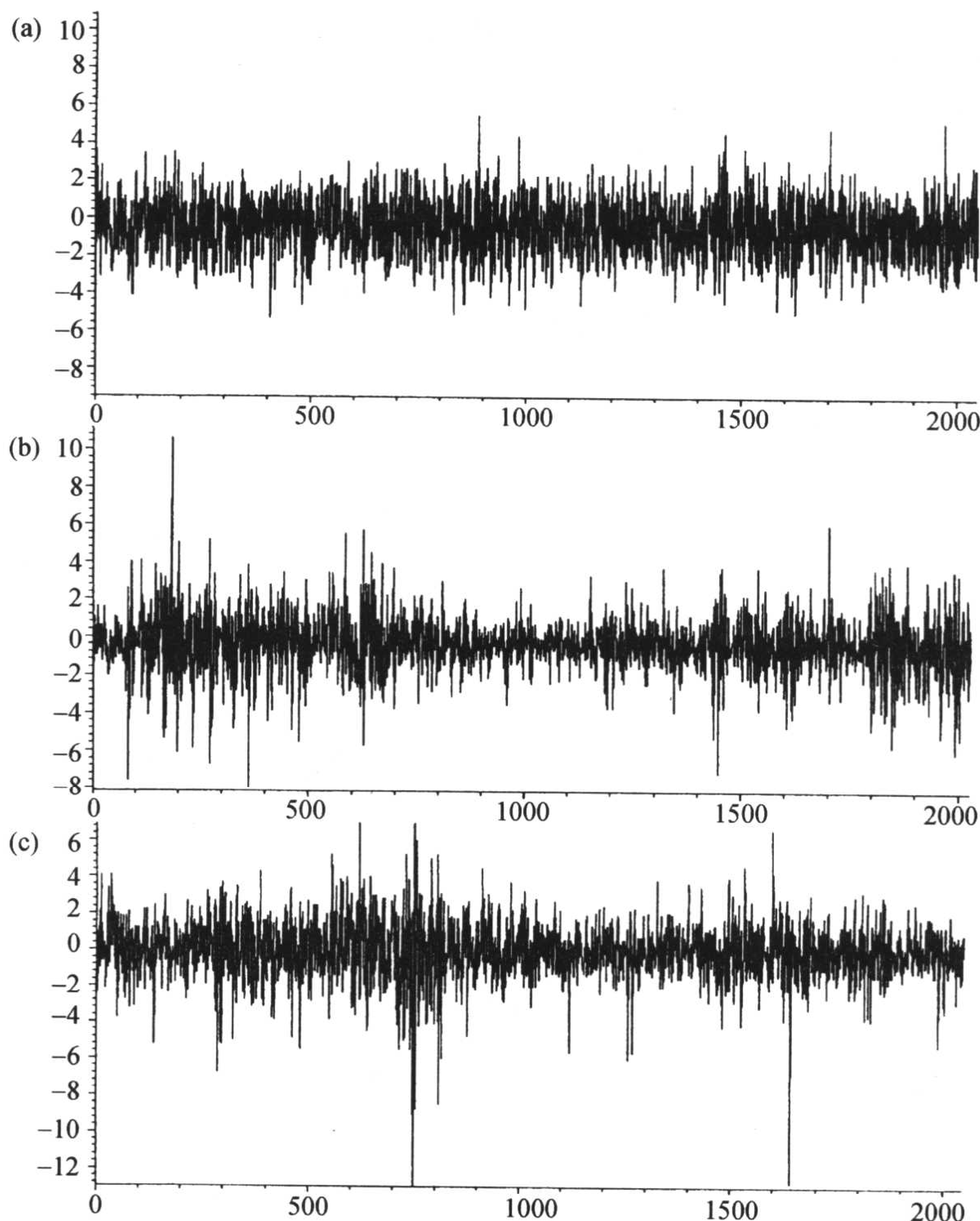



图 18.6 (a) 布朗运动增量分布; (b) 由多重分形时间打乱的布朗运动增量分布; (c) 真实数据; 股票价格在 5.5 年内的增量分布. (c) 更接近 (b) 的特征

对此, 提出了一种方法, 就是如果 $X$ 是具有多重分形结构的函数, 它在时间 $t$ 的一个相对小的集内局部的波动会非常大, 通过集合 $E_a$ 的维数可以精确地解决, 这里

$$E_a = \left\{ t : \liminf_{h \to 0} \frac{\ln |X(t+h) - X(t)|}{\ln |h|} = a \right\};$$

于是, $E_a$ 是使 $X$ 的 Hölder 指数是 $a$ 的那些 $t$ 组成的集合, 对函数 $X$ 来说, 是类似于式 (17.16) 表示的集合. 有几种方法可以模拟这些极端大的波动. 有一种带有多种不同梯度 "生成元" 的自仿射曲线 (见 11.1 节), 它有波动的 Hölder 指数, 并且可以得到一些具有股价分布的很多特点的图像.

更复杂的方法是利用多重分形时间(multifractal time). 这个方法的基本思想是: 价格变动遵循布朗运动或者分数布朗运动, 但是带有被称为市场时间(trading time) 的 $T(t)$, 它是由原来时间重新调整或“打乱”而得到的. 这样, 当市场不稳定时, 真实时间 $t$ 的一个短周期, 就被伸展成市场时间 $T$ 的一个长周期; 而当市场是不活跃的, $t$ 的一个长周期就对应于 $T$ 的一个短周期 (见图 18.5(b) 和 18.6(b)).

设 $\mu$ 是 $\mathbf{R}^+$ 上的一个测度, 特别地, 可能是一个多重分形测度. 对于 $t \geqslant 0$, 定义市场时间为 $T(t)=\mu[0,t]=\int_0^t \mathrm{d}\mu$. 用 $B^\alpha$ 表示指数为 $\alpha$ 的布朗过程, $X(t)=B^\alpha(T(t))$. 给定 $T$, 则 $X(t)$ 是均值为 0 的高斯过程; 如果 $t \in F_\gamma$, $X(t)$ 增量的方差由下式给出:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X(t+h)-X(t))^2 &= \mathrm{E}(B^\alpha(T(t+h))-B^\alpha(T(t)))^2 \\ &= |T(t+h)-T(t)|^{2\alpha}=\mu[t,t+h]^{2\alpha}\sim |h|^{2\gamma\alpha}. \quad (18.14)\end{aligned}$$

其中

$$F_\gamma=\left\{t: \lim_{h\to 0}\frac{\ln \mu[t,t+h]}{\ln h}=\gamma\right\}$$

是使 $\mu$ 的局部维数等于 $\gamma$ 的时间的集合.

因此, $X$ 在时刻 $t$ 的波动性取决于 $\mu$ 在 $t$ 的局部维数, 而股价波动剧烈和平稳的时间分布就依赖于 $\mu$ 的多重分形结构. 如果把这个模型推广到 $\mu$ 是随机多重分形测度的情形, 市场时间 $T$ 就变成了一个随机过程, 因此波动剧烈和平稳的时间区域就是随机的了.

可以把统计方法应用到真实的价格数据上来估计 $\alpha$, 以及估计 $\mu$ 的多重分形谱, 其中 $\mu$ 与由 $\dim_{\mathrm{H}} E_\alpha$ 给出的“$X$ 的多重分形谱”可能有关系.

分形性是金融数学建模的一个关键的特性. 这里只简要介绍了一些简单的模型; 更复杂的技巧包括随机微分方程, 在那里, 过程的分形性质是由模型的假设直接得出.

## 18.6 注记和参考文献

关于分形应用方面的文献非常多. 在 Mandelbort(1982), Feder(1988), Hastings and Sugihara(1993), Crilly, Earnshaw and Jones(1993), Gouyet(1996) 以及 Meakin (1998) 中给出各种广泛的分形应用. 在 Shlesinger, Mandelbrot and Rubin(1984), Pietronero and Tosatti(1986), Pietronero(1989), Aharony and Feder(1990), Fleischmann, Tildesley and Ball(1990), Takayasu(1990), Cherbit(1991) 以及 Novak(1998, 2000) 编辑的会议记录中也有描述.

对分形生长和 DLA 可以参见 Stanley 和 Ostrowsky(1986, 1988), Feder(1988) 以及 Vicsek(1989).

对湍流思想的介绍参见 Leslie (1973). Kolmogorov(1941) 的均匀模型被 Mandelbrot(1974) 修改成分形均匀模型, 也可以参见 Frish, Sulem and Nelkin (1978). 关于涡流的分形性质的论文集包含 Teman(1976) 以及 Barenblatt, Iooss and Joseph(1983) 的工作. Teman(1983, 1997) 中讨论了与 Navier-Stokes 方程解有关的集的维数的问题.

关于分形天线的讨论可以参见 Puente, Romeu, Rous and Cardama(1997), Jaggard(1997) 以及 Hohlfeld 和 Cohen(1999).

Peters(1994) 中论述了分形在金融方面的应用, Mandelbrot 的《精选》和其上面的参考文献也有讨论; 多重分形时间参见 Mandelbrot(1997) 以及 Goncalvès 和 Riedi(1999).

还有许多著作讨论了分形在其他方面的应用. Scholz and Mandelbrot(1989), Xie(1993) 以及 Turcotte(1997) 讨论了分形在地球物理学上的应用; Rodríguez-Iturbe 和 Rinaldo(1997) 论述了分形河流流域. Avinir(1989) 研究了分形在化学上的应用, Heck 和 Perdang(1991) 研究了分形在天文学方面的应用, Dewey(1997) 研究了分形在分子生物物理学方面的应用, West(1990) 研究了分形在生理学和医学方面的应用, Lévy Véhel, Lutton and Tricot(1997), Dekking, Lévy Véhel, Lutton and Tricot(1999) 研究了分形在工程学方面的应用. Barabsi and Stanley(1995) 讨论了分形在地表生长方面的应用, Lovejoy and Schertzer(1995) 研究了降雨量的多重分形方面.

## 练　　习

**18.1** 假设正方形格子的 DLA 模型是在大量非常小的正方形上进行的. 如果得到的集是一个维数为 $s$ 的近似分形, 你期望与初始正方形距离小于 $r$ 的涂黑正方形的数量服从什么样的幂定律? 假设在这个过程中, 正方形倾向于加在这个集的距离初始正方形更远的部分, 那么你期望加上 $k$ 个正方形后增长的 "半径" 如何依赖于 $k$?

**18.2** 在 18.1 节描述的电解实验中, 经过时间 $t$ 后, 设 $m(t)$ 为已经沉积的铜的质量, $r(t)$ 为沉积的铜的半径. 可以证明, 如果电流服从 Faraday 定律, 则沉积的速率与 $r(t)$ 成正比. 又假设生长形成了一个维数为 $s$ 的近似分形, 那么 $m(t)\sim cr(t)^s$, 试证明 $r(t)\sim c_1 t^{1/(s-1)}$.

**18.3** 证明: DLA 模型中的 $u(x,t)$ 满足偏微分方程 (18.1).

**18.4** 证明: 式 (18.9) 中的势满足泊松方程, 如果 $f$ 是二次可微的连续函数, 且对所有充分大的 $x$ 有 $f(x)=0$.

**18.5** 证明: 如果对所有充分大的 $x$, $f(x)=0$ 且 $\int|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty$, 那么由式 (18.9) 给出的 $\phi$ 的奇异集是空集.

**18.6** 证明：式 (18.12) 导出的论证, 可以适用于下列情形, 比如说 $D$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个单位球, $F$ 为图 0.4 中的康托尔尘与单位线段 $L$ 的乘积. (假定逸出发生在集 $E_k \times L$ 上, 这里 $E_k$ 是构造康托尔尘时的第 $k$ 步, $k$ 充分大.)

**18.7** 有一个由电线做成的 von Koch 曲线形状的分形天线, 如果它的基础频率是 $\omega$, 那么它的更高的谐振频率是什么?

**18.8** 推广式 (18.14), 证明对于 $t \in F_\gamma$, $\mathrm{E}(|X(t+h) - X(t)|^q) \sim |h|^{q\gamma}$ (见练习 16.7).

# 参考文献


Abenda S, Moussa P. and Osbaldestin A. H.(1999) Multifractal dimensions and thermodynamical description of nearly-circular Julia sets, *Nonlinearity*, 12, 19-40.

Addison P. S. (1997) *Fracrals and Chaos–An Illustrated Course*, Institute of Physics Publishing, Bristol.

Adler R. J. (1981) *The Geometry of Random Fields*, Wiley, New York.

Aharony A. and Feder J. (1990) *Fracfals in Physics*, North-Holland, Amsterdam.

Ahlfors L. V.(1979) *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Anderson R. D. and Klee V. L. (1952)Convex functions and upper semi-continuous functions, *Duke Math. J.*, **19**, 349-357.

Apostol T. M.(1974)*Mathematical Analysis*, 2nd edition, Addison-Wesley, Reading, MA.

Avnir D. (Ed.) (1989) *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*, Wiley, New York.

Ayache A. and Lévy Véhel J. (1999)Generalized multifractional Brownian motion: definition and preliminary results, in *Fractals: Theory and applications in engineering*, 17-32. Springer, London.

Ayache A., Cohen S. and Lévy Véhel J. (2000)The covariance structure of multifractional Brownian motion, with application to long range dependence, *ICASSP*, June 2000.

Baker A. and Schmidt W. M. (1970) Diophantine approximation and Hausdorff dimension, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **21**, 1-11.

Bandt C., Graf S. and Zähle M.(Eds.) (1995)*Fractal Geometry and Stochastics. Progress in Probability*, **37**, Birkhauser, Basel.

Bandt C., Graf S. and Zähle M.(Eds.)(2000)*Fractal Geometry and Stochastics, II. Progress in Probability*, **46**, Birkhauser, Basel.

Barabsi A.-L.and Stanley H. E. (1995) *Fractal Concepts in Surface Growth*, Cambridge University Press, Cambridge.

Barenblatt G.I., Iooss G. and Joseph D.D. (Eds) (1983) *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, Pitman, London.

Barnsley M. F. (1993) *Fractals Everywhere*, 2nd ed.,Academic Press, Boston.

Barnsley M. F. and Hurd L. P. (1993)*Fractal Image Compression*, A. K. Peters, Wellesley.

Beardon A. F.(1965) On the Hausdorff dimension of general Cantor sets, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 61, 679-694.

Beardon A. F. (1991) *Iteration of Rational Functions*, Springer, New York.

Beck C. and Schlögl F. (1993) *Thermodynamics of Chaotic Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.

Becker K.-H. and Dörfler M. (1989) *Dynamical Systems and Fractals*, Cambridge University Press, Cambridge.

Bedford T. J. (1989) The box dimension of self-affine graphs and repellers, *Nonlinearity*, 2, 53-71.

Bedford T.(1991) Applications of dynamical systems theory to fractals, in *Fractal Analysis and Geometry*, (Bélair and Dubuc, S., Eds.), Kluwer, Dordrecht.

Bedford T., Keane M. and Series C. (1991) *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces*, Oxford University Press, Oxford.

Bedford T. J. and Swift J.(Eds) (1988) *New Directions in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.

Bernik V. I. and Dodson M. M. (1999) *Metric Diophantine Approximation on Manifolds*, Cambridge University Press, Cambridge.

Berry M. V. and Lewis Z. V. (1980) On the Weierstrass–Mandelbrot fractal function, *Proc. R. Soc. London*, A **370**, 459-484.

Besicovitch A. S. (1928) On the fundamental geometrical properties of linearly measur-able plane sets of points, *Math. Annalen*, **98**, 422-464.

Besicovitch A. S. (1934) Sets of fractional dimensions IV: On rational approximation to real numbers, *J. Lond.Math. Soc.*, **9**, 126-131.

Besicovitch A. S. (1938) On the fundamental geometric properties of linearly measurable plane sets of points II, *Math. Annalen*, 115, 296-329.

Besicovitch A. S. (1939) On the fundamental geometric properties of linearly measurable plane sets of points III, *Math. Annalen*, **116**, 349-357.

Besicovitch A. S. (1952) On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure, *Indag. Math.*, **14**, 339-344.

Besicovitch A. S. (1963) The Kakeya problem, *Am. Math. Monthly*, **70**, 697-706.

Besicovitch A. S. (1964) On fundamental geometric properties of plane line sets, *J. Lond. Math. Soc.*, **39**, 441-448.

Besicovitch A. S. and Moran P.A. P. (1945) The measure of product and cylinder sets, *J. Lond.Math. Sac.*, **20**, 110-120.

Besicovitch A. S. and Ursell H. D.(1937) Sets of fractional dimensions, V: On dimensional numbers of some continuous curves, *J. Lond Math. Soc.*, **12**, 18-25.

Billingsley P. (1978) *Ergodic Theory and Information*, Krieger, New York.

Billingsley P. (1995) *Probability and Measure*, 3rd ed. Wiley, New York.

Blanchard P. (1984) Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, *Bull. Am. Math. Soc.*, **11**, 85–141.

Bouligand G. (1928) Ensembles impropres et nombre dimensionnel, *Bull. Sciences Mathémariques*, II-**52**, 320-334, 361-376.

Brolin H.(1965) Invariant sets under iteration of rational functions, *Arkiv Math.*, 6, 103-144.

Brown G., Michon G. and Peyrière J. (1992) On the multifractal analysis of measures, *J. Stat. Phys.*, **66**, 775-790.

Bumby R. T. (1985) Hausdorff dimension of sets arising in number theory, in *Number Theory, New York* 1983-84. *Seminar(Lecture Notes in Mathematics,* **1135**), pp. 1-8. Springer, New York.

Carathéodory C.(1914) Über das lineare Mass von Punktmengen–eine Verallgemeinerung das Längenbegriffs, *Nach. Ges. Wiss. Göttingen,* pp. 406-426

Garleson A. (1967) *Selected Problems on Exceptional Sets,* Van Nostrand, Princeton, NJ.

Carleson L. and Gamelin T. W. (1993) *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, New York.

Cassels J. W. S. (1957) *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge University Press, Cambridge.

Cawley R. and Mauldin R. D. (1992) Multifractal decomposition of Moran fractals, *Adv. Math.*, **92**, 196-236.

Chayes J. T., Chayes L. and Durrett R. (1988) Connectivity of Mandelbrot's percolation process, *Prob. Theor. Related Fields*, **77**, 307-324.

Chayes L. (1995) Aspects of the fractal percolation process, in *Fractal Geometry and stochastics*, 113-143. Progr. Probab., **37**, Birkhauser, Basel.

Cherbit G. (Ed.)(1991) *Fractals: Non-integral dimensions and applications*, Wiley, Chichester.

Collet P., Dobbertin R. and Moussa P. (1992) Multifractal analysis of nearly circular Julia set and thermodynamical formalism, *Ann. Inst. H.Poincaré Phys. Théor.*, **56**, 91-122.

Crilly A. I., Earnshaw R. A. and Jones H. (Eds.)(1993) *Applications of Fractals and Chaos. The Shape of Things*, Springer-Verlag, Berlin.

Csörnyei M.(2001) On planar sets with prescribed packing dimensions of line sections, *Math. Proc.Cambridge Philos. Sac.*, **130**, 523-539.

Cunningham F. (1974) Three Kakeya problems, *Am Math Monthly,* **81**, 589-592.

Curry J., Garnett L. and Sullivan D. (1983) On the iteration of rational functions: computer experiments with Newton's method, *Commun. Math. Phys.*, **91**, 267-277.

Cvitanović P. (Ed.) (1989) *Universality in Chaos*, 2nd ed. Adam Hilger, Bristol.

Dalla L.and Larman D. G. (1980) Convex bodies with almost all $k$-dimensional sections polytopes, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **88**, 395-401.

David G. (1999) Analytic capacity, Caldern-Zygmund operators, and rectifiability, *Publ. Mat.* **43**, 3-25.

Davies R. O.(1952) On accessibility of plane sets and differentiation of functions of two real variables, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48**, 215-232.

Dekking F.M.(1982) Recurrent sets, *Adv. Math.*, **44,** 78-104.

Dekking F., Lévy Véhel J., Lutton E. and Tricot C. (Eds.) (1999) *Fractals: Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, London.

Dekking F. M. and Meester R. W. J. (1990) On the structure of Mandelbrot's percolation process and other random Cantor sets, *J. Statist. Phys.* **58**, 1109-1126.

Devaney R. L.(1989) *Introduction to Chaotic Dynamic Systems,* Benjamin Cummings, Menlo Park, CA.

Devaney R. L. and Keen L. (1989). *Chaos and Fracrals: The Mathematics Behind the Computer Graphics*, American Mathematical Society, Providence.

Dewey T.G.(1997) *Fractals in Molecular Biophysics*, Oxford University Press, New York.

Dodson M. M., Rynne B. P. and Vickers J. A. G. (1990) Diophantine approximation and a lower bound for Hausdorff dimension, *Mathematika*, **37**, 59-73.

Drazin P. G. (1992) *Nonlinear Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.

Edgar G. A. (1990) *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, New York.

Edgar G. A. (1993) *Classics on Fractals*, Addison-Wesley, Menlo Park.

Edgar G. A. (1998) *Integral, Probability, and Fractal Measures*, Springer-Verlag, New York.

Edgar G. A. and Mauldin R.D. (1992) Multifractal decompositions of digraph recursive fractals. *Proc. London Math. Soc.* (3), **65**, 604-628.

Edgar G. A. and Miller C. (2003) Borel subrings of the reds, *Proc. Am. Math. Soc.,* **131**, 1121-1129.

Eggleston H. G. (1952) Sets of fractional dimension which occur in some problems of number theory, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **54**, 42-93.

Embrechts P. and Maejima M. (2002) *Selfsimilar Processes*, Princeton University Press, Princeton.

Erdös P. and Volkmann B. (1966) Additive Gruppen mit vorgegebener Hausdorffscher Dimension, *J. reine angew. Math.*, **221**, 203-208.

Evertsz C. J. G. and Mandelbrot B. B. (1992) Multifractal measures. Appendix B in *Chaos and Fractals* (Peitgen, H.-O., Jürgens, H. and Saupe, D. Eds.), Springer-Verlag, New York.

Evertsz C. J. G., Peitgen H.-O. and Voss R. F. (Eds:) (1995) *Fractal Geometry and Analysis: Papers from the Symposium in Honor of Benoit Mandelbrot*, World Scientific, River Edge.

Falconer K. J. (1985a) *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, Cambridge.

Falconer K. J. (1985b) Classes of sets with large intersection, *Mathematika*, **32**, 191-205.

Falconer K. J. (1985c) The Hausdorff dimension of distance sets, *Mathematika*, **32**, 206-212.

Falconer K. J. (1986a) Sets with prescribed projections and Nikodym sets, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **53**, 48-64.

Falconer K. J. (1986b) Random fractals, *Matk. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **100**, 559-582.

Falconer K. J. (1988) The Hausdorff dimension of self-affine fractals, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **103**, 339-350.

Falconer K. J. (1994) Sets with large intersection properties, *J. London Math. Soc.* (2), **49**, 267-280.

Falconer K. J. (1997) *Techniques in Fractal Geometry*, John Wiley, Chichester.

Falconer K. J. and Howroyd J. D. (1997) Packing dimensions of projections and dimension profiles, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **121**, 269-286.

Falconer K. J., Järvenpää M. and Mattila P. (1999) Examples illustrating the instability of packing dimensions of sections, *Real Anal. Exchange*, **25**, 629-640.

Falconer K. J. and Lévy Véhel J. (2000) Horizons of fractional Brownian surfaces. *Proc. Royal Soc. London A*, **456**, 2153-2178.

Falconer K. J. and Marsh D. T. (1989) Classification of quasi-circles by Hausdorff dimension, *Nonlinearity*, **2**, 489-493.

Falconer K. J. and O'Neil T. C. (1996) Vector-valued multifractal measures, *Proc. Royal Soc. London A*, **452**, 1-26.

Farag H. (2002) On the $\frac{1}{2}$-problem of Besicovitch: quasi-arcs do not contain sharp saw-teeth, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **18**, 17-40.

Fatou P.(1919) Sur les équations fonctionelles, *Bull. Soc. Math. France*, **47**, 161-271.

Feder J. (1988) *Fractals*, Plenum Press, New York.

Federer H. (1947) The $(\varphi, k)$ rectifiable subsets of $n$-space, *Trans. Am. Math. Soc.*, **62**, 114-192.

Federer H. (1996) *Geometric Measure Theory*, Springer, New York.

Fisher G. (1995) *Fractal Image Compression: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York.

Fleischmann M., Tildesley D. J. and Ball R. C. (Eds.) (1990) *Fractals in the Natural Sciences*, Princeton University Press, Princeton.

Frame M. L. and Mandelbrot B. B. (2002) *Fractals, Graphics and Mathematical Education*, Mathematical Association of America, Washington.

Frederickson P., Kaplan J., Yorke E. and Yorke J. (1983) The Lyapunov dimension of strange attractors, *J. Diff. Eq.*, **49**, 185-207.

Frisch U. and Parisi G. (1985) Fully developed turbulence and intermittency. In *Turbulence and Predictability of Geophysical Flows and Climate Dynamics* (eds. M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi), pp. 84-88, North-Holland, Amsterdam.

Frisch U., Sulem P.-L. and Nelkin M.(1978) A simple dynamical model of fully developed turbulence, *J. Fluid Mech.*, **87**. 719-736.

Frostman O. (1935) Potential d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, *Meddel. Lunds Univ. Math. Sem.*, **3**, 1-118.

Goncalvès P. and Riedi R. (1999) Wavelet analysis of fractional Brownian motion in multifractal time, *Proc. 17th Colloq. CRETSI*, Vannes, France.

Gouyet J.-F.(1996) *Physics and Fractal Structures*, Springer-Verlag, New York.

Graf S. (1987) Statistically self-similar fractals, *Prob. Theor. Related Fields*, **74**, 357-392.

Graf S., Mauldin R. D. and Williams S. C. (1988) The exact Hausdorff dimension in random recursive constructions, *Mem. Am. Math. Soc.*, **71**, no. 381.

Grimmett G. R. (1999) *Percolation*, 2nd ed. Springer, New York.

Grimmett G. R. and Stirzaker D. R. (1992) *Probability and Random Processes*, 2nd ed. Clarendon Press, Oxford.

Gruber P. M. and Wills J. M. (Eds.)(1993) *Handbook of Convex Geometry*, Vol. A, B., North-Holland, Amsterdam.

Guckenheimer J. and Holmes P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York.

Hale J. K. and Kocak H. (1991) *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York.

Halsey T. C., Jensen M. H., Kadanoff L. P., Procaccia I. and Shraiman B. I. (1986) Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets, *Phys. Rev. A* (3) **33**, 1141-1151.

Hardy G. H. and Wright E. M. (1979) *An Introduction to the Theory of Numbers*. 5th edition, Cambridge University Press, Cambridge.

Harte D. (2001) *Multifractals, Theory and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

Hastings H. M. and Sugihara G. (1993) *Fractals. A User's Guide for the Natural Sciences*, Oxford University Press, New York.

Hausdorff F. (1919)Dimension und äusseres Mass, *Math. Annalen*, **79**, 157-179.

Hayman W. K. and Kennedy P. B. (1976) *Subharmonic Functions*, Volume 1, Academic Press, New York.

Heck A. and Perdang J. M. (Eds.) (1991) *Applying Fractals in Astronomy*, Springer-Verlag, Berlin.

Hénon M. and Pomeau Y. (1976) Two strange attractors with a simple structure, in *Turbulence and the Novier–Stokes Equations (Lecture Notes in Mathematics, 565),* (Ed. R.Temam), pp. 29-68, Springer, New York.

Hensley D. (1996) A polynomial time algorithm for the Hausdorff dimension of continued fraction Cantor sets, *J. Number Theory*, **58**, 9-45.

Hoggar S. G. (1992) *Mathematics for Computer Graphics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Hohlfeld R. G. and Cohen N. (1999) Self-similarity and the geometric requirements for frequency independence in antennae, *Fractals*, 7, 79-84.

Holden A. V. (1986) *Chaos*, Manchester University Press. Manchester.

Howroyd J. D. (1996) On Hausdorff and packing dimensions of product spaces, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **119**, 715-727.

Howroyd J. D. (2001) Box and packing dimensions of projections and dimension profiles, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **130**, 135-160.

Hunt B. R. (1998) The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**, 791-800.

Hutchinson J. E. (1981) Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.*, **30**, 713-747.

Hutchinson J. E. and Rüschendorf L. (2000) Random fractals and probability metrics, *Adv, in Appl. Probab.* **32**, 925-947.

Jaffard S. (1997) Multifractal formalism for functions I, II, *SIAM J. Math. An*, **28**, 944-970, 971-998.

Jaggard D. L. (1997) Fractal electrodynamics: from super antennas to superlattices, in *Fractals in Engineering*, Springer-Verlag, New York, 204-221.

Jarník V. (1931) Uber die simultanen diophantischen Approximationen, *Math. Zeit.*, **33**, 505-543.

Jones P. W. and Murai T. (1988) Positive analytic capacity but zero Buffon needle probability, *Pacific J. Math.*, **133**, 99-114.

Joyce H. and Preiss D. (1995) On the existence of subsets of finite positive packing measure, *Mathematika*, **42**, 15-24.

Julia G. (1918) Sur I'itération des fonctions rationnelles, *J. Math. Pure Appl.*, Ser. 7, **4**, 47-245.

Kahane J. -P. (1974) Sur le modèle de turbulence de Benoit Mandelbrot, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **278A**, 621-623.

Kahane J. -P. (1985) *Some Random Series of Functions,* 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge.

Kahane J. -P. (1986) Sur la dimensions des intersections, in *Aspects of Mathematics and its Applications*(Ed. J. A. Barroso), pp. 419-430, North-Holland, Amsterdam.

Kahane J.-P. and Peyrière J. (1976) Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot, *Adv. Math.* **22**, 131-145.

Karlin S. and Taylor H. M. (1975)*A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York.

Karlin S. and Taylor H. M. (1981) *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York.

Katok A. and Hasselblatt B. (1995)*Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.

Katz N. and Tao T. (2000) Recent progress on the Kakeya conjecture, Publications Matematiques, *Proc. 6th Int. Conf. on Harmonic Analysis and P.D.E.s*, Barcelona, 161-180.

Kaufman R. (1968) On the Hausdorff dimension of projections, *Mathematika*, **15**, 153-155.

Kaufman R. (1981) On the theorem of Jarník and Besicovitch, *Acta Arithmetica*, **39**, 265-267.

Kaye B. H. (1994)*A Random Walk Through Fractal Dimensions*, 2nd Ed, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim.

Kesten H. (1982) *Percolation Theory for Mathematicians,* Birkhauser, Boston, MA.

Kingman J. F. C. and Taylor S. J. (1966). *Introduction to Measure and Probability*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kolmogorov A. N. (1941) Local structure of turbulence in an incompressible liquid for very large Reynolds numbers, *C.R.Acad. Sci. USSR*, **30**, 299-303.

Lapidus M. L. and van Frankenhuysen M. (2000) *Fractal Geometry and Number Theory. Complex Dimensions of Fractal Strings and Zeros of Zeta Functions*, Birkhauser, Boston.

Ledrappier F., Lewowicz J. and Newhouse S. (Eds.) (1996) *International Conference on Dynamical Systems. A Tribute to Ricardo Ma*, Longman, Harlow.

Le Méhauté A. (1991)*Fractal Geometries: Theory and Applications*, CRC Press, Boca Raton.

Leslie D. C. (1973)*Developments in the Theory of Turbulence*, Clarendon Press, Oxford.

Lesmoir-Gordon N., Rood W. B. and Edney R. (2000) *Introducing Fractal Geometry*, Totem.

Lévy P. (1948) *Processus Stochastiques et Mouvement Brownian*, 2nd ed. 1965, Gauthier-Villars, Paris.

Lévy Véhel J., Lutton E. and Tricot C. (1997) *Fractals in Engineering*, Springer-Verlag, New York.

Lind D. and Marcus B. (1995) *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, Cambridge.

Lovejoy S. (1982)Area perimeter relation for rain and cloud areas, *Science*, **216**, 185-187.

Lovejoy S. and Schertzer D. (1995) Multifractals and rain, in *New Uncertainty Concepts in Hydrology and Hydrological Modelling*, 62-103, Cambridge University Press.

McCauley J. L. (1993) *Chaos, Dynamics and Fractals,* Cambridge University Press, Cambridge.

MacKay R. S. and Meiss J. D. (Eds) (1987) *Hamiltonian Dynamical Systems,* Adam Hilger, Bristol.

McMullen C. (1984) The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets, *Nagoya Marh. J.,* **96,** 1-9.

McMullen C. T. (1994) *Complex Dynamics and Renormalization,* Princeton University Press, Princeton.

Mandelbrot B. B. (1972) Renewal sets and random cutouts, Z. *Warsch Verw. Geb.,* **22**, 145-157.

Mandelbrot B. B. (1974) Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier, *J. Fluid Mech.,* **62**, 331-358.

Mandelbrot B. B. (1980) Fractal aspects of the iteration of $z \to \lambda z(1-z)$ for complex $\lambda$, $z$, *Ann. N. Y.Acad. Sci.,* **357**, 249-259.

Mandelbrot B. B.(1982) *The Fractal Geometry of Nature,* Freeman, San Francisco.

Mandelbrot B. B. (1986) Self-affine fractal sets, in *Fractals in Physics* (Eds L. Pietronero and E. Tosatti), North-Holland, Amsterdam.

Mandelbrot B. B. (1991) Random multifractals: negative dimensions and the resulting limitations of the thermodynamic formalism, *Proc. Roy. Soc. London,* **A434**, 79-88.

Mandelbrot B. B. (1997) *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk,* Springer-Verlag, New York.

Mandelbrot B. B. (1999) *Multifractals and 1/f Noise: Wild Self-affinity in Physics,* Springer-Verlag, New York.

Mandelbrot B. B. (2002)*Gaussian Self-affinity and Fractals. Globality, the Earth, 1/f Noise, and R/S,* Springer-Verlag, New York.

Mandelbrot B. B. and Riedi R. (1995) Multifractal formalism for infinite multinomial measures, *Adv. App, Math.*, **16**, 132-150.

Mandelbrot B. B. and Van Ness J. W. (1968) Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Rev.*, **10**, 422-437.

Marstrand J. M. (1954a) Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **4**, 257-302.

Marstrand J. M. (1954b)The dimension of Cartesian product sets, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **50**, 198-202.

Massopust P. R. (1994) *Fraclal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets,* Academic Press, San Diego.

Mattila P. (1975) Hausdorff dimension, orthogonal projections and intersections with planes, *Ann. Acad. Sci. Fennicae,* **A 1**, 227-244.

Mattila P. (1984) Hausdorff dimension and capacities of intersections of sets in $n$-space, *Acta Math.*, **152**, 77-105.

Mattila P. (1985) On the Hausdorff dimension and capacities of intersections, *Mathe-matika*, **32**, 213-217.

Mattila P. (1986) Smooth maps, null-sets for integral geometric measures and analytic capacity, *Ann. Math.*, **123**, 303-309.

Mattila P. (1995) *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge.

Mauldin R. D. and Urbański M. (1996) Dimensions and measures in infinite iterated function systems, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **73,** 105-154.

Mauldin R. D. and Urbański M. (1999) Conformal Iterated function systems with applications to the geometry of continued fractions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **351**, 4995-5025.

Mauldin R. D. and Williams S. C. (1986a) Random recursive constructions: asymptotic geometric and topological properties, *Trans. Am. Math. Soc.*, **295** , 325-346.

Mauldin R. D. and Williams S. C. (1986b) On the Hausdorff dimension of some graphs, *Trans Am Math. Soc.*, **298** , 793-803.

Mauldin R. D. and Williams S. C. (1988) Hausdorff dimension in graph directed constructions, *Trans.Amer. Math. Soc*, **309** , 811-829.

May R. M. (1976) Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, **261**, 459-467.

Mayer-Kress G. (Ed.) (1986) *Dimensions and Entropies in Chaotic Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin.

Meakin P. (1998) *Fractals, Scaling and Growth Far from Equilibrium*, Cambridge University Press, Cambridge, 55.

Merzenich W. and Staiger L. (1994) Fractals, dimension, and formal languages, *RAIRO Informatique thorique et Applications*, **28** , 361-386.

Milnor J. (1999) *Dynamics in One Complex Variable, Introductory Lectures*, Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig.

Moon F. C. (1992)*Chaotic and Fractal Dynamics*, Wiley, New York.

Moran P. A. P. (1946) Additive functions of intervals and Hausdorff measure, *Proc. Comb. Phil. Soc.*, **42** , 15-23.

Morgan F. (2000) *Geometric Measure Theory. A Beginner's Guide*, Academic Press, San Diego.

Murai T. (1988) A real variable method for the Cauchy transform, and analytic capacity, *Lecture Notes in Mathematics*, **1307**, Springer-Verlag, Berlin.

Novak M. M. (Ed.) (1998) *Fractals and Beyond*, World Scientific, Singapore.

Novak M. M. (Ed.) (2000) *Paradigms of Complexity*, World Scientific, Singapore.

Nusse H. E. and Yorke J. A. (1998) *Dynamics: Numerical Explorations*, Springer-Verlag, New York.

Olsen L. (1994) *Random Geometrically Graph Directed Self-similar Multifractals*, Longman, Harlow.

Olsen L. (1995) A multifractal formalism, *Adv. Math.*, **116**, 82-196.

Olsen L. (2000) Multifractal geometry, in *Fractal Geometry and Stochastics, II*, 3-37, *Progr. Probab.*, **46**, Birkhauser, Basel.

Papoulis A. (1962) *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill, New York.

Patzschke N. (1997) Self-conformal multifractal measures, *Adv. Appl. Math.* **19**, 486-513.

Peitgen H.-O., Jürgens H. and Saupe D. (1992) *Chaos and Fractals*, Springer-Verlag, New York.

Peitgen H.-O. and Richter P. H. (1986) *The Beauty of Fractals*, Springer, Berlin.

Peitgen H.-O. and Saupe D. (Eds) (1988) *The Science of Fractal Images*, Springer, New York.

Peitgen H.-O., Saupe D. and von Haeseler F. (1984) Cayley's problem and Julia sets, *Math. Intelligencer*, **6**, 11-20.

Peres Y. and Solomyak B. (2000) Problems on self-similar sets and self-affine sets: an update, in *Fractal Geometry and Stochastics **II***, 95-106, *Progr. Probab.*, **46**, Birkhauser, Basel.

Pesin Y. (1997), *Dimension Theory in Dynamical Systems*, University of Chicago Press, Chicago.

Peter E. E. (1994) *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*, Wiley, New York.

Peyrière J. (1974) Turbulence et dimension de Hausdorff, *C.R. Acad. Sci Paris*, **278A**, 567-569.

Peyrière J. (1977) Calculs de dimensions de Hausdorff, *Duke Math. J.*, **44**, 591-601.

Pickover C. A. (Ed.) (1998) *Chaos and Fractals. A Computer Graphical Journey*, Elsevier, Amsterdam.

Pietronero L. (Ed.) (1989)*Fractals*, Plenum Press, New York.

Pietronero L. and Tosatti E. (Eds) (1986) *Fractals in Physics,* North-Holland, Amsterdam.

Pontrjagin L. and Schnirelman L. (1932) Sur une propriété métrique de la dimension, *Ann. Math.*, **33**, 156-162.

preiss D. (1987) Geometry of measures in $\mathbf{R}^n$: distribution, rectifiability and densities, *Ann. Math.*, **125**, 537-641.

Preiss D. and Tiser J. (1992) On Besicovitch's$\frac{1}{2}$-problem, J.*London Math. Soc. (2)*, **45**, 279-287.

Puente C., Romeu J., Rous R. and Cardama A. (1997) Multiband fractal antennas and arrays, in *Fractals in Engineering*, Springer-Verlag, New York, 221-236.

Riedi R. (1995) An improved multifractal formalism and self-similar measures, *J. Math. Anal. Appl.*, **189**, 462-490.

Rodriguez-Iturbe I. and Rinaldo A. (1997) *Fractal River Basins*, Cambridge University Press, Cambridge.

Rogers L. C. G. and Williams D. (2000) *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Volume 1: Foundations*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge.

Rogers C. A. (1988) Dimension prints, *Mathematika*, **35**, 1-27.

Rogers C. A. (1998) *Hausdorff Measures*, 2nd ed. Cambridge University Press, Cam-bridge.

Rudin W. (1964) *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Ruelle D. (1980) Strange attractors, *Math. Intelligencer*, **2**, 126-137.

Ruelle D. (1982) Repellers for real analytic maps, *Ergod. Theor. Dyn. Syst.*, **2**, 99-108.

Ruelle D. (1983) Bowen's formula for the Hausdorff dimension of self-similar sets, in *Scaling and Self-similarity in Physics (Progress in Physics, 7)* Birkhauser, Boston, MA.

Rynne B. P. (1992) Regular and ubiquitous systems, and $M_\infty^s$-dense sequences, *Mathematika* **39**, 234-243.

Samorodnitsky G. and Taqqu M. S. (1994) *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

Santaló L. A. (1976) *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Saupe D. (1987) Efficient computation of Julia sets and their fractal dimension, *Physica*, **28D**, 358-370.

Schmidt W. M.(1980) *Diophantine Approximation (Lecture Notes in Mathematics*, 785). Springer, Berlin.

Schneider R. (1993) Convex surfaces, curvature and surface area measures, in *Handbook of Convex Geometry, Vol. A*, 273-299, North-Holland, Amsterdam.

Scholz C. H. and Mandelbrot B. B. (Eds) (1989) *Fractals in Geophysics*, Birkhauser, Boston, MA.

Schroeder M. (1991) *Fractals, Chaos, Power Laws*, W. H. Freeman, New York.

Schuster H. G.(1984) *Deterministic Chaos–An Introduction*, Physik Verlag, Weinheim.

Shlesinger M. F., Mandelbrot B. B. and Rubin R. J. (Eds) (1984)*Proceedings of the Gaithersburg Symposium on Fractals in the Natural Sciences, J. Star. Pkys.*, **36** (special issue) 519-921.

Simpelaere D. (1994) Dimension spectrum of Axiom A diffeomorphisms **I,II**, *J. Stat. Phys.*, **76**, 1329-1358, 1359-1375.

Smale S. (1967) Differentiable dynamical systems, *Bull. Am. Math. Soc.*, **73**, 747-817.

Solomyak B. (1998) Measure and dimension for some fractal families, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **124**, 531-546.

Sparrow C. (1982)*The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Sfrange Attractors*, Springer, New York.

Stanley H. E. and Ostrowsky N. (Eds.) (1986)*On Growth and Form*, Martinus Nijhoff, Dordrecht.

Stanley H. E. and Ostrowsky N. (Eds.) (1988)*Random Fluctuations and Pattern Growth*, Kluwer Academic, Dordrecht.

Stein E. M. (1993) *Harmonic Analysis: Real-variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton.

Stoyan D. and Stoyan H. (1994) *Fracrals, Random Shapes and Point Fields*, Wiley, Chichester.

Stuart A. M. and Humphries A. R. (1996) *Dynamical Systems and Numerical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

Takayasu H. (1990) *Fractals in the Physical Sciences*, Manchester University Press, Manchester.

Tan L. (Ed.) (2000) The Mandelbrot Set, Theme and Variations, *London Math. Soc. Lecture Notes*, **274**, Cambridge University Press, Cambridge.

Taylor S. J. (1961) On the connection between Hausdorff measures and generalized capacities, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **57**, 524-531.

Taylor S. J. (1973) Sample path properties of processes with stationary independent increments, in *Stochastic Analysis* (Eds D. G. Kendall and E. F. Harding), pp. 387-414. Wiley, New York.

Taylor S. J. (1986) The measure theory of random fractals, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **100**, 383-406.

Tél T. (1988) Fractals and multifractals, *Zeit. Naturforsch.*, **43A**, 1154-1174.

Temam R. (Ed.) (1976) *Turbulence and the Navier–Stokes Epuations, Lecture, Notes in Mathematics* **565**, Springer, New York.

Temam R. (1983) *Navier–Stokes Equations md Non-linear Functional Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.

Temam R. (1997) *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.

Thompson J. M.T. and Stewart H. B. (1986) *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Wiley, Chichester.

Tricot C. (1982) Two definitions of fractional dimension, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **91**, 54-74.

Tricot C. (1995) *Curves and Fractal Dimension,* Springer-Verlag, New York.

Turcotte D. L. (1997) *Fracrals and Chaos in Geology and Geophysics,* Cambridge University Press, Cambridge.

Vicsek T. (1992)*Fractal Growth Phenomena,* 2nd ed., World Scientific, River Edge.

Voss R. F. (1985) Random fractal forgeries, in *Fundamental Algorithms in Computer Graphics* (Ed. R. A. Earnshaw), pp. 805-835. Springer, Berlin.

West B. J. (1990) *Fractal Physiology and Chaos in Medicine,* World Scientific, Teaneck.

Wicks K. R. (1991) *Fractals and Hyperspaces, Lecture Notes in Mathematics* **1492**, Springer-Verlag.

Wolff T. (1999) Recent work connected with the Kakeya problem, in *Prospects in Mathematics,* 129-162, Amer. Math. Soc.,Providence.

Xie H. (1993) *Fractals in Rock Mechanics,* A. A. Balkema, Rotterdam.

Young L. -S. (1982) Dimension, entropies and Lyapunov exponents, *Ergod. Theor. Dyn. Syst.*, **2**, 109-124.

Zäble U. (1984) Random fractals generated by random cutouts, *Math. Nachr.,* **116**,27-52.

# 索　引

# 译 后 记

15 年前, 我翻译了肯尼思 · 法尔科内的《分形几何 —— 数学基础及其应用》, 该书的中文版出版后深受广大读者的欢迎. 时至今日, 依然有人来电话要求我帮助他买这本书. 使我感到喜悦的是, 肯尼思 · 法尔科内在 2003 年推出了该书的第 2 版, 结合分形几何的发展, 对第 1 版的内容做了较大的修订和补充. 受人民邮电出版社图灵公司的委托, 我又翻译了《分形几何 —— 数学基础及其应用》的第 2 版. 现在, 在出版社编辑出色的工作下, 又一本崭新的中文版本与读者见面了. 希望这个新版本能帮助更多的学子进入分形这个有趣的领域.

我的导师严士健先生在百忙之中, 为这个新版本撰写了序言, 为本书增色不少, 我在这里向他表示衷心的感谢; 同时感谢在本书的翻译出版过程中提供帮助的人. 我的研究生王兵和李小杰录入了译稿; 图灵公司的编辑, 为本书的出版做了积极的努力.

这是我第 3 次翻译肯尼思 · 法尔科内的书, 在前 2 次翻译时 (1991 年翻译本书的第 1 版, 1998 年翻译他著的《分形几何中的技巧》) 都与他有过良好的合作. 他不仅把书寄送给我, 还及时回答我提出的各类问题, 并且帮忙与威利出版社联系, 使得《分形几何中的技巧》一书的中文版得以出版, 在此向他表示深切的谢意.

能继续把《分形几何 —— 数学基础及其应用》(第 2 版) 介绍给国内读者是我的荣幸. 有了前两次翻译的基础, 我自信这本新书在翻译质量上要比前两本书高, 但由于本人学识有限, 而此书涉及的知识面很广, 译稿中难免会有这样那样的错误, 恳请读者多多批评指正.

曾文曲

2006 年 11 月于羊城

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝分形几何：数学基础及其应用　　（第二版）
作者＝（英）ＫＥＮＮＥＴＨ　ＦＡＬＣＯＮＥＲ著　　曾文曲译
页数＝３０４
ＳＳ号＝１１８８６４４１
出版日期＝２００７年１０月第１版